CLAUDE JOURON

Étude d'un problème d'optimisation où la contrainte porte sur la première valeur propre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S4_A6_0>

ETUDE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION OU LA CONTRAINTE
PORTE SUR LA PREMIERE VALEUR PROPRE

par Claude JOURON

INTRODUCTION.

Soit Ω la forme d'une structure plane, u son épaisseur, $\lambda(u)$ sa fréquence fondamentale de vibrations et

$$(0.1) \qquad J(u) = \int_{\Omega} u(x)\, dx$$

son poids. Nous allons considérer ici le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{\substack{u \in C \\ \lambda(u) = \lambda_1}} J(u)$$

où

$$(0.2) \qquad \lambda_1 = \lambda(1)$$

et

$$(0.3) \qquad C = \{u \in L^{\infty}(\Omega) \ ; \ 0 < \alpha \leq u(x) \leq \beta < +\infty \ \text{p.p.} \ x \in \Omega\}$$

avec $0 < \alpha < 1 < \beta < +\infty$.

Ce type de problème intervient souvent en théorie des structures (cf. [1] et sa bibliographie). Nous n'étudierons ici que le cas où la fréquence fondamentale est la plus petite valeur propre d'un problème spectral de la forme

$$(0.4) \qquad \operatorname{div}(a(u)\nabla w) + \lambda\, b(u)\, w = 0$$

$$(0.5) \qquad a(u) \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0$$

$$(0.6) \qquad w_{|\Gamma_1} = 0$$

où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est le bord Γ de Ω et n la normale extérieure.

Ce sont les exemples de [1] et [5] qui nous ont amenés à considérer ce type de problème spectral. Indiquons ces exemples :

Département de Mathématique, Université de Paris Sud 91405 ORSAY

Exemple 1. $a(u) = u$ $b(u) = 1$

Exemple 2. $a(u) = u$ $b(u) = u + \delta$ où $\delta > 0$

Exemple 3. $a(u) = 1$ $b(u) = \frac{1}{u^2}$.

L'équation elliptique (0.4) est une équation du second ordre et par conséquent le principe du maximum va jouer un rôle fondamental.

Nous avons étudié ce problème ($\mathcal{P}$) : théorème d'existence, condition nécessaire et suffisante d'optimalité ainsi que l'approximation de ce problème par une méthode d'éléments finis. Nous indiquons ici les résultats obtenus et renvoyons à [6] pour les démonstrations.

1. ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne. On désigne par $(.,.)$ [resp. $((.,.))$] le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$] par $\|\cdot\|_0$ [resp. $\|\cdot\|$] la norme de $L^2(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$] et par $<.,.>$ le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert de $L^\infty(\Omega)$ défini par

$\mathcal{U} = \{u \in L^\infty(\Omega)$; $\exists\ \alpha(u) > 0$ tel que $u(x) \geqslant \alpha(u) > 0$ p.p.$\}$

Soient $\mathbb{a}$ et $\mathbb{b}$ deux fonctions :

$$\mathbb{a} :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ concave}$$

$$\mathbb{b} :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ convexe.}$$

Pour tout $u \in \mathcal{U}$ on peut définir $a(u) \in \mathcal{U}$ par

$$a(u)(x) = \mathbb{a}(u(x)) .$$

De la même façon on peut définir $b(u)$. Il est facile de voir que a et b possèdent les propriétés suivantes ; a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

a et $(-b)$ sont concaves sur $\mathcal{U}$ par rapport au cône des fonctions positives p.p.

Soit $u \in \mathcal{U}$ appelons A_u l'isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle A_u w,\phi\rangle = \int_\Omega a(u)(x)\ \nabla w(x).\nabla\phi(x)\ dx \qquad (w,\phi)\in (H_o^1(\Omega))^2$$

et B_u l'opérateur de $L^2(\Omega)$ défini par

$$B_u w = b(u)\ w\ .$$

On sait que le problème spectral :

(1.1) $$A_u w = \lambda\ B_u w$$

admet un ensemble dénombrable de valeurs propres

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots \quad , \lambda_n \to +\infty \text{ q.d.n} \to +\infty\ .$$

Et grâce au principe du maximum on montre le résultat suivant :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour tout</u> $u\in\mathcal{U}, \exists!\ (\lambda(u),w(u))\in \mathbb{R}\times H_o^1(\Omega)$ <u>vérifiant</u> (<u>1.1</u>) <u>et tel que</u>

(1.2) $$w(u;x) \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

(1.3) $$\int_\Omega w^2(u;x)\ dx = 1\ .$$

<u>De plus</u> $\lambda(u)$ <u>est la plus petite valeur propre de</u> (<u>1.1</u>) <u>et elle vérifie</u>

(1.4) $$\lambda(u) = \operatorname*{Inf}_{\substack{w\in H_o^1(\Omega)\\ w\neq o}} \frac{\langle A_u w,w\rangle}{(B_u w,w)} = \frac{\langle A_u w(u),w(u)\rangle}{(B_u w(u),w(u))}\ .$$

<u>Remarque</u>. On a considéré un problème type Dirichlet ; on peut très bien considérer un problème où les conditions aux limites sont du type (0.5)-(0.6).

Cette caractérisation de la 1ère valeur propre est essentielle car elle nous permet comme dans [7] par l'utilisation du théorème des fonctions implicites de montrer

<u>Proposition 2</u>. <u>La fonction</u> $u\in\mathcal{U} \longrightarrow \lambda(u)\in\mathbb{R}$ <u>est différentiable et</u>

$$\lambda'(u).v = \frac{\int_\Omega \{(a'(u).v)(x)\,|\nabla w(u;x)|^2 - \lambda(u)(b'(u).v)(x)\, w^2(u;x)\}\, dx}{\int_\Omega b(u)(x)\, w^2(u;x)\, dx}$$

<u>pour</u> <u>tout</u> $v \in L^\infty(\Omega)$.

Pour l'instant la concavité de a et $(-b)$ n'est pas intervenue. Cette propriété des fonctions a et $(-b)$ nous permet de montrer le

<u>Théorème</u> <u>1.</u> <u>Pour</u> <u>tout</u> $(u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ <u>on</u> <u>a</u>

$$\lambda(v) \leq \lambda(u) + \lambda'(u).(v-u)\, \frac{\int_\Omega b(u)(x)\, w^2(u;x)\, dx}{\int_\Omega b(v)(x)\, w^2(u;x)\, dx} \quad .$$

On déduit de cette inégalité les deux résultats suivants :

<u>Corollaire</u> <u>1</u>. <u>La</u> <u>fonction</u> $u \to \lambda(u)$ <u>est</u> <u>pseudoconcave</u> <u>sur</u> $\mathcal{U}$ (<u>c'est-à-dire</u> λ <u>est</u> <u>G-différentiable</u> <u>et</u> $\lambda'(u).(v-u) \leq 0$ $\Longrightarrow \lambda(v) \leq \lambda(u))$.

<u>Corollaire</u> <u>2</u>. <u>La</u> <u>fonction</u> $u \to \lambda(u)$ <u>est</u> <u>s.c.s.</u> <u>sur</u> <u>le</u> <u>convexe</u> C <u>pour</u> <u>la</u> <u>topologie</u> <u>faible</u> * <u>de</u> $L^\infty(\Omega)$ <u>où</u> C <u>est</u> <u>défini</u> <u>par</u> (<u>0.3</u>).

Les résultats précédents s'appliquent aux trois exemples considérés. Dans le cas de l'Exemple 1, λ est concave.

2. <u>ETUDE</u> <u>DE</u> $(\mathcal{P})$.

Considérons la fonction u_α définie par

$$u_\alpha(x) \equiv \alpha \ .$$

On suppose que

(2.1) $$\lambda(u_\alpha) < \lambda_1$$

(2.2) $$\exists\, u_\gamma \in C \ \text{ tel que } \ \lambda(u_\gamma) > \lambda_1 \ .$$

Introduisons le problème ($\mathcal{Q}$) suivant

$$(\mathcal{Q}) \qquad \inf_{\substack{u \in C \\ \lambda(u) \geq \lambda_1}} J(u) \quad .$$

<u>Théorème 2.</u> <u>Sous les hypothèses (2.1) et (2.2) on a</u>

i) <u>les problèmes ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) sont équivalents</u> ;

ii) $\bar{u} \in C$ <u>est solution de ($\mathcal{P}$) si et seulement si</u>

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1 \quad \text{et}$$

$$(2.3) \qquad \exists\, \bar{\eta} < 0 \quad \text{tel que}$$

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{\eta}\, \lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall\, v \in C \quad ;$$

iii) <u>le problème ($\mathcal{P}$) admet au moins une solution.</u>

La pseudoconcavité de λ permet de montrer i) et de démontrer que la condition nécessaire d'optimalité est également une condition suffisante.

La condition nécessaire d'optimalité est obtenue grâce aux résultats de [4].

La faible * s.c.s. de λ montre que

$$\{u \in C \; ; \; \lambda(u) \geq \lambda_1\} \text{ est faible * compact}$$

et donc que le problème ($\mathcal{Q}$) et par suite ($\mathcal{P}$) admet au moins une solution.

Dans le cas des exemples, (2.1) est vérifiée et (2.2) également en considérant

$$u_\gamma(x) \equiv \gamma \qquad \text{avec} \quad 1 < \gamma \leq \beta \; .$$

Dans le cas de l'Exemple 3 la condition (2.3) s'écrit $\exists$ $e > 0$ tel que

$$\frac{w^2(\bar{u};x)}{\bar{u}^3(x)} \leq e \quad \text{p.p.} \quad x \in \{x \in \Omega ; \; \bar{u}(x) < \beta\}$$

$$\frac{w^2(\bar{u};x)}{\bar{u}^3(x)} \geq e \quad \text{p.p.} \quad x \in \{x \in \Omega ; \; \bar{u}(x) > \alpha\}$$

et grâce à ces relations on peut montrer l'unicité de la solution.

3. APPROXIMATION.

On supposera que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale. Soit $\tau_h = (T_k)$ une suite régulière de triangulation de Ω telle que tout angle θ de tout triangle de τ_h vérifie

(3.1) $$\theta \leqslant \pi/2 .$$

3.1. Approximation des espaces.

On pose

$$W_h = \{w_h \in C(\bar{\Omega}) \ ; \ w_h|_{T_k} \text{ est affine } \ w_h|_{\Gamma} = 0\}$$

$$U_h = \{u_h \in L^\infty(\Omega) \ ; \ u_h|_{T_k} \text{ est constant}\} .$$

On sait que pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ il existe $r_h\, w \in W_h$ tel que

$$r_h\, w \to w \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort quand } h \to 0 .$$

Pour tout $u \in C$ on peut définir $q_h\, u \in U_h \cap C$ par

$$q_h\, u|_{T_k} = \frac{1}{\text{aire } T_k} \int_{T_k} u(x)\, dx$$

et l'on a

$$q_h\, u \to u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort}$$

$$q_h\, u \to u \text{ pour la topologie faible* de } L^\infty(\Omega) .$$

3.2. Approximation du problème spectral.

On va approximer (1.1) par : trouver $(w_h, \lambda_h) \in W_h \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \phi_h \in W_h \ , \ \int_\Omega a(u_h)(x) \ \nabla w_h(x) \cdot \nabla \phi_h(x)\, dx = \lambda_h \int_\Omega b(u_h)(x)\, w_h(x)\, \phi_h(x)\, dx .$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle suivante

(3.2) $$A_{h,u_h}\, w_h = \lambda_h\, B_{h,u_h}\, w_h$$

où A_{h,u_h} et B_{h,u_h} sont des matrices carrées définies par

$$A_{h,u_h} = (a_{ij}(u_h)) \qquad B_{h,u_h} = (b_{i,j}(u_h))$$

avec

$$a_{ij}(u_h) = \sum_k \mathbb{a}(\xi_k) \int_{T_k} \nabla\phi_{i,h}(x).\nabla\phi_{j,h}(x)\, dx$$

$$b_{ij}(u_h) = \sum_k \mathbb{b}(\xi_k) \int_{T_k} \phi_{i,h}(x) \quad \phi_{j,h}(x)\, dx$$

(ϕ_i) étant la base de W_h

et ξ_k est la valeur de u_h sur T_k.

Grâce à l'hypothèse (3.1) et les travaux [2] et [3] on montre que la matrice A^{-1}_{h,u_h} B_{h,u_h} a tous ses éléments strictement positifs. Par conséquent on peut appliquer le Théorème de Perron-Frobenius et on obtient

<u>Proposition 3. Pour tout</u> $u_h \in \mathcal{U} \cap U_h$ $\exists!$ $(\lambda_h(u_h), w_h(u_h)) \in \mathbb{R} \times W_h$ <u>vérifiant</u> (3.2) <u>et tel que</u>

(3.3) $$w_h(u_h;x) \geqslant 0$$

(3.4) $$\int_\Omega w_h^2(u_h;x)\, dx = 1 .$$

<u>De plus</u> $\lambda_h(u_h)$ <u>est la plus petite valeur propre de (3.2) elle est simple et vérifie</u>

$$\lambda_h(u_h) = \operatorname*{Inf}_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\int_\Omega a(u_h)(x)\, |\nabla w_h(x)|^2\, dx}{\int_\Omega b(u_h)(x)\, w_h^2(x)\, dx}$$

<u>l'infimum étant atteint au point</u> $w_h(u_h)$.

Cette caractérisation de la plus petite valeur propre permet comme dans le cas continu de montrer

Proposition 4. La fonction $u_h \to \lambda_h(u_h)$ est différentiable et pseudoconcave sur $\mathcal{U} \cap U_h$.

Dans le cas de l'Exemple 1, λ_h est concave sur $\mathcal{U} \cap U_h$.

3.3. Approximation de $(\mathcal{P})$.

On pose $\lambda_{h,1} = \lambda_h(1)$ et le problème qui va approximer $(\mathcal{P})$ sera

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u_h \in C \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) = \lambda_{h,1}}} J(u_h) .$$

On introduit également

$$(Q_h) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u_h \in C \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) \geqslant \lambda_{h,1}}} J(u_h) .$$

On va supposer que

$$\lambda_h(u_\alpha) < \lambda_{h,1} \tag{3.5}$$

$$\exists\, u_{\gamma,h} \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \quad \text{tel que } \lambda_h(u_{\gamma,h}) > \lambda_{1,h} . \tag{3.6}$$

Théorème 3. Sous les hypothèses (3.5) et (3.6) on a

i) les problèmes $(\mathcal{P}_h)$ et (Q_h) sont équivalents

ii) $\bar{u}_h \in C \cap U_h$ est solution de $(\mathcal{P}_h)$ si et seulement si $\exists\, \bar{\eta}_h < 0$ tel que

$$\forall\, v_h \in C \cap U_h \qquad J(v_h) - J(\bar{u}_h) + \bar{\eta}_h\, \lambda'_h(u_h).(v_h - \bar{u}_h) \geqslant 0 \tag{3.7}$$

iii) le problème $(\mathcal{P}_h)$ admet au moins une solution.

3.4. Convergence.

Théorème 4. Dans le cas de l'Exemple 1 si $\bar{u}_h$ est une solution de $(\mathcal{P}_h)$ on a le résultat suivant :

i) $\lim_{h \to o} J(\bar{u}_h) = \mathrm{Inf}(\mathcal{P})$

ii) on peut extraire de $\bar{u}_h$ une sous suite convergeant vers une solution $\bar{u}$ du problème $(\mathcal{P})$ pour la topologie faible $*$ de $L^\infty(\Omega)$.

Donnons une idée de la démonstration. D'après le Théorème 3, $\exists\ \bar{\eta}_h < 0$ vérifiant (3.7). Inégalité qui implique puisque λ_h est concave

$$(3.8) \qquad \forall\, v \in C \qquad J(q_h\, v) - J(\bar{u}_h) + \bar{\eta}_h(\lambda_h(q_h\, v) - \lambda_{h,1}) \geqslant 0$$

$\bar{u}_h$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, on montre que $\bar{\eta}_h$ est borné dans $\mathbb{R}$ et par suite il existe une sous-suite $(\bar{u}_{h'}, \bar{\eta}_{h'})$ telle que

$$\bar{\eta}_{h'} \rightarrow \eta^* \in \mathbb{R}_-$$

$$\bar{u}_{h'} \rightharpoonup u^* \in C \quad \text{(pour la topologie faible} *).$$

Compte tenu du Lemme 1, énoncé plus bas on peut passer à la limite dans (3.8) et on obtient :

$$(3.9) \qquad \forall\, v \in C \qquad J(v) - J(u^*) + \eta^*(\lambda(v) - \lambda_1) \geqslant 0 \ .$$

De plus on a

$$(3.10) \qquad \lambda(u^*) \geqslant \lambda_1$$

(3.9) et (3.10) montrent que u^* est solution de $(\mathcal{Q})$ et donc de $\mathcal{P}$.

Lemme 1. On a

1. $\lambda_{h,1} > \lambda_1$ et $\lambda_{h,1} \rightarrow \lambda_1$ quand $h \rightarrow 0$
2. si $u_h \in C \cap U_h$ converge vers u pour la topologie faible $*$ alors

$$\limsup_{h \to o} \lambda_h(u_h) \leqslant \lambda(u)$$

3. $\forall\, v \in C$, $\qquad \lim_{h \to o} \lambda_h(q_h\, v) = \lambda(v)$.

Remarque. Dans le cas de l'Exemple 2 le Lemme 1 est vérifié par contre on n'a peut être pas (3.8) car on ne sait pas si $v_h \longrightarrow J(v_h) + \eta\lambda_h(v_h)$ est pseudo-convexe pour tout $\eta < 0$.

3.5. Essais numériques.

On a effectué des essais numériques dans le cas où $\Omega =]0,1[$ et pour les exemples 2 et 3 car l'on connaît explicitement $\bar{u}$. On a découpé l'intervalle $[0,1]$ en 20 intervalles et on a obtenu au bout de quatre itérations de la méthode du Lagrangien augmenté une erreur relative

$$\frac{\underset{1\leq k\leq 20}{\text{Max}} \left|\xi_k^{(4)} - \bar{u}((k-\frac{1}{2})\ \frac{1}{20})\right|}{\underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}} |\bar{u}(x)|} \lesssim 0{,}002$$

où $\xi_k^{(4)}$ est la valeur de $u_h^{(4)}$ sur $[(k-1)\ \frac{1}{20},\ k\ \frac{1}{20}[$.

Conclusion.

Bien que nous n'ayons pu démontrer la convergence du problème approché vers le problème continu pour tous les exemples, les essais numériques nous ont montré que la méthode décrite ici donne une bonne approximation de la solution optimale du problème ($\mathcal{P}$) .

Dans un travail ultérieur nous examinerons le cas où l'équation spectrale est une équation elliptique du 4ème ordre.

Bibliographie.

[1] ARMAND J.L.P. - Applications of the theory of optimal control of distributed parameter systems to structural optimization. N.A.S.A., CR. 2044, Juin 1972.

[2] CIARLET P.G. - Discrete maximum principle for finite difference operators. Aequationes Math. 4, 338-352 (1970).

[3] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. - Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. Computer Methods in Applied Mech. and Engin. 2, 17-31 (1973).

[4] HALKIN H. - Calculus of variations classical and modern.
C.I.M.E., 1966, 177-192.

[5] HAUG E.J., PAN K.C. et STREETER T.D. - A computational method for optimal structural design : I piecewise uniform structures.
Int. J. num. Math. Eng. 5, 171-184 (1972).
II continuous problems.
Int. J. num. Math. Eng. 9, 649-667 (1975).

[6] JOURON C. - Sur un problème d'optimisation où la contrainte porte sur la fréquence fondamentale.
A paraître.

[7] MIGNOT F. - Contrôle de fonctions propres.
C.R. Acad. Sci., 280 Série A, 333-335 (1975).