

LOUIS-MARIE LE NY

**Probabilités stationnaires de réseaux de files d'attente à routages dépendant de l'état et avec plusieurs classes de clients**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-45

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1978\\_\\_1\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__1_A7_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBABILITES STATIONNAIRES DE RESEAUX DE FILES  
D'ATTENTE A ROUTAGES DEPENDANT DE L'ETAT ET AVEC  
PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS.

Louis-Marie LE NY  
Département Génie Electrique  
IUT  
rue du Clos-Courtel  
35000 RENNES



## S O M M A I R E

---

A - DEFINITIONS ET NOTATIONS	page 2
A1 - ETATS DU RESEAU R	3
A2 - TAUX DE SERVICE D'UNE CLASSE $k$	4
A3 - SOUS-RESEAU PROPRE	5
A4 - TAUX DE PROBABILITE STATIONNAIRE $u_k, v_k, w_k, z_k$	6
A5 - SOUS-RESEAU STANDARD PAR CLASSES	8
B - THEOREMES DE STABILITE	9
B1 - 1er THEOREME DE STABILITE	9
B2 - PROBABILITE NATURELLE ET RESEAU NATUREL PAR CLASSES	11
B3 - 2eme THEOREME DE STABILITE	13
B4 - FLUX DE SORTIE CONDITIONNEL DE CLIENTS D'UNE CLASSE $k$	16
C - COMPOSITION DE RESEAUX	17
C1 - DEFINITION D'UNE STATION $n$ -ECHANGEABLE PAR CLASSES	17
C2 - THEOREME FONDAMENTAL	17
C3 - THEOREME GENERAL	21
D - RESEAU PARFAIT PAR CLASSES	24
D1 - DEFINITION	24
D2 - PROBABILITE STATIONNAIRE	24
D3 - INTERPRETATION PHYSIQUE	25
D4 - EXEMPLE DE RESEAU PARFAIT PAR CLASSES	25
D5 - STATIONS DUALES PAR CLASSES	26
D6 - THEOREME DE SUBSTITUTION	26
D7 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS FERME	28
D8 - CAS PARTICULIER OU LES ROUTAGES SONT FIXES	31
D9 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS OUVERT	32
E - EXTENSION AU CAS DE LOIS NON EXPONENTIELLES	34
E1 - ETUDE D'UN CAS AVEC UNE SEULE CLASSE DE CLIENTS	34
E2 - CAS OU IL Y A PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS	36

F - CAS OU LES CLIENTS PEUVENT CHANGER DE CLASSE	p. 38
F1 - NOTATIONS	38
F2 - THEOREME	38
F3 - PROPOSITION	41
BIBLIOGRAPHIE	44

PROBABILITES STATIONNAIRES DE RESEAUX DE FILES D'ATTENTE  
A ROUTAGES DEPENDANT DE L'ETAT ET AVEC PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS.

---

INTRODUCTION

Ce rapport a pour objet de montrer que la probabilité stationnaire d'un réseau de files d'attente comprenant plusieurs classes de clients s'exprime encore sous forme d'un produit de fonctions indépendantes lorsque les probabilités de répartition entre stations (ou routages) dépendent de l'état de tout le réseau moyennant une hypothèse d'"échangeabilité par classes".

Ce rapport reprend les techniques utilisées par J. Pellaumail [1] dans le cas d'une classe de clients.

Dans les paragraphes A, B, C nous donnons les définitions et théorèmes de base dans le cas où les lois de service sont exponentielles. Le paragraphe D concerne un type particulier de réseau appelé réseau parfait ; nous y notons également que, dans le cas où les routages sont fixes, nous retrouvons la formule habituelle donnée par Baskett, Chandy, Muntz et Palacios [2].

Le paragraphe E permet de voir comment les résultats précédents peuvent s'étendre au cas où les lois de service ne sont pas exponentielles.

Enfin, dans le paragraphe F, nous montrons que certains résultats donnés dans les paragraphes A, B, C sont encore valables sous des hypothèses plus larges (possibilité de changement de classes par exemple).

## A - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Soit R un réseau fermé markovien ergodique de files d'attente composé de m stations de service  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ , l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$  étant également noté M.

On suppose qu'il y a N clients en circulation dans ce réseau et qu'ils sont répartis en K classes notées  $k = 1, 2, \dots, K$ .

On envisage d'abord le cas où les clients ne peuvent pas changer de classe.

Pour toute classe k, le nombre total de clients de classe k en circulation dans le réseau R est noté  $n_k$  ; on a donc

$$\sum_{k=1}^K n_k = N \quad \text{et on pose } n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$$

La notion de station que nous considérons est une notion très large : pour nous, une station est un sous-ensemble dont l'évolution interne (discipline de service) est markovienne et indépendante de l'état des autres stations ; de plus on suppose qu'une station ne peut changer d'état que par arrivée ou départ d'un client.

Pour fixer les idées, nous allons donner un exemple de telle station quand il y a 2 classes de clients et 2 serveurs, et quand les lois de service sont exponentielles. La discipline générale est "premier arrivé, premier servi" (PAPS), toutefois chaque client de la classe 2 doit laisser passer avant lui un client (et un seul) de la classe 1 si un tel client se présente. L'état d'une telle station est caractérisé par le nombre de clients de classe 2 situés en queue de file qui n'ont pas encore laissé passer un client de classe 1 avant eux et par l'état général de la file d'attente.

### A1 - ETATS DU RESEAU R

Dans toute la suite, sauf modification de l'indice m, on appellera état fondamental du réseau R un m-uple  $e = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_m)$  où  $e_i$  caractérise l'état de la station  $S_i$ . Suivant les cas et suivant

les stations ce vecteur  $e_i$  pourra, ou non, dépendre de l'ordre d'arrivée des clients dans la station  $S_i$ . Par exemple, si la loi de service, pour chaque classe de clients, dans la station  $S_i$ , ne dépend que des nombres de clients  $(e_{ik})_{1 \leq k \leq K}$  dans les différentes classes, on pourra caractériser l'état de la station  $S_i$  par le vecteur  $(e_{ik})_{1 \leq k \leq K}$  ; ceci permet de prendre en compte des priorités mais ne permet pas de prendre en compte une discipline PAPS. Si la discipline de service, à la station  $S_i$ , est PAPS, on pourra prendre comme ensemble d'états tous les N-uples  $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq N}$  où  $E_{ij}$  désigne l'indice de la classe du  $j^{\text{ième}}$  client dans la file d'attente et  $E_{ij} = 0$  s'il y a moins de  $j$  clients dans la station  $i$ .

Les disciplines de service dans les stations et l'ensemble d'états choisi seront toujours supposés tels que :

A11 : on ne fait pas de distinction entre les éléments d'une même classe,

A12 : Pour tous les indices  $i$  et  $k$ , on différencie deux états qui ne correspondent pas à un même nombre de clients de classe  $k$  dans la station  $i$ .

A13 : Pour tout sous-réseau ouvert  $R'$  extrait du réseau initial et en partant d'un état  $e'$  quelconque de  $R'$ , si un client de classe  $k$  quitte le réseau  $R'$  en partant de la station  $i$  ou rentre dans le réseau  $R'$  en allant dans la station  $i$ , l'état de  $R'$  atteint est unique ; on exclut donc les disciplines du type : on se met en tête ou en queue de la file d'attente avec "une chance sur deux". Il faut noter que cet aspect de l'hypothèse est essentiellement pour la commodité de l'exposition. Cette hypothèse exclut aussi les disciplines du type : on se met en tête ou en queue de la file d'attente de la station en tenant compte de l'état des autres stations. Cet aspect de l'hypothèse est fondamental.

Bien entendu, toutes les définitions qui suivent dépendent de l'ensemble d'états que l'on a choisi ; nous supposons donc que cet ensemble d'états est fixé une fois pour toutes. On le notera  $E$ .

Etant donné un état  $e$  d'un réseau ouvert  $R$ , avec abus de notation, on notera symboliquement  $(e + f_{ik})$  l'ensemble des états tels que, si un client de classe  $k$  quitte la station  $S_i$  et le réseau  $R$ , on arrive dans l'état  $e$  : si  $p$  est une probabilité,



$p(e + f_{ik})$  désignera donc la probabilité de cet ensemble d'états. Compte tenu de A12, l'ensemble d'états choisi est toujours tel que les ensembles  $(e + f_{ik})$  sont deux à deux disjoints quand  $i$  et  $k$  varient. De façon analogue, on notera  $(e - f_{ik})$  l'ensemble des états tels que, si un client de classe  $k$  rentre dans le réseau ouvert  $R$  et dans la station  $S_i$ , on atteint l'état  $e$  : notons qu'usuellement l'état  $(e - f_{ik})$  est unique mais avec nos hypothèses, cette unicité peut ne pas être satisfaite. Si le réseau  $R$  est fermé, on définit de même  $(e - f_{ik} + f_{jk})$  l'ensemble des états tels que, si un client de classe  $k$  va de la station  $S_j$  à la station  $S_i$ , l'état atteint est  $e$ .

Bien entendu, quand on utilisera des réseaux notés  $R'$ ,  $R''$  etc... et des états associés  $e'$ ,  $e''$ , etc... on définira de façon analogue  $(e' + f'_{ik})$ ,  $(e'' + f''_{ik})$  etc...

## A2 - TAUX DE SERVICE D'UNE CLASSE $k$

Si  $G_{ik}(t, t + dt)$  désigne l'évènement :

"un client de la classe  $k$  quitte la station  $S_i$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ", on définit *le taux de service de la classe  $k$  dans la station  $S_i$*  par l'égalité

$$g_{ik}(e) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P[G_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

Ce taux de service  $g_{ik}(e)$  peut dépendre de l'état  $e$  de tout le réseau  $R$ .

Dans le cas où  $g_{ik}(e)$  ne dépend que du nombre de clients de classe  $k$  dans la station  $S_i$ , cette station est dite pure pour la classe  $k$  ou encore  $k$ -pure. Dans ce cas  $g_{ik}(e)$  sera noté  $h_{ik}(e_{ik})$ . Si une station est  $k$ -pure pour tout  $k = 1, 2, \dots, K$  on dira que cette station est *pure par classes*.

On supposera que le taux de service de la classe  $k$  est nul si la station ne contient pas de clients de classe  $k$  et strictement positif sinon.

### A3 - SOUS-RESEAU PROPRE

Un sous-réseau  $R$  de  $\overset{V}{R}$  est dit *propre* si les 3 conditions suivantes sont réalisées :

a - Pour ce sous-réseau, les taux de probabilité de transfert à l'intérieur du sous-réseau  $R$  ne dépendent que de l'état du sous-réseau  $R$ .

b - Pour ce sous-réseau, les taux de probabilité pour un client de quitter  $R$  ne dépendent que de l'état de  $R$ .

c - Pour ce sous-réseau  $R$ , quand un client rentre dans ce sous-réseau, la probabilité, pour ce client, d'aller dans telle ou telle station de  $R$  ne dépend que de l'état de  $R$ .

Dans le cas où l'on considère un tel sous-réseau propre  $R$  on considère  $a_{ik}(e)$  (resp  $b_{ik}(e)$ ) le taux de probabilité qu'un client de classe  $k$  quitte la station  $i$  pour aller dans une autre station (resp. à l'extérieur) du sous-réseau  $R$  quand l'état de  $R$  est  $e$ .

Dans ce cas, si l'on note  $A_{ik}(t, t + dt)$  l'évènement, "un client de classe  $k$  quitte la station  $S_i$  de  $R$  entre  $t$  et  $t + dt$  pour aller dans une autre station de  $R$  si l'état de  $R$  est  $e$ ", on pose :

$$a_{ik}(e) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P[A_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

De même, si  $B_{ik}(t, t + dt)$  désigne l'évènement "un client de classe  $k$  quitte la station  $S_i$  de  $R$  entre  $t$  et  $t + dt$  pour aller à l'intérieur de  $R$  si l'état de  $R$  est  $e$ ", on pose:

$$b_{ik}(e) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P[B_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

On utilise également  $c_{ik}(e)$  : probabilité pour un client de classe  $k$  d'aller dans la station  $i$  de  $R$  sachant qu'il rentre dans le sous-réseau  $R$  et que ce sous-réseau est dans l'état  $e$ . On pose :

$$a_i(e) = \sum_{k=1}^K a_{ik}(e) \quad , \quad b_i(e) = \sum_{k=1}^K b_{ik}(e) \quad , \quad c_i(e) = \sum_{k=1}^K c_{ik}(e)$$

Enfin si l'on considère l'évènement  $D_{ij,k}(t, t + dt)$  :  
 "un client de classe k va de la station i de R dans la station j de R  
 entre t et t + dt sachant que l'état du sous-réseau R est  $e$ ", on définit  
 le taux

$$d_{ij,k}(e) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P[D_{ij,k}(t, t + dt)]}{dt}$$

et  $d_{ij}(e) = \sum_{k=1}^K d_{ij,k}(e)$ .

On peut noter que  $\sum_{i \in M} C_i(e) = 1$  et  $\sum_{j \in M} d_{ij}(e) = a_i(e)$

et que  $(a_{ik} + b_{ik})(e)$  est le taux de service  $g_{ik}(e)$  de la classe k  
 pour la station  $S_i$  dans le sous-réseau R.

Le rapport  $\frac{d_{ij,k}(e)}{(a_{ik} + b_{ik})(e)}$  est noté  $r_{ij,k}(e)$  et est

appelé probabilité de répartition d'un client de classe k de la station i  
 vers la station j ou encore routage.

A4 - TAUX DE PROBABILITES STATIONNAIRES  $u_k, v_k, w_k, z_k$

On considère un sous-réseau R avec les hypothèses et notations  
 données ci-dessus. R comprend donc m stations; soit S une autre station  
 de service,  $\bar{R} = (R, S)$  le réseau fermé constitué de R et S, le nombre  
 de clients dans  $\bar{R}$  étant N et le nombre de clients de classe k :  $n_k$  pour  
 $k = 1, \dots, K$ . Un état fondamental de  $\bar{R}$  est noté  $\bar{e} = (e, e_s)$  où e est  
 un état de R et  $e_s$  un état de S (cf, A1).

Dans ce paragraphe on s'intéresse au réseau  $\bar{R}$  en régime  
 stationnaire et on note  $p(\bar{e})$  la probabilité stationnaire pour le réseau  $\bar{R}$   
 d'être dans l'état  $\bar{e}$ . On peut noter qu'à chaque état  $\bar{e}$  ne correspond qu'un  
 seul état e et réciproquement, donc on pourra confondre  $p(\bar{e})$  et  $p(e)$ .

On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$u_k(e) = \sum_{i,j=1}^m p(e - f_{ik} + f_{jk}) d_{ji,k}(e - f_{ik} + f_{jk})$$

$u_k(e)$  est le taux de probabilité en régime stationnaire et pour  $\bar{R}$  d'atteindre l'état  $\bar{e} = (e, e_s)$  par transfert d'un client de classe  $k$  à l'intérieur du sous-réseau  $R$ .

On notera 
$$u(e) = \sum_{k=1}^K u_k(e)$$

De même on définit :

$$v_k(e) = \sum_{i=1}^m p(e-f_{ik}) c_{ik}(e-f_{ik}) \quad \text{et} \quad v(e) = \sum_{k=1}^K v_k(e)$$

$v_k(e)$  est la probabilité en régime stationnaire pour le réseau  $\bar{R}$  d'atteindre l'état  $\bar{e} = (e, e_s)$  si on sait qu'un client de classe  $k$  rentre dans le sous-réseau  $R$ .

On pose également :

$$w_k(e) = \sum_{i=1}^m p(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik})$$

$w_k(e)$  est donc le taux de probabilité en régime stationnaire pour le réseau  $\bar{R}$  d'atteindre l'état  $\bar{e} = (e, e_s)$  par départ d'un client de classe  $k$  du sous-réseau  $R$  vers la station  $S$ .

Si la station  $S$  n'est pas pure par classes, on considère aussi :

$$z_k(e) = \sum_{i=1}^m p(e-f_{ik}) c_{ik}(e-f_{ik}) g_k(e-f_{ik})$$

$z_k(e)$  est le taux de probabilité, en régime stationnaire, et pour  $\bar{R}$  d'atteindre l'état  $\bar{e} = (e, e_s)$  par départ d'un client de classe  $k$  de la station  $S$ .

On notera 
$$z(e) = \sum_{k=1}^K z_k(e)$$

A5 - SOUS-RESEAU STANDARD PAR CLASSES

On dira qu'un réseau fermé  $\bar{R}$  est *équilibré par classes* si, pour tout état  $e$  et toute classe  $k$ , le taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par transfert d'un client de classe  $k$  est égale au taux de probabilité d'atteindre l'état  $e$  dans les mêmes conditions.

Pour simplifier les formules, nous noterons  $h_k$  le taux de service de la station  $S$  pour la classe  $k$  et  $s_k$  le nombre de clients de classe  $k$  dans cette station.

Soit  $R$  un sous-réseau propre. On dira que  $R$  est un *sous-réseau standard par classes* s'il existe une station  $S$  pure par classes telle que le réseau  $\bar{R} = R \cup S$  est un réseau markovien ergodique équilibré par classes et telle que

A5.1 -  $(\forall e \in E) (\forall k \in [1, K])$

$$w_k(e) = h_k(s_k) p(e)$$

avec  $w_k(e)$  et  $p(e)$  définis en A4. Si  $\forall k \in [1, K]$ ,  $\bar{R}$  contient  $n_k$  clients de classe  $k$ , on dira que  $\bar{R}$  est *n-standard par classes* (où  $n = (n_1, \dots, n_K, \dots, n_K)$ ).

Cette égalité signifie qu'en régime stationnaire le taux de probabilité d'atteindre l'état  $e$  par départ d'un client de classe  $k$  du sous-réseau  $R$  est égal au taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par arrivée d'un client de la même classe  $k$  dans le sous-réseau  $R$ .

Le réseau  $\bar{R}$  étant équilibré par classes, la condition A5.1 est équivalente à

A5.2 -  $(\forall e \in E) (\forall k \in [1, K])$

$$u_k(e) + h_k(s_k + 1)v_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik}(e) + b_{ik}(e))$$

Cette égalité signifie que, en régime stationnaire, le taux de probabilité d'atteindre l'état  $e$  par arrivée ou par transfert d'un client de classe  $k$  dans le réseau  $R$  est égal au taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par départ d'un client de classe  $k$  du réseau  $R$  ou par transfert d'un client de classe  $k$  dans le réseau  $R$ .

B - THEOREMES DE STABILITE

B1 - PREMIER THEOREME DE STABILITE

Soit R un réseau standard par classes. Soit S une station de service pure par classes telle que la condition A5.1 soit satisfaite, c'est-à-dire que

$$(\forall e \in E) \quad (\forall k \in [1, K]) \quad w_k(e) = h_k(s_k) p(e)$$

On considère une autre station S' pure par classes de taux de service  $h'_k$  pour la classe k et on note  $\bar{R}' = RUS'$  et  $p'$  la probabilité stationnaire pour que le réseau  $\bar{R}'$  soit dans l'état  $(e, e_s)$ .

On pose

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^m p'(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik})$$

On rappelle que  $e_s = (s_1, \dots, s_k, \dots, s_K)$  où  $s_k$  est le nombre de clients de classe k dans la station S quand son état est  $e_s$ .

On a alors

$$B1.1 - \quad p'(e) = C p(e) \prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)}$$

où C est une constante de normalisation qui ne dépend pas de e.

De plus  $(\forall e \in E)$  et  $(\forall k \in [1, K])$  on a :

B1.2 -  $w'_k(e) = h'_k(s_k) p'(e).$

Autrement dit si la condition A5.1 est satisfaite relativement à une station de service S pour toute classe k, alors cette condition est satisfaite relativement à n'importe quelle station de service pour toute classe k.

DEMONSTRATION :

On suppose que la probabilité p satisfait à l'égalité

$$w_k(e) = h_k(s_k) p(e), \quad \forall e \in E \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, K]$$

On pose 
$$g_k(q) = \prod_{j=1}^q \frac{h_k(j)}{h'_k(j)}$$

$$u'_k(e) = \sum_{i,j=1}^m p'(e-f_{ik}+f_{jk}) d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})$$

$$u'_k(e) = \sum_{i,j=1}^m cp(e-f_{ik}+f_{jk}) g(s_1) \dots g(s_k) \dots g(s_k) d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})$$

$$v'_k(e) = \sum_{i=1}^m p'(e-f_{ik}) c_{ik}(e-f_{ik}) = \sum_{i=1}^m cp(e-f_{ik}) g(s_1) \dots g(s_{k+1}) \dots$$

$$g(s_k) c_{ik}(e-f_{ik})$$

d'où d'après la définition de  $u_k(e)$  et  $v_k(e)$  on a

$$u'_k(e) = c u_k(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_k) \dots g_k(s_k)$$

$$v'_k(e) = c v_k(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_{k+1}) \dots g_k(s_k)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} w'_k(e) &= \sum_{i=1}^m p'(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik}) \\ &= \sum_{i=1}^m cp(e+f_{ik}) g_1(s_1) \dots g_k(s_{k-1}) \dots g_k(s_k) b_{ik}(e+f_{ik}) \end{aligned}$$

d'où

$$w'_k(e) = c w_k(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_{k-1}) \dots g_k(s_k)$$

or

$$w_k(e) = h_k(s_k) p(e), \quad \text{d'où :}$$

$$w'_k(e) = c h_k(s_k) p(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_{k-1}) \dots g_k(s_k)$$

mais

$$h_k(s_k) g_k(s_{k-1}) = h_k(s_k) \prod_{j=1}^{s_k-1} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} = h'_k(s_k) g_k(s_k)$$

d'où

$$w'_k(e) = c h'_k(s_k) p(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_k) \dots g_K(s_K)$$

c'est-à-dire

$w'_k(e) = h'_k(s_k) p'(e)$	pour tout $k \in [1, K]$ et pour tout $e \in E$
-----------------------------	--

De plus on a :

$$p'(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik}(e) + b_{ik}(e)) = c p(e) g_1(s_1) \dots g_k(s_k) \dots g_K(s_K) \sum_{i=1}^m (a_{ik}(e) + b_{ik}(e))$$

or d'après A5.2 on a :

$$p(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik} + b_{ik})(e) = h'_k(s_k + 1) v_k(e) + u_k(e)$$

d'où

$$\begin{aligned} p'(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik} + b_{ik})(e) &= c g_1(s_1) \dots g_k(s_k) \dots g_K(s_K) u_k(e) \\ &\quad + c g_1(s_1) \dots g_k(s_k) \dots g_K(s_K) h'_k(s_k + 1) v_k(e) \\ &= u'_k(e) + h'_k(s_k + 1) v'_k(e) \end{aligned}$$

$p'$  satisfait donc à la condition d'équilibre par classes en régime stationnaire, donc  $p'$  est bien la probabilité stationnaire du réseau markovien ergodique  $\bar{R}'$

## B2 - PROBABILITE NATURELLE ET RESEAU NATUREL PAR CLASSES

Soit  $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$ ,  $N$  un entier et  $R$  un sous-réseau standard par classes. Soit  $S$  la station pure par classes telle que  $h_k(j) = 1$  pour tout  $j = 1, \dots, N$  et pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Soit  $p(e)$  la probabilité stationnaire de l'état  $(e, e_s)$  du réseau  $R = \bar{R}US$ . Cette probabilité  $p$  est appelée *probabilité n-naturelle du sous-réseau R*. Le réseau  $\bar{R}$  est appelé le réseau n-naturel par classes associé à  $R$ .

Si l'on considère alors une station pure par classes  $S'$  de taux de service  $h'_k(s_k)$  pour la classe  $k$ , soit  $p'(e)$  la probabilité



stationnaire de l'état  $\bar{e} = (e, e_s)$  du réseau  $\bar{R}' = \text{RUS}'$ , on a alors :

$$\text{B21 - } p'(e) = cp(e) \prod_{j=1}^{s_1} \frac{1}{h'_1(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{1}{h'_k(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{1}{h'_K(j)}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e

CAS PARTICULIER D'UNE STATION :

Soit R un sous-réseau réduit à une station S pure par classes de taux de service  $h_k(s_k)$  pour la classe k quand il y a  $s_k$  clients de classe k dans cette station.

Alors R est n-standard par classes et sa probabilité n-naturelle vaut

$$\text{B22 - } p(s_1, \dots, s_k, \dots, s_K) = C \frac{1}{\left( \prod_{j=1}^{s_1} h_1(j) \right) \dots \left( \prod_{j=1}^{s_k} h_k(j) \right) \dots \left( \prod_{j=1}^{s_K} h_K(j) \right)}$$

DEMONSTRATION :

R est un sous-réseau propre parce que S est pure par classes. En considérant  $\bar{R} = \text{SUS}'$  où S' est une station pure par classes de taux de service

$$h'_k(j) = 1, \forall k \in [1, K] \text{ et } \forall j \in [1, N]$$

Montrons d'abord que  $\bar{R}$  est équilibré par classes

$$\forall k, \forall e, w_k(e) = p(s_1, \dots, s_k+1, \dots, s_K) h_k(s_k+1) = p(s_1, \dots, s_k, \dots, s_K)$$

donc  $w_k(e) = h'_k(s'_k) p(e)$  (B23)

de même  $\forall k, \forall e, u_k(e) + h'_k(s'_k+1) v_k(e) = p(s_1, \dots, s_k-1, \dots, s_K) = p(e) h_k(s_k)$

B.24

La formule B22 est telle que B23 et B24 soient vraies ce qui prouve que  $\bar{R}$  est équilibré par classes et R est standard par classes.

L'unicité de p entraîne que la formule B22 annoncée est exacte.

B3 - DEUXIEME THEOREME DE STABILITE

Soit R un sous-réseau n-standard par classes. On suppose que R est couplé avec une station S pure par classes de taux de service  $h_k$  pour la classe k. RUS est un réseau fermé et on suppose qu'il y a N clients en circulation dans ce réseau. On rappelle que  $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$  où  $n_k$  est le nombre total de clients de classe k.

Soit  $(h_k^{**}(j))_{\substack{1 \leq k \leq K \\ 1 \leq j \leq n}}$  une suite de nombres réels strictement

positifs. On pose  $h_k^{**}(0) = 0$  pour tout k.

Soit R' le sous-réseau déduit de R de la façon suivante :

- a - Les probabilités de répartition entre stations sont les mêmes dans R' que dans R.
- b - Pour toute station  $S_i$  de R', les termes  $a'_{ik}(e)$ ,  $b'_{ik}(e)$  et  $c'_{ik}(e)$  (cf A3) sont respectivement égaux à  $a_{ik}(e) h_k^{**}(n_k - \hat{e}_k)$ ,  $b_{ik}(e) h_k^{**}(n_k - \hat{e}_k)$  et  $c_{ik}(e) h_k^{**}(n_k - \hat{e}_k)$ .

On a donc aussi, si l'on désigne par  $g'_{ik}(e)$  (resp  $g_{ik}(e)$ ) le taux de service pour la classe k de  $S_i$  dans R' (resp R),

$$g'_{ik}(e) = g_{ik}(e) h_k^{**}(n_k - \hat{e}_k).$$

Alors on obtient les résultats suivants :

- i - R' est un sous-réseau n-standard par classes, c'est-à-dire qu'il existe une station de service S' pure par classes, de taux de service  $h'_k$  telle que  $\forall k, \forall e, w'_k(e) = h'_k(s_k) p'(e)$  avec  $s_k = n_k - \hat{e}_k$

ii - 
$$p'(e) = c p(e) \left( \prod_{i=1}^{\hat{e}_1} \frac{h'_1(n_1+1-i)}{h_1^{**}(n_1-i)} \right) \dots \left( \prod_{i=1}^{\hat{e}_k} \frac{h'_k(n_k+1-i)}{h_k^{**}(n_k-i)} \right) \dots$$

$$\left( \prod_{i=1}^{\hat{e}_K} \frac{h'_K(n_K+1-i)}{h_K^{**}(n_K-i)} \right)$$

où  $\hat{e}_k$  est le nombre de clients de classe  $k$  dans  $R$  quand il est dans l'état  $e$ ,  $p(e)$  est la probabilité naturelle de  $R$  et  $p'(e)$  la probabilité stationnaire de  $R'$ .

Les états  $e$  qui interviennent dans cette formule sont tels que  $\forall k \hat{e}_k \neq n_k$  et ainsi  $h_k^*(n_k - i) \neq 0 \quad \forall k, \forall i$ .

Dans le cas où  $\hat{e}_k = n_k$  on peut remarquer que

$$p'(0, s_2, \dots, s_K) = 1 - \sum_{i=1}^{n_1} p'(i, s_2, \dots, s_K)$$

Dans le cas d'un état comprenant plusieurs composantes nulles, on itère ce procédé.

On peut ainsi obtenir  $p'(e)$  pour tout état  $e$  de  $R$ .

### DEMONSTRATION

Supposons que la probabilité  $p$  satisfait à l'égalité

$$\forall e \in E, \forall k \in [1, K] \quad w_k(e) = h_k(s_k).p(e) = p(e) \quad \text{car} \quad h_k(s_k) = 1$$

$$\text{Posons } l_k(q) = \prod_{i=1}^q \frac{h'_k(n_k+1-i)}{h_k^*(n_k-i)}$$

On a

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^m p'(e+f_{ik}) b'_{ik}(e+f_{ik}) = \sum_{i=1}^m c p(e+f_{ik}) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k+1) l_K(\hat{e}_K) b_{ik}(e+f_{ik}) h_k^*(n_k - \hat{e}_k - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} w'_k(e) &= c w_k(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k+1) \dots l_K(\hat{e}_K) h_k^*(n_k - \hat{e}_k - 1) \\ &= c p(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k) \cdot \frac{h'_k(n_k - \hat{e}_k)}{h_k^*(n_k - \hat{e}_k - 1)} \cdot \dots l_K(\hat{e}_K) \cdot h_k^*(n_k - \hat{e}_k - 1) \end{aligned}$$

$$w'_k(e) = p'(e) \cdot h'_k(n_k - \hat{e}_k)$$

d'où  $\forall k \in [1, K]$  et  $\forall e \in E$

$$w'_k(e) = h'_k(s_k) \cdot p'(e)$$

ce qui démontre (i).

De plus on a

$$\forall k \in [1, K] \text{ et } \forall e \in E$$

$$\begin{aligned} U'_k(e) &= \sum_{i,j=1}^m p'(e-f_{ik}+f_{jk}) d'_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk}) \\ &= \sum_{i,j=1}^m c p(e-f_{ik}+f_{jk}) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k) l_K(\hat{e}_K) d'_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk}) h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k) \end{aligned}$$

$$\underline{U'_k(e) = C U_k(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k) \dots l_K(\hat{e}_K) h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k)}$$

de même

$$\begin{aligned} V'_k(e) &= \sum_{i=1}^m p'(e-f_{ik}) C'_{ik}(e-f_{ik}) = \sum_{i=1}^m c p(e-f_{ik}) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k - 1) \dots \\ &\quad l_K(\hat{e}_K) C'_{ik}(e-f_{ik}) h^{*}_k(n_k + 1 - \hat{e}_k) \end{aligned}$$

$$\underline{V'_k(e) = C V_k(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k - 1) \dots l_K(\hat{e}_K) h^{*}_k(n_k + 1 - \hat{e}_k)}$$

donc :

$$p'(e) \sum_{i=1}^m (a'_{ik}(e) + b'_{ik}(e)) = c p(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k) \dots l_K(\hat{e}_K) \left[ \sum_{i=1}^m (a_{ik} + b_{ik})(e) \right] h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k)$$

$$= C U_k(e) l_1(\hat{e}_1) \dots l_k(\hat{e}_k) \dots l_K(\hat{e}_K) h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k) + v'_k(e) \cdot \frac{h'(n_k + 1 - \hat{e}_k)}{h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k)}$$

$$h^{*}_k(n_k - \hat{e}_k)$$

$$= U'_k(e) + v'_k(e) h'(n_k + 1 - \hat{e}_k)$$

ce qui prouve que  $p'$  satisfait à la condition d'équilibre par classes, donc  $p'$  est la probabilité stationnaire.

$\tilde{R}' = R'US'$  est donc équilibré par classes et  $R'$  est standard par classes.

B4 - FLUX DE SORTIE CONDITIONNEL DE CLIENTS D'UNE CLASSE k.

Soit R un sous-réseau propre et  $\bar{R}$  le réseau fermé constitué de R et d'une station S dont le taux de service  $g_k(e)$  pour la classe k peut dépendre de l'état e de R.

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble E des états de R. On définit le flux de sortie conditionnel  $v_k(A)$  de clients de la classe k de R sachant que R est dans l'un des états de A par

$$\text{B41 - } v_k(A) = \left\{ \sum_{e \in A} p(e) \sum_{i=1}^m b_{ik}(e) \right\} \frac{1}{\sum_{e \in A} p(e)}$$

Si S est une station pure par classes, si R est un sous réseau  $\eta$ -standard par classes et si

$A = \{e \in E, \forall k, \sum_{i=1}^m e_{ik} = N_k\}$  où  $(N_k)_{1 \leq k \leq K}$  est une famille d'entiers positifs fixes, alors le théorème de stabilité montre que  $v_k(A)$  ne dépend pas du taux de service pour la classe k dans la station S.

PREUVE - Soit un autre taux de service  $h'_k(j)$ , alors le 2ème membre de B41 devient :

$$\left\{ \sum_{e \in A} p'(e) \sum_{i=1}^m b_{ik}(e) \right\} \frac{1}{\sum_{e \in A} p'(e)} =$$

$$\frac{\sum_{e \in A} cp(e) \left[ \prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)} \right] \sum_{i=1}^m b_{ik}(e)}{\sum_{e \in A} cp(e) \left( \prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \dots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)} \right)}$$

or chaque terme  $s_k$  vaut  $n_k - N_k$  et est donc indépendant de  $e \in A$ , l'expression précédente vaut donc :

$$\frac{\sum_{e \in A} \left( cp(e) \sum_{i=1}^m b_{ik}(e) \right)}{\sum_{e \in A} cp(e)}$$

C - COMPOSITION DE RESEAUX

C1 - DEFINITION D'UNE STATION n-ECHANGEABLE PAR CLASSES

Soit R un réseau propre comprenant m stations. On note  $\bar{R}$  le réseau fermé RUS, S étant une station dont le taux de service de la classe k est  $g_k(e)$  où e désigne un état de R.

On suppose qu'il y a N clients en circulation dans  $\bar{R}$  dont un état fondamental est noté  $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m, e_s)$  où  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$  caractérise l'état de  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $e_s$  est l'état de S.

$$\text{On rappelle que } w_k(e) = \sum_{i=1}^m p(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik}) \text{ et on dit}$$

que S est n-échangeable par classes dans  $\bar{R}$  si

C11 -

$$(\forall e \in E) (\forall k \in [1, K]), w_k(e) = g_k(e) \cdot p(e)$$

Cette condition signifie que le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par arrivée d'un client de classe k dans le réseau R.

Dans le cas où le réseau  $\bar{R}$  est équilibré par classes, on voit aisément que la condition C11 est équivalente à :

C12 -

$$(\forall e \in E) (\forall k \in [1, K]), u_k(e) + z_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik}(e) + b_{ik}(e))$$

C2 - THEOREME FONDAMENTAL

Soit R un réseau fermé contenant N clients et composé de 2 sous réseaux propres R' et R'' ; on considère les réseaux fermés  $\bar{R}' = R'US'$  et  $\bar{R}'' = R''US''$  où S' (resp. S'') est une station n-échangeable par classes dans le réseau  $\bar{R}'$  (resp.  $\bar{R}''$ ). On suppose que  $\bar{R}'$  et  $\bar{R}''$  sont équilibrés par classes (cf A5). On rappelle que  $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$  et  $N = \sum_{k=1}^K n_k$ . On considère en outre les hypothèses suivantes :

- a - Dans R le taux de service pour la classe k de la station  $S_i$  de R' (resp. R'') est égal au taux de service pour la classe k de  $S_i$  dans R' (resp. R'') multiplié par le taux de service de S'' pour la classe k.

Ce qui s'écrit encore :  $g_{ik}(e) = g'_{ik}(e').g''_k(e'')$ .

b - Dans R les probabilités de répartition entre stations à l'intérieur de R' ou de R'' sont les mêmes que dans les réseaux initiaux R' et R''.

c - Dans R, la probabilité  $r_{ij,k}$ , pour un client de classe k qui quitte une station  $S_i$  de R' (resp. R''), d'aller dans  $S_j$  de R'' (resp. R') est égale au produit de la probabilité pour ce client de classe k qui quitte  $S_i$  de quitter R' multipliée par la probabilité pour un client de classe k qui rentre dans R'' d'aller dans la station  $S_j$  de R'',

ou encore :  $r_{ij,k}(e) = b'_{ik}(e').c''_{jk}(e'')$ .

Alors on a les résultats suivants :

$$1^{\circ}) p(e) = cp'(e')p''(e'')$$

où  $p(e)$  (resp.  $p'(e')$ ,  $p''(e'')$ ) est la probabilité stationnaire, pour le réseau R (resp.  $\bar{R}'$ ,  $\bar{R}''$ ) d'être dans l'état  $e = (e', e'')$  (resp.  $(e', n-e')$  ( $e'', n-e''$ )).

2<sup>o</sup>) Le réseau R est équilibré par classes.

3<sup>o</sup>) Si  $S_i$  est une station échangeable par classes dans  $\bar{R}'$  ou  $\bar{R}''$ , elle est encore échangeable par classes dans R.

#### PREUVE -

Soit  $e = (e', e'')$  un état de R. Dans R on note  $M'$  (resp.  $M''$ ) l'ensemble des indices des stations qui appartiennent à R' (resp. R''). On suppose que R' (resp. R'') comprend  $m'$  (resp.  $m''$ ) stations ; on a donc  $m' + m'' = m$ .

Les termes  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  et  $c_{ik}$  définis en A3 seront notés  $a'_{ik}$ ,  $b'_{ik}$ ,  $c'_{ik}$  (resp.  $a''_{ik}$ ,  $b''_{ik}$ ,  $c''_{ik}$ ) s'ils sont associés à R' (resp. R'').

De même, on définit  $u'$ ,  $w'$ ,  $z'$ ,  $p'$  (resp.  $u''$ ,  $w''$ ,  $z''$ ,  $p''$ ) relativement à R' (resp. R'') comme en A4.

On note  $x_k(e)$  (resp.  $y_k(e)$ ) le taux de probabilité pour la probabilité  $p$  d'atteindre (resp. de quitter) l'état  $e$  par déplacement d'un client de classe k dans R.

On note  $x(e)$  (resp.  $y(e)$ ) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état  $e$  par déplacement d'un client dans R.

On a donc  $x(e) = \sum_{k=1}^K x_k(e)$  et  $y(e) = \sum_{k=1}^K y_k(e)$ .

Le réseau étant supposé markovien ergodique, la probabilité stationnaire  $p$  est la seule telle que  $x(e) = y(e)$ .

Montrons d'abord que si l'on pose  $p(e) = cp'(e')p''(e'')$  on obtient  $x_k(e) = y_k(e)$  pour tout  $k$  et pour tout  $e$ .

$$x_k(e) = x'_k(e) + x''_k(e) + cu'_k(e')g''_k(e'')p''(e'') + cu''_k(e'')g'_k(e')p'(e')$$

avec

$$\begin{aligned} x'_k(e) &= \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} cp'(e'+f'_{ik})p''(e''-f''_{jk})b'_{ik}(e'+f'_{ik})g''_k(e''-f''_{jk})c'_{jk}(e''-f''_{jk}) \\ &= c \left( \sum_{i \in M'} p'(e'+f'_{ik})b'_{ik}(e'+f'_{ik}) \right) \left( \sum_{j \in M''} p''(e''-f''_{jk})g''_k(e''-f''_{jk}) \right. \\ &\quad \left. c''_{jk}(e''-f''_{jk}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } x'_k(e) = c w'_k(e') z''_k(e'')$$

de même

$$x''_k(e) = \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} p(e-f'_{ik}+f''_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk})g'_k(e'-f'_{ik})c'_{ik}(e'-f'_{ik})$$

$$\begin{aligned} x''_k(e) &= c \left( \sum_{j \in M''} p''(e''+f''_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk}) \right) \left( \sum_{i \in M'} p'(e'-f'_{ik})g'_k(e'-f'_{ik}) \right. \\ &\quad \left. c'_{ik}(e'-f'_{ik}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } x''_k(e) = c w''_k(e'') z'_k(e')$$

On décompose ensuite  $y_k(e)$  sous la forme  $y'_k(e) + y''_k(e)$

$$\text{avec } y'_k(e) = p(e)g''_k(e'') \sum_{i \in M'} (a'_{ik} + b'_{ik})(e')$$

$$\text{et } y''_k(e) = p(e)g'_k(e') \sum_{j \in M''} (a''_{jk} + b''_{jk})(e'')$$

Par ailleurs, puisque  $S'$  (resp.  $S''$ ) est échangeable par classes dans  $\bar{R}'$  (resp.  $\bar{R}''$ ) on a :

$$(C.2.1) \quad w'_k(e') = g'_k(e')p'(e')$$

$$(C.2.2) \quad w''_k(e'') = g''_k(e'')p''(e'')$$



et aussi, puisque  $\bar{R}'$  et  $\bar{R}''$  sont équilibrés par classes :

$$(C.2.3) \quad u'_k(e') + z'_k(e') = p'(e') \sum_{i \in M'} (a'_{ik} + b'_{ik})(e')$$

$$(C.2.4) \quad u''_k(e'') + z''_k(e'') = p''(e'') \sum_{j \in M''} (a''_{jk} + b''_{jk})(e'')$$

En reportant C.2.1 dans  $x'_k(e)$  et C.2.2 dans  $x''_k(e)$  puis les résultats obtenus dans  $x_k(e)$ , on obtient :

$$x_k(e) = c p'(e') g'_k(e) z''_k(e'') + p''(e'') g''_k(e'') z'_k(e') + p''(e'') g''_k(e'') u'_k(e') + p'(e') g'_k(e') u''_k(e'')$$

de même en reportant C.2.3 et C.2.4 dans  $y'_k(e)$  et  $y''_k(e)$  on obtient :

$$y_k(e) = c (p''(e'') g''_k(e'') [u'_k(e') + z'_k(e')] + p'(e') g'_k(e') [u''_k(e'') + z''_k(e'')])$$

d'où  $\forall e$  et  $\forall k$ ,  $x_k(e) = y_k(e)$  et par suite  $x(e) = y(e)$ .

Ce qui démontre que la formule de  $p$  annoncée est la bonne puisqu'il y a unicité.

De plus on a obtenu que  $R$  est équilibré par classes.

Soit une station  $S_i$  du sous réseau  $R'$  qui est échangeable dans  $\bar{R}'$  pour la classe  $k$ . Posons  $M_1 = M' - \{i\}$ , soit  $e$  un état de  $R$  ; dans  $R$ , pour la probabilité stationnaire  $p(e) = c p'(e') p''(e'')$  le taux de probabilité  $w_{ik}(e)$  d'atteindre l'état  $e$  par arrivée d'un client de classe  $k$  dans la station  $S_i$  est

$$\begin{aligned} w_{ik}(e) &= \sum_{i' \in M_1} p(e + f_{i',k} - f_{ik}) g'_{i',k}(e' + f'_{i',k} - f'_{ik}) g''_k(e'') r'_{i',i,k}(e' + f'_{i',k} - f'_{ik}) \\ &\quad + \sum_{j \in M''} p(e + f_{jk} - f_{ik}) b''_{jk}(e'' + f''_{jk}) g'_k(e' - f'_{ik}) c'_{ik}(e' - f'_{ik}) \\ &= c p''(e'') g''_k(e'') \sum_{i' \in M_1} (p' g'_{i',k} r'_{i',i,k})(e' + f'_{i',k} - f'_{ik}) \\ &\quad + c (p' g'_k c'_{ik})(e' - f'_{ik}) \sum_{j \in M''} p''(e'' + f''_{jk}) b''_{jk}(e'' + f''_{jk}) \end{aligned}$$

$S''$  étant échangeable pour la classe  $k$  dans  $\bar{R}''$  on a :

$$w''_k(e'') = \sum_{j \in M''} p''(e'' + f''_{jk}) b''_{jk}(e'' + f''_{jk}) = p''(e'') g''_k(e'')$$

d'où

$$w_{ik}(e) = c p''(e'') g''_k(e'') \left[ \sum_{i' \in M_1} (p' g'_{ik} r'_{i',i,k})(e' + f'_{ik} - f'_{i'k}) \right. \\ \left. + (p' g'_{ik} c'_{ik})(e' - f'_{ik}) \right] \\ = c p''(e'') g''_k(e'') w'_{ik}(e').$$

Mais la station  $S_i$  est échangeable pour la classe  $k$  dans  $\bar{R}'$ ,

$$d'où \quad w'_{ik}(e') = p'(e') g'_{ik}(e')$$

et on en déduit que

$$w_{ik}(e) = p(e) g''_k(e'') g'_{ik}(e') = p(e) g_{ik}(e)$$

ce qui signifie que la station  $S_i$  est échangeable pour la classe  $k$  dans  $R$  et achève la démonstration du théorème.

### C3 - THEOREME GENERAL

Soit  $\hat{R}$  un réseau fermé markovien ergodique.

On note  $\{S_m\}_{m=1, \dots, M}$  l'ensemble des stations de service de ce réseau.

Soit  $\{I, J, L\}$  une partition de  $\{1, \dots, M\}$ .

On suppose que pour tout élément  $m$  de  $J \cup L$ , la station  $S_m$  est échangeable par classes dans  $\hat{R}$ .

On suppose que, pour tout  $j$  de  $J$  et pour tout  $k$  de  $[1, K]$ , le taux de service  $h_{jk}(e_{jk})$  de  $S_j$  pour la classe  $k$  ne dépend que du nombre  $e_{jk}$  de clients de classe  $k$  dans  $S_j$ , autrement dit  $S_j$  est pure par classes.

A cette suite  $\{S_j\}_{j \in J}$  on associe une suite  $\{R_j\}_{j \in J}$  de sous réseaux standards par classes et on note  $p_j(\xi_j)$  la probabilité naturelle pour le sous réseau  $R_j$  d'être dans l'état  $\xi_j$ . Par ailleurs, on considère une suite  $\{R_l\}_{l \in L}$  de sous réseaux propres et une suite associée  $\{S'_l\}_{l \in L}$  de stations dont le taux de service  $g'_{lk}(\epsilon_l)$  pour la classe  $k$  peut dépendre de l'état du réseau  $R_l$  associé.

Pour tout  $l$  de  $L$ , on note  $\bar{R}_l$  le réseau fermé constitué de  $R_l$  et de  $S'_l$  et comprenant  $N$  clients en circulation.

On suppose aussi que pour tout  $l$  de  $L$ ,  $\bar{R}_1$  est markovien ergodique, que  $S'_1$  est  $n$ -échangeable par classes dans  $\bar{R}_1$  et que  $\bar{R}_1$  est équilibré par classes.

On note  $p'_1(\epsilon_1)$  la probabilité stationnaire pour le réseau  $\bar{R}_1$  d'être dans l'état  $(\epsilon_1, e'_1)$ .

On étudie alors le réseau  $R$  déduit de  $\hat{R}$  de la façon suivante :

- a - Il y a  $N$  clients dans le réseau fermé  $R$
- b - Dans  $\hat{R}$  on remplace chaque station  $S_m$ , pour  $m \in JUL$  par le sous-réseau  $R_m$  associé, un état  $e$  de  $R$  est alors caractérisé par les états  $\{e_m\}_{m \in I}$  associés de  $S_m$  si  $m \in I$  et  $\{\epsilon_m\}_{m \in JUL}$  de  $R_m$  si  $m \in JUL$ .

On note  $e_{mk}$  le nombre de clients de classe  $k$  dans  $S_m$  si  $m \in I$  ou dans  $R_m$  si  $m \in JUL$ . Quand l'état de  $R_m$  est  $\epsilon_m$  on pose  $\hat{e} = (e_1, \dots, e_M)$

où  $e_m = (e_{m1}, \dots, e_{mk}, \dots, e_{mK})$

$\hat{e}$  est donc un état de  $\hat{R}$ .

- c - Les probabilités "de répartition" entre les diverses stations de  $R$  sont définies à partir de celles définies dans  $\hat{R}$  et dans les sous-réseaux  $R_m$

Par exemple, la probabilité, pour un client de classe  $k$  qui quitte la station  $X$  du sous-réseau  $R_m$ , d'aller dans la station  $Y$  du sous-réseau  $R_q$  avec  $m \neq q$ ,  $m \in JUL$  et  $q \in JUL$  est égale au produit  $x_k(\epsilon_m)y_k(\epsilon_q)z_k(\hat{e})$  si l'état du réseau  $R$  est  $e$ .

Les termes  $x_k(\epsilon_m)$ ,  $y_k(\epsilon_q)$  et  $z_k(\hat{e})$  sont définis par  $x_k(\epsilon_m)$  = probabilité, pour un client de classe  $k$  qui quitte la station  $X$  de sortir du sous-réseau  $R_m$  quand celui-ci est dans l'état  $\epsilon_m$ .

$y_k(\epsilon_q)$  = probabilité, pour un client de classe  $k$  qui rentre dans le sous-réseau  $R_q$  d'aller dans la station  $Y$  si le sous-réseau  $R_q$  est dans l'état  $\epsilon_q$ .

$z_k(\hat{e})$  = probabilité, dans le réseau  $\hat{R}$  pour un client de classe  $k$  qui quitte la station  $S_m$  (de  $\hat{R}$ ) d'aller dans la station  $S_q$  (de  $\hat{R}$ ) si  $\hat{R}$  est dans l'état  $\hat{e}$ .

- d - Pour tout état  $e$  de  $R$  et pour toute station  $X$  de  $R$ , le taux de service  $g_{Xk}(e)$  de la classe  $k$  dans  $X$  quand  $R$  est dans l'état  $e$  est défini par :

$$** \text{ si } X = S_i \text{ (} i \in I \text{)} \quad g_{xk}(e) = \hat{g}_{ik}(\hat{e}) \prod_{l \in L} g'_{lk}(\epsilon_l)$$

où  $\hat{g}_{ik}(\hat{e})$  est le taux de service de  $S_i$  pour la classe  $k$  dans le réseau  $\hat{R}$  si celui-ci est dans l'état  $\hat{e}$ .

\*\*\* si  $X$  appartient au sous-réseau  $R_j$ , avec  $j \in J$

$$g_{xk}(e) = g_{xk}^j(\epsilon_j) \hat{g}_{jk}(\hat{e}) \prod_{l \in L} g'_{lk}(\epsilon_l)$$

où  $g_{xk}^j(\epsilon_j)$  est le taux de service pour la classe  $k$  de la station  $X$  dans le sous-réseau  $R_j$  si ce sous-réseau est dans l'état  $\epsilon_j$ .

\*\*\*\* Si  $X$  appartient au sous-réseau  $R_1$  avec  $l \in L$ ,

$$g_{xk}(e) = g_{xk}^1(\epsilon_1) \hat{g}_{lk}(\hat{e}) \prod_{\substack{m \in L \\ m \neq 1}} g'_{mk}(\epsilon_m)$$

Soit  $p(e)$  (resp.  $\hat{p}(\hat{e})$ ) la probabilité stationnaire pour le réseau  $R$  (resp.  $\hat{R}$ ) d'être dans l'état  $e$  (resp.  $\hat{e}$ ), on a alors :

$$p(e) = c \hat{p}(\hat{e}) \prod_{j \in J} p_j(\epsilon_j) \prod_{l \in L} p'_l(\epsilon_l)$$

où  $c$  est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état  $e$  de  $R$ .

DEMONSTRATION : On applique le théorème C2.

On considère d'abord  $l \in L$  et on remplace la station  $S_1$  de  $\hat{R}$  par le sous-réseau  $R_1$  comme indiqué en C2 à partir de  $\bar{R}_1$ . Si  $j \in J$  on fait de même en prenant comme réseau  $\bar{R}_j$  le réseau  $n$ -naturel associé à  $R_j$ .

D - RESEAU PARFAIT PAR CLASSES

D1 - DEFINITION

Soit R un réseau markovien ergodique constitué de m stations pures par classes  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ .

On notera M l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

$\forall i = 1, \dots, m$  on note  $h_{ik}(e_{ik})$  le taux de service de la station  $S_i$  pour la classe k quand il y a  $e_{ik}$  clients de classe k dans cette station.

Chaque état du réseau R est caractérisé par un m-uple  $e = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_m)$  où  $e_i$  représente l'état de la station  $S_i$ , donc  $e_i$  est un K-uple  $(e_{i1}, \dots, e_{ik}, \dots, e_{iK})$ ,  $e_{ik}$  étant le nombre de clients de classe k dans la station i.

On note  $r_{ij,k}(e)$  la probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station i, d'aller dans la station j si l'état du réseau R est e.

On dit que ce réseau est parfait par classes s'il satisfait à la condition :  $(\forall j \in M) (\forall e \in E) (\forall k \in K)$

$$D11 - \quad h_{jk}(e_{jk}) = \sum_{i=1}^m h_{ik}(e_{ik}+1) r_{ij,k}(e+f_{ik}-f_{jk})$$

On dira que R est quasi-parfait par classes s'il existe des taux de service  $(h_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq K}}$  tels que, pour ces taux de service R soit un réseau parfait par classes.

D2 - PROBABILITE STATIONNAIRE

La probabilité stationnaire d'un réseau parfait par classes est la probabilité équidistribuée.

DEMONSTRATION :

Considérons a priori la probabilité équidistribuée p.

Soit  $e$  un état de  $R$ ; le taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par déplacement d'un client de classe  $k$  est :

$$p(e) \sum_{j=1}^m h_{jk}(e_{jk})$$

Le taux de probabilité d'atteindre l'état  $e$  par déplacement d'un client de classe  $k$  est :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m h_{ik}(e_{ik}+1) r_{ij,k}(e+f_{ik}-f_{jk}) p(e+f_{ik}-f_{jk})$$

L'égalité D11 entraîne que ces expressions sont égales si  $p$  est la probabilité équidistribuée.

En sommant ensuite sur  $k$  on obtient que le taux de probabilité de quitter un état  $e$  est égal au taux de probabilité d'atteindre cet état  $e$ .

Donc, d'après le théorème ergodique, la probabilité équidistribuée est bien la probabilité stationnaire.

### D3 - INTERPRETATION "PHYSIQUE"

Un réseau  $R$  est parfait par classes si :

- a - La proba. stationnaire de  $R$  est la proba. équidistribuée.
- b - En régime stationnaire, chaque station  $S_i$  de  $R$  satisfait à la condition de "balance locale par classes", c'est-à-dire que pour chaque état  $e$ , pour chaque classe  $k$  de clients et pour chaque station  $S_i$ , le taux de proba. d'atteindre l'état  $e$  par arrivée d'un client de classe  $k$  dans la station  $S_i$  est égal au taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par départ d'un client de classe  $k$  de la station  $S_i$ .

Cette condition b signifie que pour chaque station  $S_i$ , le sous-réseau  $R \setminus S_i$  est standard par classes.

### D4 - EXEMPLE DE RESEAU PARFAIT PAR CLASSES

Soit  $R$  un réseau fermé. On suppose que les probabilités  $r_{ij,k}$  de répartition entre stations *ne dépendent pas de l'état  $e$*  du réseau  $R$ . Alors  $R$  est quasi-parfait par classes.

Plus précisément soit, pour tout  $k$  de  $[1, K]$ ,  $X_k = (x_{1k}, \dots, x_{qk})$  une matrice uni-ligne à termes positifs telle que  $X_R \check{R}_k = X_k$  où  $\check{R}_k$

désigne la matrice de terme général  $r_{ij,k}$ . Une telle matrice existe d'après le théorème ergodique.

$\forall i \in [1, M]$ , on pose  $h_{ik}(0) = 0$  et  $h_{ik}(j) = x_{ik}$  si  $j \geq 1$  et on suppose que la station  $S_i$  admet  $h_{ik}$  comme taux de service pour la classe  $k$ . Alors, pour ces taux de service, le réseau  $R_k$  est parfait par classes, comme on le voit aisément en utilisant D11.

#### D5 - STATIONS DUALES PAR CLASSES

Soient 2 stations pures par classes  $S$  et  $S'$  de taux de service respectifs  $(h_k)_{k \in [1, K]}$  et  $(h'_k)_{k \in [1, K]}$ .

On dit que ces stations sont duales l'une de l'autre par classes si

$$\forall j, 1 \leq j \leq N \quad \text{et} \quad \forall k, 1 \leq k \leq K$$

on a l'égalité  $h_k(j) = h'_k(n_k + 1 - j)$

où  $n_k$  est le nombre total de clients de classe  $k$  dans le réseau  $R$ .

#### D6 - THEOREME DE SUBSTITUTION

Soient 2 réseaux ouverts  $R'$  et  $R''$  et 2 stations pures par classes  $S'$  et  $S''$  que l'on suppose duales l'une de l'autre par classes. On suppose que les réseaux fermés  $\bar{R}' = (R', S')$  et  $\bar{R}'' = (R'', S'')$  sont parfaits par classes. Alors le réseau fermé  $R = (R', R'')$  est un réseau parfait par classes. Autrement dit, dans  $\bar{R}'$  on peut remplacer  $S'$  par  $R''$  et obtenir encore un réseau parfait par classes.

#### DEMONSTRATION :

Ce théorème est en fait un corollaire des théorèmes B8 et C2 mais nous pouvons en donner une preuve directe pour le lecteur qui ne s'intéresse qu'à ce cas particulier. Chaque état  $e'$  de  $R'$  est caractérisé par un  $m'$ -uple  $e' = (e'_1, \dots, e'_m)$  où  $e'_i$  désigne l'état de la station  $S'_i$  de  $R'$ .

$e'_i$  est un  $K$ -uple  $(e'_{i1}, \dots, e'_{ik}, \dots, e'_{iK})$  où  $e'_{ik}$  est le nombre de clients de classe  $k$  dans la station  $S'_i$ . Le nombre de stations de  $R'$  est  $m'$ .

On pose  $n'_k = \sum_{i=1}^{m'} e'_{ik}$  et on note  $h'_{ik}(e'_{ik})$  le taux de service de la station  $S'_i$  pour la classe  $k$  s'il y a  $e'_{ik}$  clients de classe  $k$  dans cette station.

On note  $r'_{ij,k}(e')$  pour  $1 \leq i \leq m'$  et  $1 \leq j \leq m'$ , la probabilité, pour un client de classe  $k$  qui quitte la station  $i$  de  $R'$ , d'aller dans la station  $j$  de  $R'$  si l'état de  $R'$  est  $e'$ .

On introduit exactement les mêmes notations  $h''$ ,  $e''$ ,  $r''$  pour  $S''$  et  $R''$ . De plus, on note  $r^{*}_{ik}(e')$  la probabilité pour un client de classe  $k$  qui rentre dans le sous-réseau  $R'$  d'aller dans la station  $i$  de ce sous-réseau, si ce sous-réseau est dans l'état  $e'$ .

On pose enfin  $r^{**}_{jk}(e'')$  la probabilité, pour un client de classe  $k$  qui quitte la station  $j$  du sous-réseau  $R''$ , de quitter ce sous-réseau  $R''$  si l'état de  $R''$  est  $e''$ .

Soit  $S'_j$  une station de  $R'$ . Puisque  $(R', S')$  est parfait par classes, on a :

$$D61 - (\forall e' \in E') (\forall k \in [1, K])$$

$$h'_{jk}(e'_{jk}) = \sum_{\substack{i \in M' \\ i \neq j}} h'_{ik}(e'_{ik} + 1) r'_{ij,k}(e'_{ik} + 1 - e'_{jk}) + h'_k(n'_k + 1 - n'_k) r^{*}_{jk}(e'_{jk})$$

de même, puisque  $(R'', S'')$  est parfait par classes, on a :

$$D62 - (\forall e'' \in E'') (\forall k \in [1, K])$$

$$h''_k(n''_k + 1) = \sum_{i \in M''} h''_{ik}(e''_{ik} + 1) r^{*}_{ik}(e''_{ik} + 1)$$

Soit  $e$  un état de  $R = (R', R'')$ , le nombre total de clients de classe  $k$  dans  $R$  est  $n_k$  ; soient  $e'$  et  $e''$  les états associés de  $e$ , on a  $n_k = n'_k + n''_k$ . Les stations  $S'$  et  $S''$  étant duales l'une de l'autre par classes on a  $h''_k(n''_k + 1) = h''_k(n'_k) = h'_k(n'_k + 1 - n'_k)$  et en reportant dans D61 et D62 on obtient :

$$h'_{jk}(e'_{jk}) = \sum_{i \in M'} h'_{ik}(e'_{ik} + 1) r'_{ij,k}(e'_{ik} + 1 - e'_{jk}) + \sum_{i \in M''} h''_k(e''_{ik} + 1) r^{*}_{jk}(e'_{jk}) r^{**}_{ik}(e''_{ik} + 1)$$



Cette égalité est exactement l'égalité D11 associée au réseau R dans l'état  $e = (e', e'')$  et à la station  $S'_j$  de  $R'$ .

En raisonnant de façon analogue on obtient la même égalité pour toute station  $S''_j$  de  $R''$ , ce qui prouve que le réseau R est parfait par classes.

### D7 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS FERME

Soit R un réseau fermé markovien ergodique comprenant N clients,  $n_k$  étant le nombre total de clients de classe k.

On suppose que R peut être décomposé en q sous-réseaux propres  $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$  disjoints, chaque état de R est caractérisé par un q-uple  $e = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_q)$  où  $\epsilon_i$  désigne l'état du sous-réseau  $R_i$ .

On note  $\hat{\epsilon}_{ik}$  le nombre de clients de classe k dans le sous-réseau  $R_i$ .

On note  $\hat{\epsilon}$  le "vecteur"  $(\hat{\epsilon}_{1k}, \hat{\epsilon}_{2k}, \dots, \hat{\epsilon}_{qk})$

et  $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \dots, \hat{\epsilon}_K)$

On suppose que les hypothèses suivantes sont réalisées :

a - Chaque sous-réseau  $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$  est standard par classes.

b - Pour tout couple  $(i, j)$  de  $[1, q] \times [1, q]$  et pour tout  $k \in [1, K]$ , quand un client de classe k quitte le sous-réseau  $R_i$ , la probabilité de "répartition entre sous-réseaux des clients de classe k"  $r_{ij, k}$ , pour ce client, d'aller dans le sous-réseau  $R_j$  ne dépend que de  $\hat{\epsilon}_k$ .

c - Si on note  $\hat{R}$  le réseau déduit de R en remplaçant chaque sous-réseau  $R_j$  par une station unique, avec les probabilités de répartition  $r_{ij, k}(\hat{\epsilon}_k)$ , alors ce sous-réseau est quasi-parfait par classes (cf. D1).

Il suffit alors de connaître les probabilités stationnaires de  $\hat{R}$  et les probabilités naturelles (cf B2) de chaque sous-réseau  $R_i$  pour connaître les probabilités stationnaires de R.

Plus précisément, soit  $(\hat{S}_i)_{1 \leq i \leq q}$  un ensemble de stations de service pures par classes telles que le réseau  $\hat{R}$  soit parfait par classes. Pour tout i,  $i = 1 \dots q$ , on note  $\hat{h}_{ik}$  le taux de service de la

classe k dans la station  $\hat{S}_i$  et  $p_i$  la probabilité n-naturelle de  $R_i$ .

On pose  $l_{ik}(0) = 1$  et  $l_{ik}(j) = \prod_{m=1}^j \hat{h}_{ik}(m)$  pour  $1 \leq j \leq n_k$ ,

soit  $p(e)$  la probabilité stationnaire, pour le réseau R, d'être dans l'état e, on a alors :

$$p(e) = c \prod_{i=1}^q [p_i(\epsilon_i) \left( \prod_{k=1}^K l_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik}) \right)]$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que cette probabilité p satisfait à la condition d'équilibre par classes.

Pour tout couple (i, j) d'entiers avec  $1 \leq i \leq q$  et  $1 \leq j \leq n_k$  on pose  $h_{ik}(j) = 1, \forall k \in [1, K]$  ; de plus pour tout i,  $1 \leq i \leq q$  et pour tout k,  $1 \leq k \leq K$  on pose  $h_{ik}(0) = 0$  et on note  $S_i$  la station de taux de service  $h_{ik}$  pour la classe k et  $\bar{R}_i = (R_i, S_i)$  ; on utilise également les notations  $a_{jk}^i, b_{jk}^i, c_{jk}^i$  et  $d_{j1,k}^i$  relativement au sous-réseau  $R_i$  exactement comme étaient définis  $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}$  et  $d_{j1,k}$  relativement au sous-réseau R ; de même on définit  $p_i, u_i, v_i, w_i$  relativement au couple  $(R_i, S_i)$  exactement comme étaient définis p, u, v, w relativement au couple (R, S) ;  $p_i$  est alors bien la probabilité naturelle de  $R_i$ .

Pour tout j,  $1 \leq j \leq q$ , puisque le sous-réseau  $R_j$  est standard par classes on a

D71 -  $\forall k \in [1, K], w_k^j(\epsilon_j) = h_{jk}(n_k - \hat{\epsilon}_{jk}) p_j(\epsilon_j)$

d'où aussi

D72 -  $\forall k \in [1, K] \sum_{i \in R_j} (a_{ik}^j + b_{ik}^j)(\epsilon_j) = \frac{1}{p_j(\epsilon_j)} [u_k^j(\epsilon_j) + h_{jk}(n_k + 1 - \hat{\epsilon}_{jk}) v_k^j(\epsilon_j)]$

Etant donné un état e, soit  $x'(e)$  (resp.  $y'(e)$ ) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état e pour la probabilité p.

Soit  $x'_k(e)$  (resp.  $y'_k(e)$ ) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état  $e$  pour la probabilité  $p$  par déplacement d'un client de la classe  $k$ .

Posons  $x'_k(e) = \frac{x'_k(e)}{cp(e)}$  et  $y'_k(e) = \frac{y'_k(e)}{cp(e)}$

Il suffit de montrer que  $(\forall k \in [1, K])$  et  $(\forall e \in E)$ ,  $x'_k(e) = y'_k(e)$

$$x'_k(e) = \sum_{i,j} x'_{ij,k}(e) + \sum_j \left( u_k^i(\epsilon_j) \prod_{k=1}^K f_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q [p_i(\epsilon_i) \prod_{k=1}^K f_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik})] \right)$$

or

$$\sum_{i,j} x'_{ij,k}(e) = \sum_j \sum_i \left[ \sum_{\substack{l \in R_i \\ l' \in R_j}} p(e+f_{lk}^i - f_{l'k}^j) b_{lk}^i(\epsilon_i + f_{lk}^i) c_{l'k}^j(\epsilon_j - f_{l'k}^j) r_{ij,k}(\hat{\epsilon}_k + f_{ik} - f_{jk}) \right]$$

l'état  $e+f_{lk}^i - f_{l'k}^j$  signifie qu'il y a un client de classe  $k$  de plus dans la station  $l$  du réseau  $R_i$  et un de moins dans la station  $l'$  de  $R_j$ .

Or

$$p(e+f_{lk}^i - f_{l'k}^j) = c \left[ \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i,j}}^q p_r(\epsilon_r) \left( \prod_{k=1}^K f_{rk}(\hat{\epsilon}_{rk}) \right) \right] p_i(\epsilon_i + f_{lk}^i) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K f_{is}(\hat{\epsilon}_{is}) f_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik} + f_{lk}^i)$$

$$p_j(\epsilon_j - f_{l'k}^j) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K f_{js}(\hat{\epsilon}_{js}) f_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk} - 1)$$

et

$$\sum_{l \in R_i} p_i(\epsilon_i + f_{lk}^i) b_{lk}^i(\epsilon_i + f_{lk}^i) = w_k^i(\epsilon_i)$$

et

$$\sum_{l' \in R_j} p_j(\epsilon_j - f_{l'k}^j) c_{l'k}^j(\epsilon_j - f_{l'k}^j) = v_k^j(\epsilon_j)$$

d'où

$$\sum_j \sum_i x'_{ij,k}(e) = \sum_j \sum_i \left( \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i,j}}^q p_r(\epsilon_r) \left( \prod_{k=1}^K f_{rk}(\hat{\epsilon}_{r,k}) \right) w_k^i(\epsilon_i) \left( \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K f_{is}(\hat{\epsilon}_{is}) \right) f_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik}) \right)$$

$$v_k^j(\epsilon_j) \left( \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K f_{js}(\hat{\epsilon}_{js}) \right) f_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk} - 1)$$

d'où, en divisant par  $cp(e)$ , on obtient :

$$x_k(e) = \sum_j \frac{u_k^j(\epsilon_j)}{p_j(\epsilon_j)} + \sum_j \frac{v_k^j(\epsilon_j)}{p_j(\epsilon_j) \hat{h}_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk})} \left( \sum_i \frac{w_k^i(\epsilon_i)}{p_i(\epsilon_i)} \hat{h}_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik}+1) r_{ij,k}(\hat{\epsilon}_k + f_{ik} - f_{jk}) \right)$$

de même :

$$\frac{y'_k(e)}{cp(e)} = \sum_i \left\{ \sum_j (a_{jk}^i(e) + b_{jk}^i(e)) \right\}$$

En utilisant le fait que chaque sous-réseau  $R_i$  est standard par classes, on a :

$$w_k^i(\epsilon_i) = h_{ik}(n_k - \hat{\epsilon}_{ik}) p_i(\epsilon_i)$$

et

$$\sum_j (a_{jk}^i(e) + b_{jk}^i(e)) = \frac{1}{p_i(\epsilon_i)} (u_k^i(\epsilon_i) + h_{ik}(n_k + 1 - \hat{\epsilon}_{ik}) v_k^i(\epsilon_i))$$

En reportant ces égalités dans  $x_k(e)$  et  $y_k(e)$  on obtient :

$$x_k(e) - y_k(e) = \sum_j \frac{1}{p_j(\epsilon_j)} v_k^j(\epsilon_j) z_{jk}(e)$$

où

$$z_{jk}(e) = \frac{1}{\hat{h}_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk})} \left\{ \sum_i h_{ik}(n_k - \hat{\epsilon}_{ik}) \hat{h}_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik}+1) r_{ij,k}(\hat{\epsilon}_k - f_i + f_j) \right. \\ \left. - h_{jk}(n_k + 1 - \hat{\epsilon}_{ik}) \right\}$$

Mais le réseau  $\hat{R}_j$  est parfait par classes et  $h_{jk}(i) = 1$  si  $i \neq 0$

d'où  $z_{jk}(e) = 0$  et  $x_k(e) - y_k(e) = 0$ , ce qui prouve que  $p$  est la probabilité stationnaire de  $R$ .

### D8 - CAS PARTICULIER OU LES ROUTAGES SONT FIXES

On se place ici dans la situation habituelle cf {2}, {8} où les routages sont fixes, c'est-à-dire que les termes  $r_{ij,k}$  ne dépendent pas de l'état du réseau considéré.

Soit donc R un réseau fermé markovien contenant N clients dont  $(n_k)_{1 \leq k \leq K}$  clients de classe k, les routages étant fixes.

On suppose, comme en D7 que R peut être décomposé en q sous-réseaux standards  $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$  disjoints.

Comme en D4 on note  $X_k = (x_{1k}, \dots, x_{qk})$  une matrice uni-ligne à termes positifs telle que  $X_k R_k = X_k$  où  $R_k$  désigne la matrice de terme général  $r_{ij,k}$ , soit p(e) la probabilité stationnaire pour le réseau R d'être dans l'état e ; pour tout  $i, 1 \leq i \leq q$ , soit  $p_i(\epsilon_i)$  la probabilité n-naturelle du sous-réseau  $R_i$ . On a alors :

$$\text{D8.1 - } p(e) = c \prod_{i=1}^q (p_i(\epsilon_i) \prod_{k=1}^K (x_{ik})^{\hat{\epsilon}_{ik}})$$

où  $\hat{\epsilon}_{ik}$  est le nombre de clients de classe k dans le sous-réseau  $R_i$  quand il est dans l'état  $\epsilon_i$  et c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e du réseau R.

PREUVE :

On obtient ce résultat directement à partir de D7 et D4.

D9 - THEOREME DE DECOMPOSITION : CAS OUVERT

Soit un réseau ouvert R (ou sous-réseau). Soit R' le réseau fermé constitué de R et d'une station de service S, le nombre total de clients de R' étant N. On suppose que R' admet une décomposition en sous-réseaux propres  $(R_i)_{1 \leq i \leq q+1}$  disjoints, telle que  $R_{q+1} = S$  et que toutes les conditions (a, b, c) du théorème D7 soient satisfaites. Alors R est standard par classes (cf B1). De plus, soit p(e) la probabilité naturelle (cf B2) pour le sous-réseau R d'être dans l'état e ; pour tout i,  $1 \leq i \leq q$ , soit  $p_i(\epsilon_i)$  la probabilité naturelle pour le sous-réseau  $R_i$  d'être dans l'état  $\epsilon_i$ .

Soit  $(\hat{h}_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq K}}$  une famille de taux de service qui rend  $\hat{R}'$

parfait par classes (cf D1 et D7-c)  $\hat{h}_{q+1,k}$  désignant le taux de service pour la classe k de la station  $S_{q+1}$  associée à "l'extérieur"  $R_{q+1} = S$ . Pour tout état e de R, on pose

$$e_k^* = \sum_{i=1}^q \hat{\epsilon}_{ik}$$

On a alors :

$$p(e) = c \prod_{i=1}^q [p_i(\epsilon_i) \left( \prod_{k=1}^K l_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik}) \right)] \left( \prod_{k=1}^K l_{q+1,k}(\epsilon_k - e_k^*) \right)$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e et où  $l_{ik}(j) = \prod_{m=1}^j \hat{h}_{ik}(m)$ .

PREUVE :

Soit  $p'(e)$  la probabilité stationnaire, pour le réseau  $R' = \text{RUS}_{q+1}$  d'être dans l'état  $(e, N - e^*)$ , le taux de service de la station  $S_{q+1}$  pour la classe k étant  $h_{q+1,k}$ .

Le théorème D7 dit que

$$p'(e) = c' \prod_{i=1}^q [p_i(\epsilon_i) \prod_{k=1}^K l_{ik}(\hat{\epsilon}_{ik})]$$

puisque la probabilité n-naturelle  $p_{q+1}(\epsilon_{q+1}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^K l_{q+1,k}(\hat{\epsilon}_{q+1,k})}$

Il reste à vérifier que l'égalité A51 est satisfaite relativement à la probabilité  $p'$  et pour tout état e.

$$w'_k(e) = \sum_{m=1}^q \sum_{i \in R_m} p'(e + f_{ik}^m) b_{ik}^m(\epsilon_m + f_{ik}) r_{m,q+1}(\hat{\epsilon}_k + f_m - f_{q+1})$$

or

$$p'(e + f_{ik}^m) = c' \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^q l_{jk}(\hat{\epsilon}_{jk}) p_j(\epsilon_j) \right] [p_m(\epsilon_m + f_{ik}^m)] \left( \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K l_{ms}(\hat{\epsilon}_{ms}) \right) l_{mk}(\hat{\epsilon}_{mk} + 1)$$

et  $\sum_{i \in R_m} p_m(\epsilon_m + f_{ik}^m) b_{ik}^m(\epsilon_m + f_{ik}) = w_k^m(\epsilon_m)$

d'où, en reportant dans  $w'_k(e)$  on obtient :

$$w'_k(e) = p'(e) \sum_{m=1}^q \frac{1}{p_m(\epsilon_m)} w_k^m(\epsilon_m) \frac{l_{mk}(\hat{\epsilon}_{mk} + 1)}{l_{mk}(\hat{\epsilon}_{mk})} r_{m,q+1,k}(\hat{\epsilon}_k + f_m - f_{q+1})$$

or, puisque  $R_m$  est standard par classes on a  $w_k^m(\epsilon_m) = p_m(\epsilon_m)$

d'où

$$w'_k(e) = p'(e) \sum_{m=1}^q \hat{h}_m(\hat{e}_{mk} + 1) r_{m,q+1,k}(\hat{e}_k + f_m)$$

c'est-à-dire encore :

$w'_k(e) = p'(e) \hat{h}_{q+1}(n_k - e_k)$  puisque  $\hat{R}'$  est parfait par classes. Le réseau  $R'$  est alors standard par classes et on peut appliquer le théorème D7.

## E - EXTENSION AU CAS DE LOIS NON EXPONENTIELLES.

### E1 - ETUDE D'UN CAS AVEC UNE SEULE CLASSE DE CLIENTS.

Ce cas et le corollaire qui suit m'ont été signalés par J. Pellaumail.

Soit  $R$  un réseau fermé contenant  $N$  clients et composé de  $N+1$  stations  $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ . On se donne également une suite  $(a_i)_{1 \leq i \leq N}$  de nombres réels strictement positifs.

Les stations  $S_i$  pour  $1 \leq i \leq N$  sont toutes identiques. Un client qui quitte l'une de ces stations va nécessairement dans la station  $S_0$ , chaque station  $S_i$  reçoit au plus un client.

Un état du réseau sera déterminé par le nombre  $j$  de stations  $S_i$  occupées pour  $1 \leq i \leq N$  ou ce qui revient au même par le nombre  $N-i$  de clients dans la station  $S_0$ . Un client qui quitte la station  $S_0$  va dans l'une des autres stations non occupées avec la probabilité équilibrée c'est-à-dire que la probabilité d'aller dans la station  $S_i$  vaut  $\frac{1}{N-j}$  si cette station est vide et s'il y a  $N-j$  clients dans  $S_0$ ; la probabilité d'aller dans une station déjà occupée est nulle.

Le taux de service de la station  $S_0$  est égal à 1; le taux de service d'une station  $S_i$  avec  $1 \leq i \leq N$  vaut  $a_j$  s'il y a  $j$  stations  $S_i$  qui sont occupées (et si la station considérée est elle-même occupée). Les stations  $S_i$  pour  $1 \leq i \leq N$  ne sont donc pas pures puisque leurs taux de service dépendent de l'état des autres stations.

Alors pour un tel réseau les stations sont échangeables, de plus si l'on note  $p(j)$  la probabilité stationnaire pour qu'il y ait  $N-j$  clients dans  $S_0$  et  $j$  stations  $S_i$  (pour  $1 \leq i \leq N$ ) occupées, alors  $p(j) = c \frac{(N-j)!}{N!} \frac{1}{f(j)}$  où  $f(j) = \prod_{i=1}^j a_i$  et  $c$  est la constante de normalisation. La probabilité  $q(j)$  d'avoir  $N-j$  clients dans  $S_0$  vaut donc :

$$c_N^j p(j) = c \frac{1}{j!} \frac{1}{f(j)}$$

VERIFICATION

Soit  $e$  un état élémentaire tel que le nombre de stations  $S_i$  avec  $1 \leq i \leq N$  occupées soit égal à  $j$ , c'est-à-dire que le nombre de clients dans  $S_0$  vaut  $N-j$ ; pour la probabilité  $p$  définie par la formule ci-dessus, le taux de probabilité de quitter l'état  $e$  par départ d'un client de  $S_0$  est égal au taux de probabilité de rentrer dans l'état  $e$  par arrivée dans  $S_0$  ou encore

$$p(j) = p(j+1) (N-j) a(j+1)$$

De même si l'on considère  $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$  occupée au lieu de  $S_0$  on a :

$$p(j) a(j) = p(j-1) \frac{1}{N+1-j}$$

Enfin si  $S_i$  est une station vide les 2 taux sont nuls. Dans chaque cas l'expression annoncée de  $p$  vérifie les égalités donc  $p$  est bien la probabilité stationnaire.

De plus toutes les stations sont échangeables.

COROLLAIRE

Dans le réseau  $R$  considéré précédemment, chaque station  $S_i$  pour  $1 \leq i \leq N$  est échangeable et ne peut pas recevoir plus d'un client ; on peut donc remplacer cette station par un sous-réseau de Cox, c'est-à-dire supposer que chaque station  $S_i$  a une loi de service quelconque à transformée de Laplace rationnelle ; le sous-réseau obtenu ainsi en remplaçant dans  $R \setminus S_0$  chaque station  $S_i$  par un sous-réseau de Cox est un sous-réseau standard dont chaque station est échangeable.

Si on prend  $a(j) = b$  pour tout  $j$ , où  $b$  est une constante, on est dans le cas d'une 'infinité de serveurs'. Si on prend  $a(j) = \frac{b}{j}$  pour  $j > 0$  où  $b$  est une constante, on est dans le cas "temps partagé". Enfin soit  $S$  une station échangeable dans un réseau  $R'$  à routages dépendant de l'état et dont on connaît la probabilité stationnaire, ce qui précède montre notamment que l'on sait encore calculer la probabilité stationnaire du réseau  $R''$  déduit de  $R'$  en remplaçant  $S$  par une station à loi de service quelconque, mais fonctionnant en temps partagé ou avec une infinité de serveurs.



De plus, dans une telle transformation, toute station autre que  $S_0$ , échangeable dans  $R'$ , l'est encore dans  $R''$ .

E.2 - CAS OÙ IL Y A PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS

On considère encore un réseau fermé  $R$  contenant  $N$  clients répartis en  $K$  classes, le nombre total de clients d'une classe  $k$  est noté  $n_k$ . On suppose que  $R$  est composé de  $N+1$  stations  $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$  et on se donne une suite  $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$  de nombres réels strictement positifs.

Un état du réseau est déterminé par un  $K$ -uplet  $e = (e_1, \dots, e_k, \dots, e_K)$  où  $e_k$  est le nombre de clients de classe  $k$  dans  $S_0$ .

On utilise également les notations  $j_k = n_k - e_k$ ,  $j = (j_1, \dots, j_k, \dots, j_K)$  et  $\hat{j} = \sum_{k=1}^K j_k$ .

Un client de classe  $k$  qui quitte la station  $S_0$  va dans l'une des autres stations non occupées  $S_i$  avec la probabilité  $\frac{1}{(N-\hat{j})}$  si  $S_i$  est vide et s'il y a  $N-\hat{j}$  clients dans  $S_0$ .

Le taux de service de la station  $S_0$  pour un client de classe  $k$  vaut 1, le taux de service d'une station  $S_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) pour un client de classe  $k$  vaut  $a_{jk}$  s'il y a  $j$  stations occupées par des clients de classe  $k$ .

Nous pouvons noter que les stations  $S_i$  ne sont pas pures par classes mais nous allons démontrer que pour un tel réseau toutes les stations sont échangeables par classes.

De plus si l'on note  $q(e)$  la probabilité stationnaire pour que  $S_0$  soit dans l'état  $e$  on a :

$$q(e) = c \cdot c_N^{j_1} \cdot c_{N-j_1}^{j_2} \cdot \dots \cdot c_{N-\sum_{k=1}^{K-1} j_k}^{j_K} \cdot \frac{(N-\hat{j})!}{f(j)}$$

où  $f(j) = \prod_{k=1}^K (\prod_{i=1}^{j_k} a_{ik})$

et où  $c$  est la constante de normalisation.

DEMONSTRATION

Posons 
$$p(e') = \frac{q(e)}{\begin{matrix} j_1 & j_2 & & j_K \\ c_N & c_{N-j_1} & \dots & c_{N-\sum_{k=1}^{K-1} j_k} \end{matrix}}$$

où  $e'$  est l'une des façons d'obtenir  $e$ .

Il suffit de vérifier que pour la probabilité  $p$ , la probabilité d'échangeabilité par classes est vérifiée pour chaque station.

Le taux de probabilité de quitter l'état  $e'$  par départ d'un client de classe  $k$  de  $S_0$  vaut  $p(e') = c \frac{(N-j)!}{f(j)}$ .

Le taux de probabilité d'atteindre l'état  $e'$  par arrivée d'un client de classe  $k$  dans  $S_0$  vaut  $p(e'-f_k)(N-j) a_{j_k+1,k}$

$$= \frac{c(N-j-1)! (N-j)}{f(j) a_{j_k+1,k}} a_{j_k+1,k} = c \frac{(N-j)!}{f(j)}$$

d'où l'égalité des 2 taux.

Considérons ensuite une autre station  $S_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) que l'on suppose d'abord occupée par un client de classe  $k$ .

Le taux de probabilité de quitter l'état  $e'$  par départ d'un client de classe  $k$  de  $S_i$  vaut  $p(e') a_{j_k,k}$  c'est-à-dire encore  $c \frac{(N-j)!}{f(j)} a_{j_k,k}$

Le taux de probabilité d'atteindre l'état  $e'$  par arrivée d'un client de classe  $k$  dans  $S_i$  vaut :

$$p(e'+f_k) \frac{1}{N+1-j} = \frac{c(N-j+1)! a_{j_k,k}}{f(j)} \frac{1}{(N+1-j)!} = \frac{c(N-j)!}{f(j)} a_{j_k,k}$$

Les 2 taux sont encore égaux.

Si l'on considère une station  $S_i$  non occupée, les 2 taux sont nuls. Connaissant  $p(e')$  on obtient  $q(e)$  à l'aide de la relation donnée au début de cette démonstration.

F - CAS OU LES CLIENTS PEUVENT CHANGER DE CLASSE

F1 - NOTATIONS

Soit  $\bar{R}$  le réseau fermé constitué d'un sous-réseau R propre comprenant m stations et d'une station S dont le taux de service de la classe k est  $g_k(e)$ .

On pose 
$$w_k(e) = \sum_{i=1}^m p(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik})$$

$w_k(e)$  est donc le taux de probabilité d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R.

On note  $s_{kl}$  la probabilité pour un client de classe k qui quitte une station de passer dans la classe l.

On dira que S est échangeable par classes si

F11 -  $\forall e, \forall k \quad w_k(e) = g_k(e) p(e)$

Le 2ème membre est le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k de S.

Dans le cas où  $\bar{R}$  est équilibré par classes, la condition F11 est équivalente à :

F12 -  $\forall e, \forall k \quad u_k(e) + z_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^m (a_{ik}(e) + b_{ik}(e))$

avec 
$$u_k(e) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{l=1}^K (p d_{ji,k})(e-f_{il}+f_{jk}) s_{kl}$$

et 
$$z_k(e) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^K (p c_{il} g_k)(e-f_{il}) s_{kl}$$

F2 - THEOREME

Soit R un réseau fermé contenant N clients et composé de 2 sous-réseaux propres R' et R'' ; on considère les réseaux fermés  $\bar{R}' = R' \cup S'$  et  $\bar{R}'' = R'' \cup S''$  où S' (resp. S'') est une station échangeable par classes dans  $\bar{R}'$  (resp.  $\bar{R}''$ ) On suppose R' et R'' équilibrés par classes et on considère en outre les hypothèses suivantes :

a - Dans R, le taux de service pour la classe k de la station  $S_i$  de  $R'$  (resp.  $R''$ ) est égal au taux de service pour la classe k de  $S_i$  dans  $R'$  (resp.  $R''$ ) multiplié par le taux de service de  $S''$  pour la classe k, c'est-à-dire que :

$$\forall e, \forall k \quad g_{ik}(e) = g'_{ik}(e') \cdot g''_k(e'') \quad (\text{pour } S_i \in R')$$

$$\forall e, \forall k \quad g_{jk}(e) = g''_{jk}(e'') \cdot g'_k(e') \quad \text{pour } S_j \in R''$$

b - Dans R les probabilités de répartition entre stations à l'intérieur de  $R'$  ou de  $R''$  sont les mêmes que dans les réseaux initiaux  $R'$  et  $R''$ .

c - Dans R la probabilité  $r_{ij,kl}$  pour un client de classe k qui quitte une station  $S_i$  de  $R'$  (resp.  $R''$ ) d'aller dans  $S_j$  de  $R''$  (resp.  $R'$ ) en passant dans la classe l est égale à  $b'_{ik}(e') s_{kl} c''_{jl}(e'')$

où  $s_{kl}$  est la probabilité pour un client de classe k de passer dans la classe l.

$b'_{ik}(e')$  et  $c''_{jl}(e'')$  ont été définis en A3.

On a alors les résultats suivants :

1°)  $p(e) = c p'(e') p''(e'')$

où  $p(e)$  est la probabilité stationnaire, pour le réseau R, d'être dans l'état  $e = (e', e'')$ .

2°) R est équilibré par classes.

3°) Toute station  $S_i$ , échangeable par classes dans  $\bar{R}'$  ou  $\bar{R}''$  est encore échangeable dans R.

### DEMONSTRATION

Elle n'est pas très différente de celle du théorème C2, nous n'indiquerons ici que les modifications à apporter aux démonstrations des équations 1°) et 2°), l'assertion 3°) sera démontrée en détail.

Avec les mêmes notations que dans C2, on a :

$$x'_k(e) = \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} \sum_{l=1}^K c p'(e'+f'_{ik}) p''(e''-f''_{jl}) b'_{ik}(e'+f'_{ik}) s_{kl} g''_k(e''-f''_{il}) c''_{jl}(e''-f''_{jl})$$

d'où :

$$x'_k(e) = \left[ \sum_{i \in M'} c p'(e'+f'_{ik}) b'_{ik}(e'+f'_{ik}) \right] \left[ \sum_{j \in M'} \sum_{l=1}^K (p'' g''_k c''_{jl})(e''-f''_{jl}) s_{kl} \right]$$

soit :

$$x'_k(e) = c w'_k(e') z''_k(e'')$$

De la même façon, on montre que :

$$x''_k(e) = c w''_k(e'') z'_k(e')$$

la suite de la démonstration est identique à celle du théorème C2.

3°) Il s'agit de montrer que  $\forall S_i, \forall e, \forall k, w_{ik}(e) = p(e) g_{ik}(e)$

$$w_{ik}(e) = \sum_{i' \in M_1} \sum_{l=1}^K (p g_{i',k} r'_{i',i,k})(e+f'_{i',k}-f'_{il}) s_{kl}$$

$$+ \sum_{j \in M''} \sum_{l=1}^K p(e+f'_{jk}-f'_{il}) b''_{jk}(e''+f''_{jk})(g'_k c'_{il})(e'-f'_{ik}) s_{kl}$$

or  $g_{i',k}(e+f'_{i',k}-f'_{il}) = g'_{i',k}(e'+f'_{i',k}-f'_{il}) g''_k(e'')$

d'où

$$w_{ik}(e) = c p''(e'') g''_k(e'') \sum_{i' \in M_1} \sum_{l=1}^K p'(e'+f'_{i',k}-f'_{il}) s_{kl} (g'_{i',k} r'_{i',i,k})$$

$$(e'+f'_{i',k}-f'_{il}) + \sum_{l=1}^K p'(e'-f'_{il}) g'_k(e'-f'_{il}) s_{kl} c'_{il}(e'-f'_{il})$$

$$+ \sum_{j \in M''} (p'' b''_{jk})(e''+f''_{jk})$$

or S'' étant échangeable par classes, on a :

$$\sum_{j \in M''} (p'' b''_{jk})(e''+f''_{jk}) = p''(e'') g''_k(e'')$$

d'où  $w_{ik}(e) = c p''(e'') g''_k(e'') w'_{ik}(e')$

Mais  $w'_{ik}(e') = g'_{ik}(e') p'(e')$

d'où  $w_{ik}(e) = c p'(e') p''(e'') g'_{ik}(e') g''_k(e'')$

$$w_{ik}(e) = p(e) g_{ik}(e)$$

ce qui démontre le résultat pour  $S_i$  dans  $R'$  ; on fait de même si  $S_i$  est dans  $R''$ .

### F3 - PROPOSITION

Soient  $R'$  et  $R''$  2 sous-réseaux propres couplés avec les stations  $S'$  et  $S''$  tels que  $\bar{R}' = R'US'$  et  $\bar{R}'' = R''US''$  soient des réseaux fermés, non nécessairement équilibrés par classes.  $S'$  et  $S''$  sont supposées échangeables par classes.

On suppose que les taux de service de  $S'$  (resp.  $S''$ ) ne dépendent pas de la classe considérée.

On notera  $g'(e)$  (resp.  $g''(e)$ ) le taux de service <sup>de</sup>  $S'$  (resp.  $S''$ ).

On suppose encore, comme dans F2, que les clients peuvent changer de classe.

Alors 1°) on a encore  $p(e) = \sum p'(e')p''(e'')$  avec les notations habituelles.

2°) De plus si  $S_i$  est échangeable par classes dans  $R'$ , elle est encore échangeable par classes dans  $R = R'UR''$ .

### DEMONSTRATION

1°) Soit  $x(e)$  le taux de probabilité pour la probabilité  $p$  d'atteindre l'état  $e$  et  $y(e)$  le taux de probabilité de quitter l'état  $e$ .

Il s'agit de montrer que  $x(e) = y(e)$ .

$$x(e) = \sum_{k=1}^K x_k(e) \quad \text{et} \quad y(e) = \sum_{k=1}^K y_k(e)$$

$$x_k(e) = x'_k(e) + x''_k(e) + c u'_k(e') g''(e'') p''(e'') + c u''_k(e'') g'(e') p'(e')$$

d'après la démonstration de C2, on a :

$$x'_k(e) = c w'_k(e') z''_k(e'') \quad \text{et} \quad x''_k(e) = c w''_k(e'') z'_k(e')$$

or par hypothèses  $w'_k(e') = g'(e') p'(e')$  et  $w''_k(e'') = g''(e'') p''(e'')$

d'où

$$x_k(e) = c g'(e') p'(e') z''_k(e'') + c g''(e'') p''(e'') z'_k(e') + c u'_k(e') g''(e'')$$

$$p''(e'') + c u''_k(e'') g'(e') p'(e')$$

$$x_k(e) = c g'(e') p'(e') [u''_k(e'') + z''_k(e'')] + c g''(e'') p''(e'') [u'_k(e') + z'_k(e')]$$

d'où en posant  $u(e) = \sum_{k=1}^K u_k(e)$  et  $z(e) = \sum_{k=1}^K z_k(e)$ ,

on obtient

$$x(e) = c g'(e') p'(e') [u''(e'') + z''(e'')] + c g''(e'') p''(e'') [u'(e') + z'(e')]$$

Considérons maintenant  $y(e) = y'(e) + y''(e)$

On a  $y'_k(e) = p(e) g''(e'') \sum_{i \in M'} (a'_{ik} + b'_{ik})(e')$

et  $y''_k(e) = p(e) g'(e') \sum_{j \in M''} (a''_{jk} + b''_{jk})(e'')$

en posant :  $a'_i(e') = \sum_{k=1}^K a'_{ik}(e')$  ,  $a''_i(e'') = \sum_{k=1}^K a''_{ik}(e'')$

$b'_i(e') = \sum_{k=1}^K b'_{ik}(e')$  et  $b''_i(e'') = \sum_{k=1}^K b''_{ik}(e'')$

On obtient :

$$y'(e) = \sum_{k=1}^K y'_k(e) = p(e) g''(e'') \sum_{i \in M'} [a'_i(e') + b'_i(e')]$$

et

$$y''(e) = \sum_{k=1}^K y''_k(e) = p(e) g'(e') \sum_{j \in M''} (a''_j(e'') + b''_j(e''))$$

or, en régime stationnaire, on a

$$\sum_{i \in M'} (a'_i(e') + b'_i(e')) = \frac{1}{p'(e')} (u'(e') + z'(e'))$$

et  $\sum_{j \in M''} [a''_j(e'') + b''_j(e'')] = \frac{1}{p''(e'')} (u''(e'') + z''(e''))$ ,

$p'$  et  $p''$  étant les probabilités stationnaires de  $R'$  et  $R''$ .

On obtient donc

$$y(e) = c p''(e'')g''(e'')[u'(e')+z'(e')] + c p'(e')g'(e')[u''(e'')+z''(e'')]$$

d'où  $x(e) = y(e)$ , ce qui démontre 1.

2°) La démonstration est identique à F2 3°).





B I B L I O G R A P H I E

---

- 1 - J. PELLAUMAIL  
Régime stationnaire quand les routages dépendent de l'état  
Actes du 1er Colloque AFCET-SMF de Mathématiques Appliquées  
4-8 Septembre 1978 Palaiseau et Rapport IRISA n° 102 Juin 1978.
- 2 - F. BASKETT, M. CHANDY, R. MUNTZ, J. PALACIOS  
Open, closed and mixed networks of queues with different classes of  
customers.  
J. A. C. M. 22, 248-260 (1975).
- 3 - K. M. CHANDY, J. H. HOWARD AND D. F. TOWSLEY  
Product form and local balance in queuing networks  
J. A. C. M. 24, n° 2, April 77, pp 250-263.
- 4 - D. R. COX  
A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes  
Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 313-319 (1955).
- 5 - D. R. COX  
The analysis of non-markovian stochastic processes by the inclusion  
of supplementary variables.  
Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 433 - 441 (1955)
- 6 - P. Y. GLORENNEC, G. HAINRY, R. MARIE, J. PELLAUMAIL  
Quelques résultats en théorie des files d'attente  
Séminaire de Rennes 1975. Rapport IRISA n° 33.
- 7 - R. MARIE  
Quelques résultats relatifs aux réseaux de files d'attente.  
Actes du 1er Colloque AFCET-SMF de Mathématiques Appliquées  
4-8 Septembre 1978 - Palaiseau France.
- 8 - E. GELENBE, R. R. MUNTZ  
Probabilistic Models of Computer Systems (Exact Results)  
Acta Informatica 7, 35-60 (1976).

- 9 - E. GELENBE AND G. PUJOLLE  
The behaviour of a single queue in a General Queuing Network  
Acta Informatica 7, 125-150 (1976).
- 10 - J. R. JACKSON  
Jobshop-like Queuing systems  
Management Science Vol. 10, n° 1, Oct. 1963.
- 11 - D. MERLE  
Algorithmes de calcul des probabilités stationnaires d'un réseau de  
files d'attente.  
Rapport IRIA-Laboria n° 279, mars 1978.
- 12 - L. KLEINROCK  
Queuing systems vol. I et II  
John Wiley et Sons (1976).