JEAN GUERINDON

Sur les décompositions de Krull-Schmidt d'un module

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S5
« Sur les décompositions de Krull-Schmidt d'un module », , p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S5_1_0>

PUBLICATIONS DES SEMINAIRES DE L'UNIVERSITE DE RENNES

Année 1977

Sur les décompositions de Krull-Schmidt d'un module

par

Jean GUERINDON

<u>Introduction</u> : Soit E un module sur un anneau R et H l'anneau des R-endomorphismes de E. On sait que si H est local, E est indécomposable. Par exemple H est local dans les trois cas particuliers classiques suivants :

a) E est de longueur finie indécomposable ;

b) E est injectif indécomposable ;

c) E est de type fini indécomposable sur un anneau commutatif unitaire noethérien semi-local complet. Le classique théorème d'AZUMAYA prouve l'unicité
d
de la décomposition d'un module S : $S = \bigoplus_i E_i$ dès que chaque anneau $\mathrm{End}_R\, E_i$ est local.

On dit qu'un module E est "<u>pur-injectif</u>" s'il est facteur-direct en toute extension <u>pure</u> (au sens de P.M. COHN). Un module injectif, un module strictement linéairement compact (en particulier un module artinien), un module linéairement compact discret (l.c.d.) sont pur-injectifs. Le corollaire du théorème 2 affirme que pour un R-module <u>pur-injectif</u> E, il y a équivalence entre la propriété d'être <u>indécomposable</u> et celle d'avoir un anneau des endomorphismes <u>local</u>. Cela recouvre les cas a), b), c) précédents. Pour cela, on établit que si $\bigoplus_i E_i$ (E_i indécomposables) est pur-injectif, alors il y a unicité. Un raffinement du classique procédé d'échange montre alors que chacun des $\mathrm{End}_R\, E_i$ est local. C'est donc la démarche inverse du classique théorème de KRULL, REMAK, SCHMIDT, AZUMAYA, (cf. [SV]) .

On précise alors les End_R E si E indécomposable est séparé pour certaines topologies linéaires. Ainsi si E est pur-injectif indécomposable séparé (pour la topologie M-adique) sur R local, commutatif noethérien complet, de radical M, End_R E est commutatif et est constitué de toutes les homothéties.

Si $\mathcal{A}$ est la topologie artinienne sur E, on prouve que si R est localement noethérien, alors l'application canonique de E en $\hat{E}$ (séparé complété) est pure et $\mathcal{A}$ est séparée.

Si R est de type $\mathcal{H}$(localement noethérien et à idéaux maximaux de type fini) et si E est de type fini sur R, alors $\hat{E}$ est à la fois l'enveloppe pure-injective (WARFIELD (12)) et l'enveloppe linéairement compacte (KURKE) de E (th. 5). En particulier E est alors simultanément complet, pur-injectif ou l.c.d. (th. 7). On établit enfin l'identité entre les modules noethériens pur-injectifs et les modules noethériens l.c.d. (th. 8 et corollaire).

On voit enfin qu'un module pur-injectif n'est pas toujours complètement décomposable (i.e. égal à une somme directe d'indécomposables) même si R est noethérien. On caractérise les anneaux noethériens R dont le complété artinien est complètement décomposable (th. 8 et contre-exemple).

La terminologie est celle des références notées [SV], [CF] et (12) données à la fin. En particulier les décompositions d'un module pur-injectif en somme directe d'indécomposables sont des "Diagrammes d'AZUMAYA" au sens de Carl FAITH ([CF]). Sauf dans les théorèmes 1,2 et son corollaire, les anneaux R sont commutatifs unitaires.

-:-:-:-:-:-:-:-

Le théorème suivant caractérise les modules pur-injectifs indécomposables.

Théorème 1 : Soit M un R-module pur injectif, il y a équivalence entre les conditions

a) M est un R-module indécomposable.

b) M est une enveloppe pure-injective de tout sous-module pur non nul de M.

c) 0 est pur-irréductible en M, c'est-à-dire que $0 = M_1 \cap M_2$, M_1 et M_2 étant des sous-modules de M tels que M_1+M_2 soit pur en M, entraîne que l'on a M_1 ou $M_2 = 0$.

En effet si a) est vraie et si on a $0 \not\hookrightarrow M' \xhookrightarrow{u} M$ avec u pure, on a $M' \hookrightarrow M'^* \xhookrightarrow{\beta} M$ avec M'^* enveloppe pure injective de M' et β pure. Alors β est scindée, et comme M'^* est non nul et M indécomposable, β est surjective et on a b).

Si c) est vraie et si on a $M = N_1 \oplus N_2$ avec $N_1 \neq 0$, alors N_1+N_2 est pur en M et $N_1 \cap N_2 = 0$ et $N_2 = 0$ et a) est vrai.

Supposons enfin b) vraie et prouvons que c) est vraie. Si on a $M_1 \cap M_2 = 0$, $M_1 + M_2$ pur en M et $M_1 \neq 0$ on a M_1 pur en $M_1 \oplus M_2$, donc M_1 pur en M et donc $M_1 \xhookrightarrow{i_1} M = M_1^*$ avec i_1 pure, et M extension pure-essentielle de M_1, c'est-à-dire telle que $S \subseteq M$ avec $S \cap M_1 = 0$ et image de M_1 pure en M/S entraîne S = 0. On considère les deux suites exactes pures

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{\sigma_1} M/M_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} M \xrightarrow{\sigma_2} M/M_2 \longrightarrow 0.$$

Si on prouve que $M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{\sigma_2} M/M_2 = \sigma_2 \circ i_1$ est pure, on prend $S = M_2$ et on en déduit que $M_2 = 0$, et donc c) sera vraie.

Soit L un R-module. On a les 3 suites exactes (pures) :

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes L \xrightarrow{i_1 \otimes 1_L} M \otimes L \xrightarrow{\sigma_1 \otimes 1_L} (M/M_1) \otimes L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_2 \otimes L \xrightarrow{L_2 \otimes 1_L} M \times L \xrightarrow{\sigma_2 \otimes 1_L} M/M_2 \otimes L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (M_1+M_2) \otimes L \xrightarrow{(L_1+L_2)\otimes 1_L} (M) \otimes L \xrightarrow{h} (M \otimes L)/\{(M_1+M_2) \otimes L\} \longrightarrow 0$$

avec les identifications

$$M_1 + M_2 \simeq M_1 \oplus M_2$$

et

$$(M_1+M_2) \otimes L \simeq (M_1 \oplus M_2) \otimes L \overset{\sim}{\sim} [(M_1 \otimes L) \oplus (M_2 \otimes L)].$$

Soit $\xi \in M_1 \otimes L$ tel que $\rho(\xi) = 0$ avec $\rho = (\sigma_2 \otimes 1_L) \circ (i_1 \otimes 1_L)$

$$\rho : M_1 \otimes L \xrightarrow{i_1 \otimes 1_L} M \otimes L \xrightarrow{\sigma_2 \otimes 1_L} (M/M_2) \otimes L$$

on a $(i_1 \otimes 1_L)\ (\xi) \in \ker(\sigma_2 \otimes 1_L) = \mathrm{Im}(i_2 \otimes 1_L)$ et est aussi en $\mathrm{Im}(i_1 \otimes 1_L)$. Or en $M \otimes L$ on a : $\mathrm{Im}(i_1 \otimes 1_L) \cap \mathrm{Im}(i_2 \otimes 1_L) = 0$ car on peut identifier ces images à $M_1 \otimes L$ et $M_2 \otimes L$. On a donc $(i_1 \otimes 1_L)\ (\xi) = 0$, et comme $(i_1 \otimes 1_L)$ est injectif, on a $\xi = 0$. c.q.f.d.

<u>Corollaire 1,1</u> : Si M est un R-module non nul et M^* son enveloppe pure-injective supposée <u>indécomposable</u>, alors 0 est <u>pur-irréductible</u> en M.

En effet si on a $0 = M_1 \cap M_2$ avec $M_1 + M_2$ pur en M, comme $M \longrightarrow M^*$ est pure, $M_1 + M_2$ est pur en M^*, et alors le théorème 1 (a) $\Longrightarrow$ c)) montre que M_1 ou M_2 est nul, d'où la proposition. La réciproque est fausse :

<u>Contre exemple</u> : Soit R un anneau noethérien <u>intègre</u> semi-local, non local d'idéaux maximaux M_i $(i = 1,2,\dots,n;\ n \geq 2)$. On a

$$R^* = \hat{R} = \hat{R}_{M_1} \times \dots \times \hat{R}_{M_n} .$$

Alors $\hat{R}^*$ est décomposable et 0 est inter-irréductible en R qui est intègre.

<u>Remarque</u> : Les sous-modules <u>purs</u> d'un module noethérien sont les <u>facteurs directs</u> (car $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ pure avec N de présentation finie est <u>scindée</u>). Soit alors M un module noethérien pur-injectif. Alors M est indécomposable si et seulement si M est la complétion de tout facteur direct non nul de M, c'est-

à-dire si M est enveloppe pure-injective de tout sous-module pur-non-nul. Ce qui redonne le théorème 1 dans le cas des modules noethériens.

En général un module pur-injectif n'est pas décomposable en une somme directe de modules indécomposables. Toutefois, on va voir que si tel est le cas, on a unicité de la décomposition (cf. th. 2 plus loin). On aura besoin de quelques lemmes.

Lemme 1 : Soient $M = M' \oplus M'' = N \oplus N'$ deux décompositions d'un R-module M en sommes directes, $M \xrightarrow{h'} M'$, $M \xrightarrow{\pi} N$, $M \xrightarrow{\pi'} N'$ les projections canoniques, $N \xrightarrow{\lambda} N$, $N' \xrightarrow{\lambda'} M$, $M' \xrightarrow{\mu'} M$ les injections canoniques correspondantes et soient les deux R-homomorphismes

$$\Psi : N \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{h'} M' \xrightarrow{\mu'} M \xrightarrow{\pi} N \quad \text{de } N \text{ en } N$$

$$\Psi' : N' \xrightarrow{\lambda'} M \xrightarrow{h'} M' \xrightarrow{\mu'} M \xrightarrow{\pi'} N' \quad \text{de } N' \text{ en } N'$$

alors $\ker \Psi$ et $\operatorname{Im} \Psi$ sont des sous-modules purs de N, de même

$\ker \Psi'$ et $\operatorname{Im} \Psi'$ sont des sous-modules purs de N'.

Démonstration : $\Psi + \Psi' : N \oplus N' \longrightarrow N \oplus N'$ peut être identifié à la projection h' de M sur M' dont le noyau M'' est pur en M. On a $\Psi+\Psi' : N \oplus N' \longrightarrow N \oplus N'$ et donc $M'' = \ker(\Psi+\Psi') = \ker \Psi \oplus \ker \Psi'$, et donc on a pour tout R-module L l'injection canonique

$$(\ker \Psi \oplus \ker \Psi') \otimes_R L \hookrightarrow (N \oplus N') \otimes_R L.$$

On a donc $(\ker \Psi \otimes L) \hookrightarrow (N \otimes L)$ et $(\ker \Psi' \otimes L) \hookrightarrow N' \otimes L$ injectives et donc $\ker \Psi$ est sous-module pur en N, $\ker \Psi'$ pur en N. De même $\operatorname{Im}(\Psi+\Psi') = M'$ est facteur direct de M, donc pur en $M = N \oplus N'$. Donc de même $\operatorname{Im} \Psi$ est pur en N, $\operatorname{Im} \Psi'$ pur en N'. c.q.f.d.

Lemme 2 : Soient E un R-module non nul pur-injectif indécomposable, f un R-endomorphisme de E. Alors f est inversible si et seulement si on a $\ker f = 0$ et si l'image de f est pure en E.

Si f est un isomorphisme on a ker f = 0 et Im f = E et Im f est bien pure en E. Si inversement on a ker f = 0 et $f(E) \overset{u}{\hookrightarrow} E$ pure, alors $f(E) \approx E$ et f(E) est pure-injective et donc u est scindée. Comme E et f(E) sont non nuls et E indécomposable on a f(E) = E et f est inversible.

<u>Lemme 3</u> : Si E est un R-module tel que pour tout couple d'endomorphismes f et g de E non inversibles et tels que ker f, ker g, Im f, Im g soient purs en E, alors f+g sont non inversibles, alors E est <u>indécomposable</u>.

Si E était décomposable avec $E = E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \neq 0$ et $E_2 \neq 0$ soit $p_1 : E \longrightarrow E_1$, $p_2 : E \longrightarrow E_2$, $\omega_1 : E_1 \longrightarrow E$, $\omega_2 : E_2 \longrightarrow E$ les projections et injections canoniques. Alors $f_1 = \omega_1 p_1$ et $f_2 = \omega_2 p_2$ ont des noyaux E_2 et E_1 et des images E_1 et E_2 tous purs en E, et donc f_1+f_2 serait non inversible en E, ce qui est impossible car c'est l'identité sur E.

<u>Lemme 4</u> : Soient deux décompositions de M, $M = N \oplus N' = M_1 \oplus M_1'$ et

$$\varphi_1 : N \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{h_1} M_1 \xrightarrow{\mu_1} M \xrightarrow{\pi} N\ ,\quad \varphi_1' : N' \xrightarrow{\lambda'} M \xrightarrow{h_1} M_1 \xrightarrow{\mu_1} M \xrightarrow{\pi'} N'$$

$$\Psi_1 : N \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{h_1'} M_1' \xrightarrow{\mu_1'} M \xrightarrow{\pi} N\ ,\quad \Psi_1' : N' \xrightarrow{\lambda'} M \xrightarrow{h_1'} M_1' \xrightarrow{\mu_1'} M \xrightarrow{\pi'} N'$$

avec λ, λ', μ_1, μ_1' injections canoniques et h_1, h_1', π, π', projections canoniques. Alors on a

$$N = \ker \varphi_1 \oplus \ker \Psi_1 \quad \text{et} \quad N' = \ker \varphi_1' \oplus \ker \Psi_1'$$

$$N = \operatorname{Im} \varphi_1 + \operatorname{Im} \Psi_1 \quad \text{et} \quad N' = \operatorname{Im} \varphi_1' + \operatorname{Im} \Psi_1' .$$

En effet, on a $\varphi_1+\Psi_1 = 1_N$, donc $\ker \varphi_1 \cap \ker \Psi_1 = 0$. De même $\ker \varphi_1' \cap \ker \Psi_1' = 0$.

On a $\ker(\varphi_1+\varphi_1') = \ker \varphi_1 \oplus \ker \varphi_1' = M_1'$ car $\varphi_1+\varphi_1' = h_1$

$\ker(\Psi_1+\Psi_1') = \ker \Psi_1 \oplus \ker \Psi_1' = M_1$ car $\Psi_1+\Psi_1' = h_1'$

et donc $[\ker \varphi_1 \oplus \ker \Psi_1] + [\ker \varphi_1' \oplus \ker \Psi_1'] = M_1' + M_1 = M$

or le premier crochet est en N et le second est en N'. Leur somme est donc directe, et ce sont N et N' respectivement.

De plus on a $\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_1') = M_1$, $\mathrm{Im}(\Psi_1+\Psi_1') = M_1'$ $[\mathrm{Im}\,\varphi_1+\mathrm{Im}\,\Psi_1] \oplus [\mathrm{Im}\,\varphi_1'+\mathrm{Im}\,\Psi_1'] = M$, d'où $\mathrm{Im}\,\varphi_1 + \mathrm{Im}\,\Psi_1 = N$, $\mathrm{Im}\,\varphi'_1 + \mathrm{Im}\,\Psi'_1 = N'$ c.q.f.d.

Corollaire 4,1 : Si on suppose en plus dans le lemme 4 que le module N est indécomposable, alors on a :

soit $\varphi_1 = 1_N$ et $\Psi_1 = 0$, soit $\varphi_1 = 0$ et $\Psi_1 = 1_N$.

En effet, N étant indécomposable, on a soit $\ker \Psi_1 = N$, soit $\ker \varphi_1 = N$. Si $\ker \Psi_1 = N$, on a $\Psi_1 = 0$ et $\varphi_1 = 1_N$. Si on a $\ker \varphi_1 = N$, on a $\varphi_1 = 0$ et $\Psi_1 = 1_N$, c.q.f.d.

Corollaire 4,2 (Lemme d'échange) : Si $M = N \oplus N' = \bigoplus_{i \in I} M_i$ avec N et les M_i indécomposables et N pur-injectif non nul, alors il existe un i tel que $M_i \xrightarrow{\mu_i} M \xrightarrow{\pi} N$ soit un isomorphisme et $\varphi_i : N \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{h_i} M_i \xrightarrow{\mu_i} M \xrightarrow{\pi} N$ soit l'identité sur N, λ, h_i, μ_i et π étant les applications canoniques. On a de plus $M = M_i \oplus N'$.

Démonstration : Si on avait φ_i non identité sur N pour tout $i \in I$, on aurait $\varphi_i = 0$ pour tout i d'après le corollaire 4,1 (en prenant $M = M_i \oplus (\sum_{j \neq i} \oplus M_j)$), ce qui est impossible car si $n \neq 0$, $n \in N$ on a

$$n = n_1 + \ldots + n_r \quad (n_k \in M_k), \quad \varphi_i(n) = 0$$

(tout i)et donc les n_k en N' et on a $n \in N \cap N' = 0$, d'où une contradiction. Alors pour un i, $1_N = \pi\, \mu_i\, h_i\, \lambda$ et $\sigma_i = h_i \circ \lambda : N \longrightarrow M_i$ est injective non nulle. Alors Im σ_i est pure en M_i. En effet on a $N = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Im}(h_i \circ \lambda)$ car $M = \bigoplus_i M_i$ et N est facteur direct de M. Donc $\mathrm{Im}(h_i \circ \lambda)$ est pure en N, N est pure en M. Alors $\mathrm{Im}(h_i \circ \lambda)$ est pure en M, donc aussi en M_i qui est sous-Module de M. Or Im σ_i est isomorphe à N et est donc pure-injective. Donc Im σ_i est facteur direct non-nul de M_i et on a Im $\sigma_i = M_i$ et σ_i est un isomorphisme. L'inverse de σ_i est $\pi\, \mu_i : M_i \longrightarrow N$. Alors si $z \in N$, $z = \pi\, \mu_i(z_i)$ pour un unique z_i en M_i, et on a $z = \pi(z) = \pi\, \mu_i(z_i)$, $z - \mu_i(z_i) \in \ker \pi' = N'$ et donc $N \subseteq M_i + N'$, $M = N + N' \subseteq M_i + N'$, $M = M_i + N'$. Cette dernière somme est directe car $M_i \cap N' = \ker \pi\, \mu_i = 0$. c.q.f.d.

Le théorème suivant ne suppose pas R noethérien, il généralise le théorème de Matlis sur les décompositions en sommes directes de modules injectifs indécomposables.

<u>Théorème 2</u> : Soient M un R-module pur-injectif et $M = \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{j \in J} N_j$ (I,J finis) deux décompositions avec les M_i et les N_j (pur-injectifs) indécomposables. Alors il existe une bijection entre I et J, en sorte que les modules correspondants soient isomorphes (au moyen des projections canoniques).

<u>Démonstration</u> : On applique le lemme d'échange (Cor. 4,2) comme dans le classique théorème de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya (cf. Sharpe et Vamos , loc. cit., § 3,2, p. 68), mais on ne peut supposer que les anneaux d'endomorphismes $\mathrm{End}_R\, M_i$ et $\mathrm{End}_R\, N_j$ sont locaux. On fait correspondre les parties $I' \subseteq I$ et les parties $J' \subseteq J$ telles que pour tout $i \in I'$, M_i soit isomorphe à tout N_j tel que $j \in J'$. On prouve que I' et J' sont équipotents. On aura alors I et J équipotents et le théorème sera prouvé. Soient donc I'_o et J'_o avec la propriété précédente. Si $j_1 \in J'_o$, il existe i_1 en I'_o d'après le cor. 4,2 tel que M soit isomorphe à

$$M_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{j \neq j_1} N_j \right).$$

Soit alors j_2 en J'_o, $j_2 \neq j_1$. Il existe i_2 en I'_o tel que

$$M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \left(\bigoplus_{j \neq j_1, j \neq j_2} N_j \right) \text{ et on a } i_2 \neq i_1.$$

Comme J'_o est fini, on aura ainsi une injection de J'_o en I'_o. De même I'_o sera injecté en J'_o et I'_o est équipotent à J'_o. On voit sans difficulté, que l'hypothèse de finitude de I et J est superflue.

Le corollaire suivant montre qu'un module pur-injectif indécomposable satisfait à la propriété d'échange au sens de Warfield (Proc. Americ. Math. Soc., 22, 2, 1969, p. 460). Ce résultat est déjà connu lorsque E est de longueur finie, ou bien est injectif ou encore est de type fini sur un anneau commutatif local noethérien complet :

Corollaire : Si E est un module pur-injectif indécomposable sur R, alors l'anneau $\mathrm{End}_R(E)$ est local.

En effet si on avait M pur-injectif indécomposable avec $A = \mathrm{End}_R M$ non local, il existerait deux endomorphismes f et g non inversibles de M tels que $f-g = 1_M$, identité sur M. On considère alors (cf. Warfield, loc. cit.) deux copies M_1 et M_2 de M et $S = M_1 \oplus M_2$. Soit alors $\varphi = (f,g)$ et $d = (1_M, 1_M)$ de M en S. Alors φ et d sont injectives et si $M' = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $d(M) = \mathrm{Im}(d)$, on a $M' \cap d(M) = 0$ et M' et $d(M)$ sont pur-injectifs indécomposables. De plus leur somme (directe) est S. En effet si $x_1 \in M_1$ et $x_2 \in M_2$, on trouve x et y en M tels que $x_1 = x+f(y)$ et $x_2 = x+g(y)$ avec $y = f(y)-g(y)$, soit $y = x_1-x_2$ et $x = x_2-g(y)$.
Finalement on peut appliquer le corollaire (4.1) d'échange des modules pur-injectifs à $S = d(M) \oplus M' = M_1 \oplus M_2$. L'une des projections canoniques $d(M) \longrightarrow M_i$ (i=1 et 2) est un isomorphisme, par exemple pour i=1. On a alors $S = M_1 \oplus M'$ et si p est la projection $S \longrightarrow M_1$, $p \circ \varphi$ est inversible et donc aussi f ce qui est contradictoire. D'où le corollaire.

Remarques :

a) On voit en particulier que si E est artinien (ou l.c.d.) indécomposable, $\mathrm{End}_R(E)$ est local (R commutatif)

b) Avec le théorème de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya et le corollaire précédent, on établit à nouveau le théorème 2.

c) On n'a pas supposé dans tout ce qui précède que l'anneau de base était commutatif (th 1, th 2 et Coroll.)

Un module pur-injectif quelconque n'est pas toujours complètement décomposable (i.e. somme directe de modules indécomposables). On établit immédiatement le lemme suivant au moyen de l'axiome du choix :

<u>Lemme 1</u> : Si un R-module n'est pas complètement décomposable, il contient un sous-module S qui est somme directe d'une <u>infinité</u> de sous-modules non nuls.

Comme conséquence, on en déduit que les modules artiniens et les modules noethériens sont complètement décomposables. De même, un module linéairement compact <u>discret</u> car une somme directe S l.c.d. est nécessairement <u>finie</u>. Il existe des modules strictement linéairement compacts qui ne sont pas complètement décomposables.

<u>Lemme 2</u> : <u>Soit E un R-module à gauche (R commutatif unitaire), I un idéal de R tel que E soit séparé-complet pour la topologie I-adique et soit</u> $H = Hom_R(E,E) = End_R E$. <u>Alors H est séparé complet pour la topologie définie par les</u> $Hom_R(E,I^nE)$ <u>et on a pour tout</u> n $(n \geq 1)$ $I^nH \subseteq Hom_R(E,I^nE) \subseteq J$ <u>si J est le radical de Jacobson de l'anneau H</u>.

On a par hypothèse $\bigcap_n I^nE = 0$ et donc $\bigcap_n Hom_R(E,I^nE) = 0$, d'où une topologie $\mathcal{C}$ <u>séparée</u> sur H. On a alors les suites exactes, n étant un entier ≥ 1 :

$$0 \longrightarrow I^nE \longrightarrow E \longrightarrow E/I^nE \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Hom(E,I^nE) \longrightarrow Hom(E,E)(=H) \longrightarrow Hom(E,E/I^nE)$$

$$0 \longrightarrow H/Hom(E,I^nE) \longrightarrow Hom(E,E/I^nE)$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n [H/Hom(E,I^nE)] \longrightarrow \varprojlim_n (Hom(E,E/I^nE).$$

Or $\varprojlim Hom(E,E/I^nE) \simeq Hom(E,\varprojlim E/I^nE) = Hom(E,E) = H$ car on a $E = \varprojlim(E/I^nE)$. De plus on a $\varprojlim [H/Hom(E,I^nE)] = \hat{H}$ séparé complété de H pour $\mathcal{C}$, et on a finalement $H = \hat{H}$.

On a $I^nH \subseteq Hom(E,I^nE)$. Soit $x \in E$ et $u \in Hom(E,I^nE)$. Pour tout W en H soit $u_1 = Wu$; on a $u_1 \in Hom(E,IE)$, et alors la série $x-u_1(x) +\ldots+ (-1)^k u_1^k(x) +\ldots$ converge vers y de E qui est I-complet. Alors $v : x \longrightarrow y$ est un inverse de $1+u_1$ en H et donc $u \in J$. Le lemme est établi.

Soit Ω la topologie définie sur le R-module E par les sous-modules $M_1^{\alpha_1}\ldots M_r^{\alpha_r}E$ les M_i étant maximaux en R et soit $\hat{E} = \varprojlim(E/M_1^{\alpha_1}\ldots M_r^{\alpha_r}E)$. On a $\hat{E} = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$, $\widehat{E_{M_i}}$ étant le localisé de E en M_i, complété pour la topologie M_i-adique ((12) prop. 10). Si de plus E est pur-injectif et les M_i tous de type fini, $E \xrightarrow{\varphi} \hat{E}$ est surjective, φ étant l'application canonique (ibid. § 4, prop. 8). Si en plus Ω est séparée alors on a $E = \hat{E}$. On a alors le

Lemme 3 : Si tous les idéaux maximaux de R sont de type fini et si E est un R-module pur-injectif, séparé pour la topologie Ω et si E est indécomposable, on a, $E = \widehat{E_{M_i}}$ pour un idéal maximal M_i de R. Si $H = \mathrm{End}_R E$, alors H est local d'idéal maximal $J = M_i H = HM_i$ et H est séparé complet pour la topologie M_i-adique (ou encore la topologie J-adique).

On a en effet d'après ce qui précède $E = \hat{E} = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ donc $E = \widehat{E_{M_i}}$ pour un i, E étant indécomposable. Le corollaire du théorème 2 précédent montre que H est un anneau local, d'unique idéal maximal (à droite et à gauche) J. On peut supposer R local d'idéal maximal (de type fini) M_i. Le lemme 2 montre que H est séparé-complet pour la topologie définie par les $\mathrm{Hom}(E,M_i^n E)$ et que l'on a pour tout n $M_i^n H \subseteq \mathrm{Hom}(E,M_i^n E) \subseteq J$. On a en particulier $M_i H \subseteq \mathrm{Hom}(E,M_i E) \subseteq J$. Comme J est l'unique idéal à gauche maximal de H, $H/M_i H$ est de dimension 1 sur le corps R/M_i et on a $M_i H = \mathrm{Hom}(E,M_i H) = J$. On a de même $J = HM_i$ et donc $J^n = M_i^n H = HM_i^n$ pour tout n, H ayant un élément unité. On a donc pour tout n : $J^n \subseteq \mathrm{Hom}(E,M_i^n E) \subseteq J$ et donc H est séparé-complet pour la topologie J-adique et aussi pour la topologie M_i-adique qui coïncide avec elle.

Lemme 4 : Si R est M-local noethérien complet, E un R-module pur-injectif indécomposable et séparé pour la topologie M-adique, alors tout endomorphisme de E est une homothétie et l'anneau $H = \mathrm{End}_R E$ est commutatif.

En effet d'après le lemme 3, H est M-local séparé complet et son radical de Jacobson est $J = MH = HM$. Soit $G(H)$ le gradué associé à la filtration M-adique. On a $G(H) = (H/MH) \oplus \ldots \oplus (M^n H/M^{n+1}H) \oplus \ldots$

Or H/MH est monogène et donc $G(H)$ est monogène sur $G(R) = R/M \oplus \ldots$

Or R est complet et H séparé pour la topologie M-adique donc H est monogène sur R, on a $H = R\varphi_o$ avec $\varphi_o \in H$. Comme l'identité est un élément de H, φ_o est inversible en H et H est l'anneau des homothéties du R-module E soit encore $R/\mathrm{ann}_R E$. C'est un anneau commutatif.

Définition : On dit qu'un anneau R est de type $\mathcal{H}$ s'il est commutatif, unitaire, si tout idéal maximal de R est de type fini et s'il est localement noethérien (i.e. les R_{M_i} sont noethériens).

Un exemple d'anneau de type $\mathcal{H}$ non noethérien est donné par l'anneau des fonctions holomorphes en z dans le disque $|z| < 1$. On a alors :

Théorème 3 : Soit R un anneau de type $\mathcal{H}$, E un R-module pur-injectif indécomposable. On suppose que la topologie Ω est artinienne et séparée. Alors l'anneau des endomorphismes $H = \mathrm{End}_R E$ est commutatif noethérien local complet.

En effet d'après le lemme 3, il existe un idéal maximal M de R tel que $E = \hat{E}_M$. On peut supposer R M-local noethérien et E séparé complet pour la topologie (artinienne) M-adique. Alors pour tout n, E/M^nE est un (R/M^n)-module artinien, et donc $E = \varprojlim(E/M^nE)$ est un $\hat{R}(= \varprojlim R/M^n)$-module strictement linéairement compact ; donc E est un $\hat{R}$-module pur-injectif (cf. (12) § 5). Comme E est un $\hat{R}$-module indécomposable (par restriction des scalaires), le lemme 4 montre que tout endomorphisme de $\hat{R}$-module de E est une homothétie et cet anneau est commutatif, noethérien, local complet (lemme 3). Comme tout R-endomorphisme (continu) de E provient d'un endomorphisme unique de $\hat{R}$-module, on a $H = \mathrm{End}_R E = \mathrm{End}_{\hat{R}} E = \hat{R}$.

Corollaire 1 : Si E est l.c.d., indécomposable et séparé sur R local noethérien complet, End_R est commutatif local noethérien complet.

En effet E est pur-injectif et les lemmes 3 et 4 donnent ce corollaire qui précise un résultat de Swan (Algebraic K-theory, Lecture Notes n° 76 (1968) Cor. 2, 22) qui suppose E de type fini sur R (donc séparé).

Corollaire 2 : Si R est local noethérien complet indécomposable, alors $\mathrm{End}_R R$ est R.

En effet $\mathrm{Ann}_R\, R=0$ et on applique le lemme 4.

Corollaire 3 : Si E est un R-module linéairement compact discret, séparé pour la topologie Ω et si R est commutatif noethérien, alors $H = \mathrm{End}_R E$ est un R-module de type fini l.c.d.

En effet comme E est l.c.d. séparé (pour la topologie Ω) sur R noethérien on a $E = \hat{E}_{M_1} \times \ldots \times \hat{E}_{M_r}$ avec des $\hat{E}_{M_i}$ modules l.c.d. indécomposables sur $\hat{R}_{M_i}$ local noethérien complet. On peut donc supposer R semi-local noethérien complet, de radical de Jacobson $I = M_1 \ldots M_r$. Comme E est l.d.d. il est pur-injectif, le lemme 2 entraîne que $H = \mathrm{End}_R E$ est séparé-complet pour la topologie I-adique. On a $I^n H \subseteq \mathrm{Hom}(E, I^n E) \subseteq J$ pour tout n, J étant le radical de Jacobson de H et donc $IH \subseteq \mathrm{Hom}(E, IH \subseteq J)$. Alors le R/I-module (semi-simple) H/IH a un nombre fini de sous-modules maximaux à gauche car H/J est semi-local, c'est-à-dire H-module semi-simple donc de longueur finie (cf. Faith, Algebra, Ring theory, prop. 18, 23 et 18, 26). Donc IH est l'intersection d'un nombre fini de sous-modules maximaux (à gauche) de H et on a IH = J. De même J=HI et on a $I^n H = J^n$ pour tout $n \geq 1$. Alors $G(H) = (H/IH) \oplus IH/I^2H \oplus \ldots$ est un $G(I) = R/I \oplus I/I^2 \oplus \ldots$ -module de type fini et comme R est complet pour la topologie I-adique et H séparé pour la topologie I-adique, H est de type fini sur R donc est un R-module l.c.d.

En général H n'est pas un anneau commutatif, par exemple si E est de type fini sur un corps commutatif et de dimension au moins deux.

Corollaire 4 : Si R est commutatif et si E est un R-module de longueur finie indécomposable, tout R-endomorphisme de E est une homothétie et $\mathrm{End}_R E$ est un anneau commutatif artinien primaire.

En effet E est de type fini sur $S = R/\mathrm{ann}_R E$ qui est artinien primaire donc M-local et E est séparé pour la topologie M-adique. Le corollaire découle alors du lemme 4 antérieur.

On va dans la suite comparer diverses topologies linéaires sur un module pur-injectif. Rappelons les définitions et propriétés suivantes (cf. (7) et (12)). La topologie Ω sur un R-module E a été définie en prenant sur E comme système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules $M_1^{\alpha_1}\dots M_r^{\alpha_r}E$ (M_j maximal pour tout j). On a $\hat{E} = \varprojlim E/(M_1^{\alpha_1}\dots M_r^{\alpha_r}E) = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$. On sait (cf. (12) prop. 10 et Cor. 8) que si R est noethérien et E pur-injectif, alors $E \longrightarrow \hat{E}$ est surjective. Ce résultat sera précisé par les théorèmes 4 et 6 plus loin.

Une topologie linéaire $\mathcal{C}$ sur un R-module M est dite "de type $\mathcal{F}$" ou est une "$\mathcal{F}$-topologie" si pour tout entier p, tout sous-module H du produit M^p est fermé pour la topologie produit. Alors $\mathcal{C}$ est séparée et si $E \xrightarrow{\theta} \hat{E}$ est l'injection canonique de E en son complété, θ est pure au sens de COHN, c'est-à-dire $E\otimes L \xrightarrow{\theta\otimes\varepsilon} \hat{E}\otimes L$ est injective pour tout R-module L, ε étant l'identité sur L. (cf. (7) th. 1). Par exemple si R est noethérien et $\mathcal{C}$ la topologie Ω, alors Ω est de type $\mathcal{F}$ (cf. (5) et (12)) dès que M est de type fini.

On dit qu'un R-module est un f-e-module (au sens de Vamos (cf. 10)) si son enveloppe injective est somme directe d'un nombre fini d'enveloppes injectives de R-modules simples. Un module artinien est f.e., la réciproque étant vraie pour un anneau commutatif unitaire si et seulement s'il est localement noethérien.

On définit la "f-e-topologie" (ou topologie cofinie) sur E en prenant comme système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules E_α tels que chaque E/E_α soit un f-e-module. Si R est localement noethérien, c'est la topologie artinienne $\mathcal{A}$. Dans le cas général la f-e-topologie est séparée, tout sous-module est fermé et elle induit la f-e-topologie sur tout sous-module F du module donné E.

Un produit fini de f-e-modules est un f-e-module et la f-e-topologie sur le produit fini $E_1 x E_2 x \dots E_r$ est la topologie produit des f-e-topologies sur les facteurs. On en déduit facilement la :

<u>Proposition 1</u> : <u>La f-e-topologie sur un module E est de type $\mathcal{F}$</u> .

On va alors établir la :

<u>Proposition 2</u> : <u>Si des sous-modules E_i</u> $(i \in I)$ <u>d'un A-module E engendrent en E une $\mathcal{F}$-topologie $\mathcal{T}$, l'injection canonique de E en son séparé-complété $\hat{E} : E \longrightarrow \hat{E}$ est pure.</u>

Notons que $\mathcal{T}$ est séparée et que l'on peut augmenter $\{E_i\}$ en prenant les intersections finies de tels E_i, puisqu'un facteur direct d'un module extension pure de E est extension pure de E. De même si E est pure pour la famille augmentée, φ sera pure, $\mathcal{T}$ étant séparée. Pour tout L de présentation finie $A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow L \longrightarrow 0$ soit τ l'isomorphisme canonique $L \otimes \prod_i (E/E_i) \simeq \prod_i (L \otimes (E/E_i))$. Alors θ sera pure si $W : L \otimes E \longrightarrow \prod_i [L \otimes (E/E_i))]$ est injective. On pose $\theta_i : L \otimes E \longrightarrow L \otimes (E/E_i)$ canonique. Tout revient à voir que $\xi \in (L \otimes E)$, $\theta_i(\xi) = 0$ pour tout i, entraîne $\xi=0$, ou encore, en considérant la suite exacte :

$$L \otimes E_i \xrightarrow{\Psi_i} L \otimes E \xrightarrow{\theta_i} L \otimes (E/E_i) \longrightarrow 0$$

que l'on a $\bigcap_i \ker \theta_i = 0$. On a alors pour chaque i un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
A^q \otimes E_i & \longrightarrow & A^p \otimes E_i & \xrightarrow{\sigma_i} & L \otimes E_i & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_i} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_i} & & \\
A^q \otimes E & \xrightarrow{\rho} & A^p \otimes E & \xrightarrow{\sigma} & L \otimes E & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_i} & & \\
A^q \otimes (E/E_i) & \longrightarrow & A^p \otimes (E/E_i) & \longrightarrow & L \otimes (E/E_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où, en identifiant, pour tout module F et tout q', $A^{q'} \otimes F$ à $F^{q'}$:

$$\begin{tikzcd}
E_i^q \arrow[r] \arrow[d] & E_i^p \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\omega_i"'] & L \otimes E_i \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_i"'] & 0 \\
E^q \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & E^p \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & L \otimes E \arrow[r] \arrow[d, "\theta_i"'] & 0 \\
(E/E_i)^q \arrow[r] & (E/E_i)^p \arrow[r] & L\otimes(E/E_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

alors si $\xi \in L \otimes E$ est tel que pour tout i on ait $\theta_i(\xi) = 0$, on aura $\xi \in \mathrm{Im}\, \Psi_i = \mathrm{Im}\, \Psi_i\, \sigma_i$ ou $\mathrm{Im}\,(\sigma\omega_i)$ et $\xi = \sigma\omega_i(z_i)$ pour un z_i en E_i^p de la forme $(\sum_j a_{ij}^k e_{ij})$ $(k = 1,2,\dots,p,\ a_{ij}^k \in A,\ e_{i,j} \in E_i)$ avec $\omega_i(z_i) \in E^p$. Alors $\xi \in \bigcap_i \sigma\, E_i^p$. Si λ est l'homomorphisme canonique $E^p \longrightarrow E^p/\rho(E^q)$, soit pour tout i, $E_i'' = \lambda(E_i^p)$. Si on voit que $\bigcap_i E_i'' = 0$, on aura $\xi \in \sigma(E_i)^p$. Or σ induit un isomorphisme

$$\bar\sigma : E^p/\rho(E^q) \xrightarrow{\sim} L \otimes E.$$

De $\xi \in \sigma(E_i)^p$, on tire $\xi \in \bar\sigma\theta(E_i^p)$. Or $\bar\sigma$ est inversible et donc on a $\bar\sigma^{-1}\, \xi \in \bigcap_i \lambda(E_i^p)$ et donc on aura ξ=0. Or on a $E_i'' = \lambda(E_i^p) = [E_i^p+\rho(E^q)]/\rho(E^q)$ et donc on a

$$\bigcap_i E_i'' = [\bigcap_i (E_i^p+\rho(E^q)]/\rho(E^q).$$

Reste à voir que l'on a $\bigcap_i (E_i^p+\rho(E^q)) = \rho(E^q)$. Si on pose $W = \rho(E^q)$. Or la topologie $\mathcal{T}$ qui est engendrée par les intersections finies de modules E_i est par hypothèse de type $\mathcal{F}$ et donc W est fermé en E^p. Donc les injections

$$E \longrightarrow \hat{E} = \varprojlim E/(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) \hookrightarrow \prod_\lambda (E/E_\lambda)$$

sont pures, les E_λ étant des intersections de modules E_i.

La proposition suivante précise le cas d'un anneau localement noethérien :

Proposition 3 : Si R est commutatif et localement noethérien, la topologie artinienne $\mathcal{A}$ sur tout R-module E est séparée, l'injection $E \longrightarrow \hat{E}$ est pure et il y a équivalence entre les propriétés :

i) E est complet pour la topologie artinienne.

ii) E est linéairement compact discret.

En effet $\mathcal{A}$ est la f-e-topologie sur E et elle est donc séparée. Si donc E est l.c.d., E est séparé-complet pour $\mathcal{A}$ et on a i). Inversement, si i) est vraie comme tout sous-module F de E est fermé pour la f-e-topologie (qui est aussi $\mathcal{A}$), E est linéairement compact pour la f-e-topologie et donc est l.c.d.

Contre-exemple : Même si R est noethérien et E est artinien (donc l.c.d.), on peut avoir Ω non séparée. Soit $R = \mathbb{Z}$. Un R-module injectif indécomposable non nul sera un groupe divisible et on aura $\mathcal{J} = n\,\mathcal{J}$ pour tout n non nul en $\mathbb{Z}$. Il sera d'autre part artinien (Matlis) sur $\hat{Z}_p$ pour un nombre premier p et non séparé pour la topologie p-adique.

La fin de cet article étudie spécialement les cas où la topologie Ω définie plus haut est séparée. On a le

Théorème 4 : Si E est de type fini sur R localement noethérien, la topologie Ω est séparée, de type $\mathcal{F}$ et coïncide avec la topologie artinienne $\mathcal{A}$. Si $E \xrightarrow{\rho} \hat{E}$ est l'injection canonique de E en son séparé-complété, ρ est pure. De plus $\hat{E}$ est strictement linéairement compact et contient une enveloppe-pure injective de E.

En effet si F est un sous-module de E tel que $G = E/F$ soit artinien, G est de type fini et donc de longueur finie. Il existe $M_1, \dots, M_r$ maximaux en R et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que $M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r} E \subset F$ et F est un voisinage de 0 pour Ω. Inversement si $H = E/M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r} E$, H est de type fini sur $R/M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$ qui est artinien et H est artinien, donc $M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r} E$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{A}$. On a donc $\mathcal{A} = \Omega$. Comme on sait que $\mathcal{A}$ est de type $\mathcal{F}$ (et donc séparée) Ω est de type $\mathcal{F}$ et ρ est pure (cf. (7) et proposition 2 plus haut). On a vu en (6) que si R est noethérien, ρ est l'enveloppe linéairement compacte. Si on suppose R localement noethérien R est classique au sens de (11), et on a vu (exposé 7, théorème 3) que $\hat{E}$ est l.c.d. si et seulement si E est l.c.d., c'est-à-dire encore si la topologie φ' de la limite projective sur $\hat{E}$ est la topologie artinienne (ou fe topologie) sur $\hat{E}$. Dans le cas général $\hat{E}$ est strictement linéairement compact comme limite projective de modules artiniens, et E est donc pur-injectif. Comme $E \longrightarrow \hat{E}$ est pure, on en déduit que l'enveloppe pure-injective E^* de E est facteur direct de E. $E \hookrightarrow E^* \hookrightarrow E^* \oplus F = \hat{E}$, et le théorème est établi.

Le corollaire suivant caractérise tous les modules nothériens l.c.d.

<u>Corollaire 1 : Si E est l.c.d. de type fini sur R localement noethérien, on a $E = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$, et chaque $\widehat{E_{M_i}}$ est un module de type fini sur $\widehat{R_{M_i}}$ local noethérien complet. De plus E est noethérien.</u>

En effet, la topologie Ω est séparée d'après le théorème 4 et comme E est l.d.d. E est Ω-complet, $E = \hat{E} = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ et alors chaque $\widehat{E_{M_i}}$ est de type fini sur $\widehat{R_{M_i}}$, donc produit fini de facteurs indécomposables l.c.d. Alors il existe un nombre fini de M_i tels que $\widehat{E_{M_i}}$ soit non nul, sinon E contiendrait une somme directe infinie de modules non nuls, ce qui est impossible car il est l.c.d. Finalement E est de type fini sur un anneau noethérien semi-local complet $S = \widehat{R_{M_1}} \times \ldots \times \widehat{R_{M_r}}$. Il est donc noethérien. Inversement, un module noethérien l.c.d. est nécessairement du type de l'énoncé.

Le théorème 8 précisera le cas où R est en plus de type $\mathcal{H}$.

<u>Corollaire 2 : Si R est un anneau localement noethérien et $\mathfrak{I}$ un idéal de R. Alors $\mathfrak{I}$ est fermé en R muni de la topologie Ω (ou $\mathcal{A}$).</u>

On prend $E = R/\mathfrak{I}$ dans le théorème précédent. Sur R les topologies $\mathcal{A}$ et Ω coïncident. C'est aussi la topologie naturelle de (5).

Pour préciser les résultats précédents, on va particulariser l'anneau R.

<u>Théorème 5 : Si E est de type fini sur R de type $\mathcal{H}$, on a $\Omega = \mathcal{A}$ et l'injection de E en son séparé-complété $\hat{E}$ (pour Ω) est pure. Alors $\hat{E}$ est une enveloppe pure-injective de E et une enveloppe linéairement compacte de E pour la topolotie discrète.</u>

En effet, d'après le théorème 4 on a $\mathcal{R} = \Omega$, et Ω est séparée puisque R est localement noethérien. On a alors des injections pures

$E \longrightarrow E^* \longrightarrow (E^* \oplus F) = \hat{E}$, E^* étant une enveloppe pure-injective de E. On a de plus $\hat{E} = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ (cf. (12) prop. 10 et (7)), chaque $\widehat{E_{M_i}}$ étant de type fini sur l'anneau local noethérien complet $\widehat{R_{M_i}}$ donc étant l.c.d. La topologie Ω' sur $\hat{E}$ est le produit des topologies M_i-adiques des $\widehat{E_{M_i}}$, c'est la Ω-topologie sur $\hat{E}$ qui induit la Ω-topologie sur le facteur direct E^* de $\hat{E}$. On a alors les injections continues pour ces topologies $E \xhookrightarrow{j} E^* \xhookrightarrow{k} \hat{E}$, d'où, en considérant les prolongements continus $\hat{j}$ et $\hat{k}$ le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{j} & E^* & \xrightarrow{k} & \hat{E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{j}} & \widehat{E^*} & \xrightarrow{\hat{k}} & \hat{E} \end{array}$$

alors $\hat{j}$ est un isomorphisme de $\hat{E}$ sur l'adhérence de j(E) en $\widehat{E^*}$, de même $\hat{k}$ est un isomorphisme de $\widehat{E^*}$ avec l'adhérence de $k(E^*)$ en $\hat{E}$. Donc $\hat{j}$ et $\hat{k}$ sont injectives. Comme $\hat{k} \circ \hat{j}$ est l'identité sur l'espace topologique $\hat{E}$, on a $\widehat{E^*} \approx \hat{E}$ (Bourbaki, Topologie générale, 3e édition, II, § 3 n° 9, cor. 1, prop. 18).

On a finalement F=0, $E^* = \hat{E}$ et $\hat{E}$ est une enveloppe pure-injective de E. Dans le cas particulier où R est <u>noethérien</u>, on retrouve une proposition connue (cf. (6) et (12)).

Une enveloppe linéairement compacte $E \longrightarrow \tilde{E}$ de E (pour la topologie discrète), est <u>par définition</u> un objet initial dans la catégorie C(E) dont les <u>objets</u> sont les homomorphismes de R-module de E en un R-module F linéairement compact, et dont un <u>morphisme</u> φ (de $E \longrightarrow F_1$ en $E \longrightarrow F_2$) est un homomorphisme <u>continu</u> de F_1 en F_2. Une telle enveloppe existe et $\tilde{E}$ est <u>unique</u> à un R-isomorphisme près.

On désignera donc par $\tilde{E}$ <u>l'enveloppe linéairement compacte de E pour la topologie discrète</u>, c'est-à-dire encore $\varprojlim(E/E_j)$ pour les E_j tels que E/E_j soit l.c.d. (cf. KURKE, Topologische methoden inder theorie der kommutativen ringe, Math. Nachristen, 1969).

Si on appelle, avec Vamos (cf. (11)) "<u>anneau classique</u>" un anneau commutatif R tel que tout f.e. module soit l.c.d. on voit, puisque la f.e. topologie est séparée (cf. (11) et supra) que l'application canonique de E en $\tilde{E}$ est <u>injective</u> dès que R est classique, par exemple si R est <u>localement noethérien</u>.

De plus, si R est localement noethérien, la f.e. topologie est la topologie artinienne et c'est une $\mathcal{F}$-topologie (cf. supra, proposition 2). Dans ce cas l'injection canonique $E \longrightarrow \tilde{E}$ est donc <u>pure</u>. On en déduit, que l'enveloppe pure-injective E^* de E (cf. (12) prop. 6) est un facteur direct de $\tilde{E}$.

De plus, les quotient E/F_k artiniens sont l.c.d. et comme on a $\mathcal{A} = \Omega$, on a $\hat{E} = \varprojlim E/F_k$. Comme tous les E_j sont <u>fermés</u> pour la f.e. topologie $\mathcal{A}$, on a une <u>injection</u> continue $\theta : \tilde{E} \longrightarrow \hat{E}$ (lemme classique de topologie).

Finalement on a $E^* = \hat{E} \hookrightarrow \tilde{E} \xhookrightarrow{\theta} \hat{E}$ et donc on a $\tilde{E} = E$, et le théorème est démontré. On a alors le :

<u>Théorème 6</u> : <u>Si R est un anneau de type $\mathcal{H}$, $\hat{R}$ est de type $\mathcal{H}$ si et seulement si R est noethérien semi-local</u>.

En effet si $\hat{R}$ est de type $\mathcal{H}$ le théorème 5 montre que $\hat{R}$ est l.c.d. sur lui-même (puisque égal à $(\hat{R})^{\sim}$). Or on a $\hat{R} = \prod_i \widehat{R_{M_i}}$, donc $\mathrm{spec}_{\mathrm{Max}} R$ est fini et $\hat{R}$ est noethérien. Or on a vu que $R \longrightarrow \hat{R}$ est R-pure, et donc pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de R, on a $\mathfrak{I}\hat{R} \cap R = \mathfrak{I}$. On en déduit que R est noethérien (semi-local). La réciproque est évidente.

En général E^* n'est pas de type fini. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 7</u> : <u>Soit E un module de type fini sur un anneau de type $\mathcal{H}$. Il y a équivalence entre les conditions</u>

i) <u>E est complet pour la topologie artinienne $\mathcal{A}$ (ou Ω)</u>.

ii) <u>E est l.c.d.</u>

iii) <u>E est pur-injectif</u>.

En effet d'après le théorème 5 précédent, $\mathcal{A}$ est la Ω-topologie sur E qui est séparée d'après le théorème 4, et on a $E^* = \tilde{E} = \hat{E}$. Or i) équivaut à $E=\hat{E}$, ii) à $E=\tilde{E}$ et iii) à $E=E^*$.

On en déduit aussitôt le théorème 7.

<u>Corollaire 1</u> : <u>Si E est un module sur R de type $\mathcal{H}$ et si E est pur-injectif, de type fini et indécomposable, il est de la forme</u> $\widehat{E_{M_i}}$ <u>pour</u> M_i <u>maximal.</u>

En effet, on a $E = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ et donc si E est indécomposable, on a le résultat indiqué.

<u>Remarque 1</u> : Réciproquement, si R est local noethérien <u>complet</u> et si E est de type fini sur R, E est pur-injectif de type fini et il est somme directe <u>finie</u> $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s$ de s modules du même type <u>indécomposables</u>. Alors les E_j sont uniquement déterminés d'après le théorème 2 fondamental antérieur.

<u>Corollaire 2</u> : Soit R est de type $\mathcal{H}$, E R-module de type fini. Alors E est <u>linéairement compact</u> pour une topologie linéaire $\mathcal{C}$ si et seulement si $\mathcal{C}$ admet un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous-modules E_j de E tels que les quotients E/E_j soient des R-modules <u>pur-injectifs</u>.

En effet, si E est l.c. pour $\mathcal{C}$ on a $E = \varprojlim(E/E_j)$ avec des E/E_j l.c. discrets donc pur-injectifs. Inversement, si on a $E = \varprojlim(E/E_j)$ avec pour tout j $H_j = E/E_j$ pur-injectif, chaque H_j sera de type fini, donc l.c.d. d'après le théorème 7, et E sera l. compact pour la topologie de la limite projective.

On est amené à poser le <u>problème</u> général suivant :

<u>Problème 1</u> : Soit R de type $\mathcal{H}$ et E un R-module pur-injectif. E est-il <u>complètement décomposable</u> ? La réponse est oui d'après MATLIS (Pacific Journal, 8, 1958, 511-528) lorsque R est noethérien et E injectif. Le théorème suivant élucide le cas d'un module pur-injectif de type fini. Il est valable en particulier si R est noethérien.

Théorème 8 : Soit R un anneau de type $\mathcal{H}$ et E un R-module. Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

a) E est pur-injectif de type fini complètement décomposable.

b) E est pur-injectif de type fini et $S = R/(0 :_R E)$ est semi-local.

c) E est pur-injectif et noethérien.

d) E est noethérien linéairement compact discret.

e) E est noethérien et complet pour la topologie naturelle.

Alors le nombre de composantes indécomposables de E est fini et l'anneau S est semi-local noethérien complet.

Démonstration : Si a) est vraie, E est l.c.d. d'après le théorème précédent et on a $E = \hat{E}$. De plus la décomposition $E = E_1 \oplus \ldots$ est finie. Chaque composante E_j sera de la forme $\widehat{E_{M_j}}$ et on a donc b). Inversement b) entraîne $E = \hat{E}$ donc $E = \hat{E} = E \otimes_S \hat{S}$, et comme chaque $\widehat{E_{M_j}}$ est complètement décomposable (car noethérien), on a a). Alors b) $\Longrightarrow$ c) et c) $\Longrightarrow$ b). Alors c) $\Longleftrightarrow$ d) d'après le théorème précédent. Alors d) $\Longrightarrow$ e). Inversement si e) est vraie, E est complet pour la topologie artinienne, et on a c) d'après le théorème précédent.

Corollaire : Si R est de type $\mathcal{H}$ et E pur-injectif de type fini, alors E est simultanément l.c.d. ou complètement décomposable ou noethérien.

On peut dire aussi qu'il y a identité entre les modules noethériens l.c.d. et les modules pur-injectifs noethériens. On ne sait pas caractériser les modules l.c.d. indécomposables dans le cas général, mais on a les deux propositions suivantes :

Proposition 4 : Si R est commutatif quelconque et E un R-module l.c.d., la topologie artinienne $\mathcal{A}$ est plus fine que Ω . Si de plus Ω est séparée, il est séparé-complet pour $\mathcal{A}$ (et pour Ω).

En effet soit $G = E/M_1^{\alpha_1} \ldots M_r^{\alpha_r} E$ avec les M_i maximaux. G étant l.c.d. sur B artinien il résulte de BALLET (Bull. Soc. Math. France, 100, 1972, 345-351, lemme 1) et de MATLIS (Injectives modules, Pacific Journal, 8, 1958, 511-522, th. 4,2 que l'enveloppe injective de G sur β est somme directe finie de modules artiniens. Alors G est artinien et donc $\mathcal{A} > \Omega$. Si Ω est séparée, $\mathcal{A}$ l'est et on a $E = \hat{E}$ pour les deux topologies qui sont alors "amiables" au sens de (5).

Proposition 5 : Si R est de type $\mathcal{H}$ et E un R-module l.c.d. qui est séparé pour la topologie Ω , alors on a $E = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ ($M_i \in \mathrm{spec}_{max}$ R) et on a $E_{M_i} = 0$ pour presque tous les i. En particulier si E est l.c.d. indécomposable et séparé pour Ω on a $E = \widehat{E_{M_o}}$ pour M_o maximal en R.

En effet E est pur-injectif et comme R est de type $\mathcal{H}$, $E \longrightarrow \hat{E} = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$ est surjectif (cf. (12) § 4), et comme il est injectif par hypothèse on a $E = \prod_i \widehat{E_{M_i}}$. Mais comme E est l.c.d., la somme directe $\bigoplus_i \widehat{E_{M_i}}$ est également l.c.d., donc elle est finie et on a pour presque tous les i $\widehat{E_{M_i}} = 0$, d'où la proposition.

On verra plus loin qu'un module séparé et complet pour la topologie Ω n'est pas en général complètement décomposable, même si R est noethérien.

Remarque : On peut déduire immédiatement le théorème 1 (avec l'aide des théorèmes 5 et 8) dans le cas particulier d'un module G pur-injectif de type fini sur un anneau R de type $\mathcal{H}$. En effet un tel module G est l.c.d. noethérien (th. 8) et tout sous-module pur L de G est un facteur direct. Alors un tel L est noethérien et complet pour la topologie artinienne ; il coïncide avec son enveloppe pur-injective (th. 5). Donc G est indécomposable si et seulement si G est enveloppe pur-injective de tout sous-module non nul.

Contre exemple : Soit R un anneau noethérien et $\hat{R}$ le séparé-complété de R pour la Ω-topologie. On a $R = \prod_i \widehat{R_{M_i}}$, $\hat{R}$ étant pur-injectif ainsi que les $\widehat{R_{M_i}}$. Si R est semi-local, chaque $\widehat{R_{M_i}}$ étant complètement décomposable, $\hat{R}$ l'est. Si par contre R a une <u>infinité</u> d'idéaux maximaux M_i, R n'est pas R-complètement décomposable. En effet si on avait $F = \hat{R} = \bigoplus_j G_j$ avec G_j R-module (pur-injectif) indécomposable, on aurait, puisque F est séparé pour la topologie Ω et F pur-injectif $G_j = \widehat{F_{M_j}}$ et G_j serait annulé par tous les idéaux maximaux $M_i \neq M_j$ puisque $F = \prod_i \widehat{F_{M_i}}$. Or on a $F = \prod_i \widehat{R_{M_i}}$, donc G_j est l'un des facteurs indécomposables (th. 2) de R_{M_j}. Finalement on aurait $\bigoplus_j G_j \subseteq \bigoplus_i \widehat{R_{M_i}}$, donc $\bigoplus_i R_{M_i} = \prod_i \widehat{R_{M_i}}$ et donc R serait semi-loçal, d'où une contradiction.

-:-:-:-:-:-:-:-

(1) BALLET B., Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 345-351.

(2) COUCHOT F., Comptes Rendus, A, 283 (27 sept. 1976), 277-280.

(3) FAKHRUDIN S., Comptes Rendus, A, 280 (3 Février 1975), 249-250.

(4) FUCHS L., Journal Australian Math. Soc. IX, 4 (1969), p. 433.

(5) GUERINDON J., Bull. Sc. Math. 1971, 95, p. 241 à 259.

(6) GUERINDON J., Conférence on Comm. Algebra, Queen's Univ., Kingston (1975).

(7) GUERINDON J., Sur les Modules linéairement compacts. Séminaire d'Algèbre (Paris 31 Janvier 1977).

(8) MATLIS E., Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), p. 496.

(9) STENSTROM B., Arkiv för Mat. 7 (1967), 159-171.

(10) VAMOS P., J. London Math. Soc. 43 (1968), 643-646.

(11) VAMOS P., Journal of Algebra, 34 (1975), 114-129.

(12) WARFIELD R.B., Jr. Pacific J; Math., 28, n° 3 (1969), 699-719.

(13) ZELINSKY D., Linear compact Modules. Amer. J. Math., 75 (1953), 79-90.

MONOGRAPHIES

[SV] SHARPE et VAMOS, Injectives Modules, Cambridge Tracts, 1971.

[CF] Carl FAITH, Algebra II, Ring Theory, Springer Verlag 1976.

Université de Rennes
Département de Mathématiques et Informatique
Rennes-Beaulieu

35042 - RENNES-CEDEX