PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE JAMET

Estimations d'erreur pour l'approximation de l'équation de la chaleur dans un domaine variable par des méthodes d'éléments finis espace-temps

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S4_A4_0>

ESTIMATIONS D'ERREUR POUR L'APPROXIMATION DE L'EQUATION
DE LA CHALEUR DANS UN DOMAINE VARIABLE PAR
DES METHODES D'ELEMENTS FINIS ESPACE-TEMPS

Pierre JAMET (*)

1) Introduction

La plupart des méthodes numériques pour résoudre des équations aux dérivées partielles paraboliques reposent sur une discrétisation en espace qui reste fixe au cours du temps, en particulier la plupart des méthodes d'éléments finis étudiées au cours de ces dernières années ([4], [5], [17], [18], [19], [20], [21]). Ces méthodes ne sont pas adaptées aux problèmes paraboliques dans des domaines dépendant du temps, en particulier aux problèmes de frontières libres.

C'est pour traiter de tels problèmes que l'auteur avec R. Bonnerot a proposé et expérimenté des méthodes basées sur l'utilisation d'éléments finis espace-temps ([1], [2], [9], [10]). Notons que la notion d'éléments finis espace-temps avait été introduite par J.T. Oden [16] (**), mais seulement dans le cas où les éléments sont le produit cartésien d'un élément spatial par un intervalle de temps, ce qui correspond à une discrétisation en espace qui reste fixe au cours du temps.

Une autre méthode d'éléments finis pour traiter le cas des domaines variables a été étudiée par M. Mori [14], [15] ; elle repose sur l'utilisation d'éléments finis spatiaux dépendant continûment du temps. Cette méthode est, en fait, un cas particulier de la méthode de Galerkin généralisée étu-

...

(*) Service de Mathématiques Appliquées, Centre d'Etudes de Limeil, Commissariat à l'Energie Atomique, B.P. 27, 94190 - VILLENEUVE SAINT GEORGES.

(**) L'auteur remercie le Professeur M. Zlámal de l'Université de Brno pour avoir attiré son attention sur cet article.

diée par A. Mignot [13] ; dans le même article, Mignot étudie également d'autres méthodes d'approximation (méthode du domaine auxilliaire fixe, méthode variationnelle de différences finies, méthode de régularisation elliptique). Signalons enfin les méthodes de différences finies étudiées par l'auteur [7] pour des équations paraboliques d'ordre 2 qui peuvent dégénérer ou présenter des singularités à l'instant initial ainsi que sur la frontière du domaine variable.

Dans le présent article, nous considérons des méthodes d'éléments finis espace-temps qui sont des variantes de celles utilisées précédemment ; la principale différence est l'introduction d'une discontinuité en temps ; à chaque pas de temps les éléments finis sont choisis indépendamment de ceux correspondant au pas précédent.

Le plan est le suivant. Dans la deuxième partie, nous décrivons le problème que nous voulons résoudre ; pour simplifier nous considérons l'équation de la chaleur, mais les résultats s'étendent sans difficulté à des équations paraboliques plus générales d'ordre supérieur à 2 et à coefficients variables. Dans la troisième partie, nous présentons une classe générale d'approximations du type de Galerkin discontinues en temps ; les discontinuités sont traitées comme dans les méthodes d'éléments finis discontinus étudiées par Lesaint et Raviart [11] pour l'équation du transport stationnaire. Dans la quatrième partie, nous établissons une majoration générale de l'erreur. Enfin, dans la cinquième partie, nous appliquons les résultats précédents à certaines méthodes d'éléments finis espace-temps ; nous obtenons une erreur d'ordre arbitrairement élevé à condition d'utiliser des éléments finis d'ordre correspondant.

Cet exposé est une version abrégée d'un article à paraître ; les démonstrations sont seulement esquissées ou simplement omises.

2) Le problème continu

On considère un intervalle de temps $0 \leq t \leq T$ et un domaine borné $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$, qui dépend continûment de t dans $[0,T]$. Désignons par $\Gamma(t)$ la frontière de $\Omega(t)$ et soient

$$\mathcal{G}_T = \{(P,t) \; ; \; P \in \Omega(t), \; 0 < t < T\},$$

$$\Sigma_T = \{(P,t) \; ; \; P \in \Gamma(t), \; 0 < t < T\}.$$

...

$\mathcal{G}_T$ est un domaine à (m+1) dimensions dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ et Σ_T est sa frontière "latérale". Nous supposerons que Σ_T est suffisamment régulière. Pour simplifier l'écriture, nous utiliserons la même notation $\Omega(t)$ pour le domaine $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ et pour la section correspondante de $\mathcal{G}_T$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(P,t)\ ;\ P \in \Omega(t),\ t \text{ fixé}\}$.

Soient f et u_0 deux fonctions données, $f \in L^2(\mathcal{G}_T)$, $u^0 \in L^2(\Omega(0))$, et désignons par Δ l'opérateur Laplacien relativement aux variables d'espace.

Nous considérons le problème suivant :

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f && \text{dans } \mathcal{G}_T,\\
&\text{b)}\quad u = 0 && \text{sur } \Sigma_T,\\
&\text{c)}\quad u = u^0 && \text{dans } \Omega(0).
\end{aligned}
$$

Pour l'existence et l'unicité d'une solution u classique, voir [6], [7] ; pour l'existence et l'unicité d'une solution faible, voir [12], [13]. Dans cet article nous supposerons l'existence d'une solution u suffisamment régulière pour la validité des estimations d'erreur.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$d = \mathrm{Max}\{\mathrm{diam}\ \Omega(t)\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$,

$(\cdot,\cdot)_{\Omega(t)}$ = produit scalaire dans $L^2(\Omega(t))$,

$|\cdot|_{\Omega(t)}$ = norme dans $L^2(\Omega(t))$,

$((\cdot,\cdot))_G$ = produit scalaire dans $L^2(G)$ où G est un sous-domaine de $\mathcal{G}_T$,

$\|\cdot\|_G$ = norme dans $L^2(G)$.

Nous utiliserons les mêmes notations pour les fonctions vectorielles ; ainsi $((\cdot,\cdot))_G$ désigne aussi le produit scalaire dans $(L^2(G))^m$ et l'on a, par exemple :

$$((\mathrm{grad}\ \varphi, \mathrm{grad}\Psi))_G = \iint_G \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{grad}\Psi\ dP\ dt,$$

où φ et Ψ sont deux fonctions scalaires suffisamment régulières.

...

Soient maintenant τ_0 et τ_1 deux nombres quelconques tels que $0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 \leqslant T$ et soit $G = G(\tau_0,\tau_1)$ l'intersection de $\mathcal{G}_T$ avec la bande $\tau_0 < t < \tau_1$, c'est-à-dire $G = \{(P,t)\ ;\ P \in \Omega(t),\ \tau_0 < t < \tau_1\}$. Définissons la forme bilinéaire :

$$(2.2)\qquad A_G(\varphi,\Psi) = -((\varphi,\frac{\partial\Psi}{\partial t}))_G + ((\mathrm{grad}\,\varphi,\ \mathrm{grad}\Psi))_G + (\varphi,\Psi)_{\Omega(\tau_1)} - (\varphi,\Psi)_{\Omega(\tau_0)}.$$

Alors, si u est une solution suffisamment régulière du problème (2.1), on déduit en multipliant scalairement l'équation (2.1 a) par une fonction φ quelconque nulle sur Σ_T(suffisamment régulière) et en intégrant par parties :

$$(2.3)\qquad A_G(u,\varphi) = ((f,\varphi))_G\ ,\ \forall\varphi \text{ et } \forall G = G(\tau_0,\tau_1) \text{ avec } 0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 \leqslant T.$$

Cette relation a un sens si l'on suppose seulement que la solution u appartient à l'espace $\mathcal{E} = L^2(0,T\ ;\ H^1_0(\Omega(t))\cap C^0([0,T]\ ;\ L^2(\Omega(t)))$ et si l'on choisit $\varphi \in \mathcal{E}$ telle que $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(\mathcal{G}_T)$. Elle peut même être étendue au cas où $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(0,T\ ;\ H^{-1}(\Omega(t)))$. La relation (2.3) est équivalente à celle utilisée par Lions [12] pour définir la solution faible du problème.

3) Approximations discontinues

Soit $\{t^n\ ;\ 0 \leqslant n \leqslant N\}$ une suite de nombres réels tels que $t^0 = 0$, $t^n < t^{n+1}$ et $t^N = T$. Soient $\Omega^n = \Omega(t^n)$, $G^n = G(t^n,t^{n+1}) = \{(P,t)\ ;\ P \in \Omega(t),\ t^n < t < t^{n+1}\}$ et $\tilde{G}^n = \bar{G}^n - \bar{\Omega}^n = \{(P,t)\ ;\ P \in \bar{\Omega}(t),\ t^n < t \leqslant t^{n+1}\}$. Pour chaque valeur de n telle que $0 \leqslant n \leqslant N-1$, soit Φ^n_h un espace de dimension finie de fonctions lipschitziennes définies sur $\bar{G}^n$ et s'annulant sur la frontière latérale de G^n. Soit V_h l'espace de toutes les fonctions v_h définies sur $\mathcal{G}_T$ telles que leur restriction à chaque $\tilde{G}^n$ coïncide avec la restriction à $\tilde{G}^n$ d'une fonction $\varphi_h \in \Phi^n_h$. Les fonctions $v_h \in V_h$ sont en général discontinues aux temps $t = t^n$; nous noterons $v^n_h = v_h(\cdot,t^n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant N$ et $v^{n+0}_h = \lim\{v_h(\cdot,t^n+\varepsilon)\ ;\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0\}$ pour $0 \leqslant n \leqslant N-1$; il résulte de la définition de l'espace V_h que l'on a $v^n_h = \lim\{v_h(\cdot,t^n-\varepsilon)\ ;\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0\}$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et pour tout $v_h \in V_h$.

Nous approchons le problème (2.1) par le problème suivant obtenu en discrétisant la relation (2.3).

...

Problème discret : *Chercher* $u_h \in V_h$ *tel que* $u_h^0 = u^0$ *et*

(3.1) $A_{G^n}(u_h, \varphi_h) = ((f, \varphi_h))_{G^n}$, *pour tout* $\varphi_h \in \Phi_h^n$ *et*

pour tout n, $0 \leq n \leq N-1$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_h du problème (3.1) ainsi que pour établir les majorations d'erreur, nous aurons besoin des formules suivantes. A chaque fonction $v_h \in V_h$ il correspond pour chaque n, $0 \leq n \leq N-1$, une fonction unique $\varphi_h = q^{(n)} v_h \in \Phi_h^n$ qui admet la même restriction à $\tilde{G}^n$ que la fonction v_h. Posons

(3.2) $A^n(u_h,v_h) = A_{G^n}(u_h,q^{(n)} v_h)$.

$A^n(u_h,v_h)$ est une forme bilinéaire définie sur $V_h \times V_h$ et l'on a :

(3.3)
$$A^n(u_h,v_h) = -((u_h,\frac{\partial}{\partial t} v_h))_{G^n} + ((\text{grad } u_h,\text{grad } v_h))_{G^n} + (u_h^{n+1},v_h^{n+1})_{\Omega^{n+1}} - (u_h^n,v_h^{n+0})_{\Omega^n} ,$$

(3.4)
$$A^n(v_h,v_h) = \|\text{grad } v_h\|^2_{G^n} + \frac{1}{2} |v_h^{n+1}|^2_{\Omega^{n+1}} - \frac{1}{2} |v_h^n|^2_{\Omega^n} + \frac{1}{2} |v_h^{n+0} - v_h^n|^2_{\Omega^n}.$$

Théorème 3.1

Le problème (3.1) *admet une solution unique* u_h *qui satisfait l'estimation*

(3.5)
$$\|\text{grad } u_h\|^2_{G(0,t^n)} + \frac{1}{2} |u_h^n|^2_{\Omega^n} \leq \frac{1}{2} (|u^0|_{\Omega^0} + \sqrt{2}\, d\, \|f\|_{G(0,t^n)})^2 ,$$

pour tout n, $0 \leq n \leq N$.

...

Démonstration : Pour tout n, (3.1) est équivalent à un système d'équations algébriques à matrice carrée d'ordre égal à la dimension de l'espace Φ_h^n. Il suffit donc de démontrer l'estimation (3.5) qui impliquera l'unicité et l'existence de la solution u_h. Pour démontrer (3.5), on prend $\varphi_h = q^{(n)}\, u_h$ dans (3.1), puis on applique (3.4) et l'inégalité de Poincaré.

Remarque : Contrairement à la plupart des autres méthodes, la méthode décrite ci-dessus ne nécessite pas une approximation de la fonction initiale ; on prend $u_h^0 = u^0$. Remarquons aussi que tous les espaces Φ_h^n, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, sont indépendants les uns des autres.

4) Estimation de l'erreur

Le résultat général est le suivant.

Théorème 4.1

Soient u *la solution du problème* (2.1) *et* u_h *la solution du problème discret* (3.1). *Alors* :

$$\|\operatorname{grad}(u-u_h)\|_{G(0,t^n)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, |u^n - u_h^n|_{\Omega^n} \leqslant$$

$$(4.1) \qquad \leqslant \sqrt{2}\, d \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u-v_h)\right\|^2_{G_\nu}\right)^{1/2} + \sqrt{2}\, \|\operatorname{grad}(u-v_h)\|_{G(0,t^n)} +$$

$$+ 2 \max_{1\leqslant\nu\leqslant n} |u^\nu - v_h^\nu|_{\Omega^\nu} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} |v_h^{\nu+0} - v_h^\nu|_{\Omega^\nu},$$

pour toutes les fonctions $v_h \in V_h$ *et pour tout* n, $1 \leqslant n \leqslant N$.

Démonstration :

Soit v_h une fonction arbitraire de V_h. En prenant $G = G^n$ et $\varphi = \varphi_h = q^{(n)}\, v_h$ dans (2.3) et dans (3.1), on obtient :

$$A_{G^n}(u-u_h, q^{(n)}\, v_h) = 0 \;,\; \forall\, v_h \in V_h.$$

...

Donc, on a :

(4.2) $\quad A_{G^n}(u-u_h,\ u-q^{(n)}u_h) = A_{G^n}(u-u_h,\ u-q^{(n)}v_h)$, pour tout $v_h \in V_h$.

En appliquant (3.4) et (3.3), on déduit :

(4.3)
$$\|\mathrm{grad}(u-u_h)\|^2_{G^n} + \frac{1}{2}|u^{n+1} - u_h^{n+1}|^2_{\Omega^{n+1}} - \frac{1}{2}|u^n - u_h^n|^2_{\Omega^n} +$$
$$+ \frac{1}{2}|u_h^{n+0} - u_h^n|^2_{\Omega^n} =$$
$$= -((u-u_h, \frac{\partial}{\partial t}(u-v_h)))_{G^n} + ((\mathrm{grad}(u-u_h), \mathrm{grad}(u-v_h)))_{G^n} +$$
$$+(u^{n+1}-u_h^{n+1}, u^{n+1}-v_h^{n+1})_{\Omega^{n+1}} - (u^n-u_h^n, u^n-v_h^n)_{\Omega^n} +$$
$$+(u^n-u_h^n, v_h^{n+0}-v_h^n)_{\Omega^n}, \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1.$$

Ensuite, on somme par rapport à n, on applique l'inégalité de Poincaré et, après quelques calculs, on obtient l'estimation (4.1).

Le théorème suivant est une variante du théorème 4.1.

<u>*Théorème 4.2*</u>

Soient u *et* u_h *définis comme dans le théorème 4.1. Alors,*

$$\|\mathrm{grad}(u-u_h)\|_{G(0,t^n)} + \frac{1}{\sqrt{2}}|u^n - u_h^n|_{\Omega^n} \leq$$

(4.4)
$$\leq \sqrt{2}\, d\, \|\frac{\partial}{\partial t}(u-v_h)\|_{G(0,t^n)} + \sqrt{2}\,\|\mathrm{grad}(u-v_h)\|_{G(0,t^n)} +$$
$$+ 2\,|u^n - v_h^n|_{\Omega^n},$$

pour toutes les fonctions $v_h \in V_h \cap C^0(\overline{\mathcal{G}}_T)$ *et pour tout n,* $1 \leq n \leq N$.

<u>Démonstration</u> : Semblable à celle du théorème 4.1.

Remarquons que le théorème 4.2 n'est intéressant que si l'espace $V_h \cap C^0(\overline{\mathcal{G}}_T)$ est suffisamment dense, ce qui n'est pas le cas en général (voir la remarque 5.2).

...

Notations : Nous allons maintenant introduire quelques notations supplémentaires qui seront utiles pour la partie suivante.

$x_1, x_2, \dots, x_m$ = coordonnées spatiales,

$j = (j_0, j_1, \dots, j_m)$ = multi-indice avec $j_0, j_1, \dots, j_m \geq 0$,

$j' = (j_1, \dots, j_m)$,

$$|j| = \sum_{\ell=0}^{m} |j_\ell| \ , \ |j'| = \sum_{\ell=1}^{m} |j_\ell| \ ,$$

$$\partial^j u = \partial^{|j|} u \,/ \partial t^{j_0} \, \partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m} \ ,$$

$$\partial^{j'} u = \partial^{|j'|} u \,/ \partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m} \ ,$$

$$\|D^s u\|_G = \Big(\sum_{|j|=s} \|\partial^j u\|_G^2 \Big)^{1/2}$$, pour tout entier $s \geq 0$ et tout $G \subset \mathscr{G}_T$,

$$|D^s u|_{\Omega(t)} = \Big(\sum_{|j'|=s} |\partial^{j'} u(\cdot,t)|^2_{\Omega(t)} \Big)^{1/2}$$, pour tout t, $0 \leq t \leq T$.

Les deux expressions ci-dessus sont définies si

$u \in H^s(\mathscr{G}_T) \cap C^0([0,T] \ ; H^s(\Omega(t)))$.

5) Eléments finis espace-temps

Dans cette partie nous ferons un choix pour les espaces Φ_h^n ; nous utiliserons des éléments finis espace-temps comme dans [1], [2], [9], [10]. Pour simplifier nous supposerons que le domaine $\mathscr{G}_T$ est polyédrique ; sinon, il faut employer des éléments courbes près de la frontière.

5.a) Eléments simpliciaux

Soit h un "petit" nombre positif et pour chaque n, $0 \leq n \leq N-1$, soit $\mathscr{C}_h^n$ un nombre fini de (m+1)-simplexes K qui satisfont les conditions suivantes

...

(5.1) $\bar{G}^n = \bigcup \{K \ ; \ K \in \mathcal{C}_h^n\}$,

(5.2) $h = \text{Max} \ \{h(K) \ ; \ K \in \mathcal{C}_h^n \ , \ 0 \leq n \leq N-1\}$,

où h(K) désigne le diamètre de K.

(5.3) $\overset{0}{K} \cap \overset{0}{K'} = \emptyset \ , \ \forall \ K,K' \in \mathcal{C}_h^n \ , \ K \neq K'$, où $\overset{0}{K}$ désigne l'intérieur de K.

(5.4) Si un sommet de K appartient à un élément K', alors c'est aussi un sommet de K', quels que soient K et K' $\in \mathcal{C}_h^n$.

Nous noterons $\mathcal{C}_h = \bigcup \{\mathcal{C}_h^n \ ; \ 0 \leq n \leq N-1\}$. Soit un entier $k \geq 1$ et soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$ par rapport aux variables t, x_1, ... x_m ; soit $\mathcal{P}_k(K)$ l'ensemble des restrictions à K des polynômes de $\mathcal{P}_k$. Pour chaque n, nous choisissons Φ_h^n égal à l'ensemble des fonctions continues définies sur $\bar{G}^n$ telles que leur restriction à chaque élément K appartienne à $\mathcal{P}_k(K)$, i.e.

(5.5) $\Phi_h^n = \{\varphi_h \ ; \ \varphi_h \in C^0(\bar{G}^n), \ \varphi_h|_K \in \mathcal{P}_k(K), \ \forall \ K \in \mathcal{C}_h^n\}$.

Avant d'énoncer le théorème suivant, nous allons donner une définition. Soit E_K l'ensemble de toutes les arêtes d'un (m+1)-simplexe K, avec $m+1 = p \geq 2$, et désignons par $\Theta(D,D')$ l'angle de deux droites quelconques D et D' dans $\mathbb{R}^p$.

<u>Définition 5.1</u>

L'angle de conditionnement d'un p-simplexe K est l'angle

(5.6) $\Theta(K) = \underset{D \in \mathbb{R}^p}{\text{Max}} \ \underset{D' \in E_K}{\min} \Theta(D,D')$

<u>Remarques</u> : Pour tous les p-simplexes non dégénérés, on a $0 < \Theta(K) < \pi/2$. L'angle $\Theta(K)$ approche $\pi/2$ si et seulement si *toutes* les arêtes de K sont presque parallèles à un même hyperplan. Dans le cas p = 2, K est un triangle et $\Theta(K)$ est égal à la moitié du plus grand angle de K.

...

Théorème 5.1

Choisissons l'espace Φ_h^n *selon la formule* (5.5), *pour* $0 \leq n \leq N-1$. *Soient* u *la solution du problème* (2.1) *et* u_h *la solution du problème discret* (3.1). *Supposons* $u \in H^{\ell}(\mathcal{G}_T) \cap C^0([0,T]\ ;\ H^{\ell}(\Omega(t)))$ *où* ℓ *est le plus petit entier tel que* $\ell \geq k+1$ *et* $\ell > (m+1)/2$. *Supposons que la discrétisation du domaine* $\mathcal{G}_T$ *satisfasse :*

(5.7) $\quad h < 1\ ,\ Nh < \lambda\ ,$

(5.8) $\quad \Theta(K) \leq \Theta_0 < \pi/2$, *pour tout* $K \in \mathcal{C}_h$,

où λ *et* Θ_0 *sont deux constantes positives. Alors :*

(5.9) $\quad \|\mathrm{grad}(u_h - u)\|_{G(0,t^n)} + |u_h^n - u^n|_{\Omega^n} < \gamma\, h^k$, *pour* $1 \leq n \leq N$, *avec*

$$\gamma = C \sum_{s=k+1}^{\ell} ((\cos \Theta_0)^{-1} \|D^s u\|_{G(0,t^n)} + \lambda \operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq t^n} |D^s u(\cdot,t)|_{\Omega(t)})\ ,$$

où C *est une constante positive qui ne dépend que de* m, k *et* d. *De plus, on a l'estimation suivante pour les sauts de* u_h :

(5.10) $$\Big(\sum_{\nu=0}^{N-1} |u_h^{n+o} - u_h^n|^2\Big)^{1/2} \leq C'\, \gamma\, h^k\ ,$$

où C' *est une constante absolue.*

<u>Démonstration</u> : Pour chaque élément K, soit $\mathcal{J}(K)$ l'ensemble des points de K dont les coordonnées barycentriques relativement aux sommets de K sont égales à des multiples entiers de $1/k$ et soit Π_K l'opérateur d'interpolation qui fait correspondre à chaque fonction $\varphi \in C^0(\bar{K})$ la fonction unique $\Pi_K \varphi \in \mathcal{P}_k(K)$ telle que $\Pi_K \varphi\ (P) = \varphi(P)$, $\forall\, P \in \mathcal{J}(K)$. Soit Π_h l'opérateur d'interpolation qui fait correspondre à chaque fonction $\varphi \in C^0(\mathcal{G}_T)$ la fonction unique $\Pi_h \varphi \in V_h$ telle que $\Pi_h \varphi = \Pi_K\, r_K \varphi$ à l'intérieur de tout élément $K \in \mathcal{C}_h$, où r_K désigne la restriction à K.

Pour démontrer l'estimation (5.9), on applique l'estimation générale du théorème 4.1 avec $v_h = \Pi_h u$, puis on applique dans chaque élément K le théorème 2.3 de [8](*). L'estimation (5.10) résulte ensuite de (4.3).

Remarque 5.1 : La condition $Nh < \lambda$ entraîne que la valeur moyenne des pas de temps doit être *au moins* de l'ordre de h. On peut en particulier prendre $N = 1$; on a alors une méthode complétement implicite pour tout le domaine $\mathcal{G}_T$. L'avantage de diviser l'intervalle $[0,T]$ en sous-intervalles est de fractionner le système d'équations algébriques (3.1) en sous-systèmes qui correspondent chacun à un sous-domaine G^n.

5.b) Eléments prismatiques

Pour simplifier nous utiliserons le vocabulaire correspondant au cas $m = 2$; ainsi nous dirons "triangle" au lieu de "m-simplexe", "plan" au lieu de "hyperplan", "prisme" au lieu de "hyperprisme", "cercle" au lieu de "hypersphère", ...

Pour tout n, $0 \leq n \leq N-1$, soit $\mathcal{C}_h^n$ un ensemble fini d'éléments $K = K_i^n$, $1 \leq i \leq I$, contenus dans $\bar{G}^n$ et satisfaisant les propriétés suivantes. La section de K_i^n par tout plan t = constante, $t^n \leq t \leq t^{n+1}$, est un triangle ; désignons par T_i^{n+o} et T_i^{n+1} les sections de K_i^n par les plan $t = t^n$ et $t = t^{n+1}$ respectivement ; ces deux triangles sont appelés les bases de l'élément K_i^n ; désignons par $T_i(t)$ la section de K_i^n par un plan t = constante, $t^n < t < t^{n+1}$; lorsque t varie entre t^n et t^{n+1}, chaque sommet du triangle $T_i(t)$ décrit un segment de droite dont les extrémités P_ℓ^{n+o} et P_ℓ^{n+1} sont chacune un sommet des triangles T_i^{n+o} et T_i^{n+1} respectivement. L'élément K_i^n est donc un prisme tordu ; en général, ce n'est pas un polyèdre ; les sommets des deux bases de K_i^n sont appelés sommets de K_i^n. On impose à l'ensemble $\mathcal{C}_h^n$ de satisfaire les propriétés (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4).

...

(*) Il y a une erreur typographique dans l'énoncé de ce théorème : il faut lire $W^{k-m+\ell,p}$ et $W^{k+\ell,p}$ au lieu de $W^{k-m+1,p}$ et $W^{k+1,p}$.

Remarquons que les ensembles $\mathcal{C}_h^n$ et $\mathcal{C}_h^{n-1}$ sont indépendants ; en particulier, contrairement à la méthode d'éléments finis continus décrite dans [2], l'ensemble $\mathcal{C}'^{n+o}_h$ de tous les triangles T_i^{n+o} qui sont une base d'un élément $K_i^n \in \mathcal{C}_h^n$ est indépendant de l'ensemble $\mathcal{C}'^n_h$ de tous les triangles T_i^n qui sont une base d'un élément $K_i^{n-1} \in \mathcal{C}_h^{n-1}$. (Dans [2], on avait $\mathcal{C}'^{n+o}_h = \mathcal{C}'^n_h$).

Soient k' et k" deux entiers $\geqslant 1$. Pour chaque élément $K \in \mathcal{C}_h^n$, soit $Q_{k',k''}(K)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies dans K dont la restriction à chaque triangle $T_i(t)$ est un polynôme de degré $\leqslant k'$ par rapport aux variables d'espace et dont la restriction à chaque arête $P_\ell^{n+o}\,P_\ell^{n+1}$ est un polynôme de degré k" par rapport à t. Nous prenons :

$$\text{(5.11)} \quad \Phi_h^n = \{ \varphi_h \; ; \; \varphi_h \in C^0(\bar{G}^n), \; \varphi_h|_K \in Q_{k',k''}(K), \; \forall\, K \in \mathcal{C}_h^n \}.$$

Soient :

$\mathcal{C}_h = \bigcup \{ \mathcal{C}_h^n \; ; \; 0 \leqslant n \leqslant N-1 \}$,

$k = \min\{k',k''\}$,

ℓ = le plus petit entier tel que $\ell \geqslant k+1$ et $\ell > (m+1)/2$,

ℓ' = le plus petit entier tel que $\ell' \geqslant k'+1$ et $\ell' > m/2$,

$h(K)$ = diamètre d'un élément $K \in \mathcal{C}_h^n$,

$h'(K) = (t^{n+1}-t^n)$ = "hauteur" de l'élément K,

$\rho(K)$ = minimum du diamètre du cercle inscrit dans le triangle $T_i(t)$ pour $t^n \leqslant t \leqslant t^{n+1}$ (avec $T_i(t^n) = T_i^{n+o}$ et $T_i(t^{n+1}) = T_i^{n+1}$).

Alors, on a le résultat suivant.

...

Théorème 5.2

Choisissons l'espace Φ_h^n *selon la formule (5.11), pour* $0 \leqslant n \leqslant N-1$. *Soient* u *la solution du problème (2.1) et* u_h *la solution du problème discret (3.1). Supposons* $u \in H^{\ell}(\mathcal{G}_T) \cap C^0([0,T] \; ; H^{\ell'}(\Omega(t)))$. *Supposons*

(5.12) $h < 1 \; , \; Nh < \lambda,$

(5.13) $h'(K)/h(K) \geqslant \sigma_0,$

(5.14) $\rho(K)/h(K) \geqslant \sigma_1$, *pour tout* $K \in \mathcal{E}_h$,

où λ , σ_0 *et* σ_1 *sont des constantes positives. Alors,*

(5.15) $\|\mathrm{grad}(u_h - u)\|_{G(0,t^n)} + |u_h^n - u^n|_{\Omega^n} < \gamma h^k + \gamma' h^{k'}$,

pour $1 \leqslant n \leqslant N$, *avec*

$$\gamma = C \sum_{s=k+1}^{\ell} \|D^s u\|_{G(0,t^n)} \quad ,$$

$$\gamma' = \lambda \, C' \sum_{s=k'+1}^{\ell'} \mathrm{Max} \, \{|D^s u(\cdot,t)|_{\Omega(t)} \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant t^n\},$$

où C *et* C' *sont deux constantes positives qui dépendent de* m, k', k", σ_0 , σ_1 *et* d. *De plus,*

(5.16) $\left(\sum_{\nu=0}^{N-1} |u_h^{n+o} - u_h^n|^2\right)^{1/2} \leqslant C_0(\gamma h^k + \gamma' h^{k'})$,

où C_0 *est une constante absolue.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant. Pour chaque élément $K \in \mathcal{E}_h^n$, soit $\mathfrak{J}(K)$ l'ensemble des points de K qui sont situés dans l'un des plans $t = t^n + \frac{j}{k''}(t^{n+1} - t^n)$ pour j entier, $0 \leqslant j \leqslant k''$,

...

et dont les coordonnées barycentriques relativement aux sommets du triangle $T_i(t)$ correspondant sont des multiples entiers de $1/k'$. Soit Π_K l'opérateur d'interpolation qui fait correspondre à toute fonction $\varphi \in C^0(\bar{K})$ la fonction unique $\Pi_K \varphi \in Q_{k',k''}(K)$, telle que $\Pi_K \varphi = \varphi$ en tous les points de $\mathcal{J}(K)$.

Lemme 5.1

Soit un élément K *qui satisfait les conditions* (5.13) *et* (5.14). *Alors, pour toute fonction* $\varphi \in H^\ell(K)$, *on a*

$$(5.17) \quad \|D(\varphi - \Pi_K \varphi)\|_K \leq C_1 \sum_{s=k+1}^{\ell} h^{s-1} \|D^s \varphi\|_K ,$$

où C_1 *est une constante qui dépend de* m, k', k'', σ_0 *et* σ_1.

Démonstration :

Supposons d'abord $h(K) = 1$. On a alors $\rho(K) \geq \sigma_0$ et $h'(K) \geq \sigma_1$. L'ensemble $\mathcal{K}$ de tous les éléments K qui satisfont ces conditions est compact. D'autre part, l'opérateur Π_K laisse invariants les polynômes de degré $\leq k$ par rapport aux variables $t, x_1, \dots x_m$. D'où, en appliquant le lemme 2.5 de [8] qui est une variante du lemme 7 de Ciarlet-Raviart [3], on obtient

$$\|D(\varphi - \Pi_K \varphi)\|_K \leq C_1(K) \sum_{s=k+1}^{\ell} \|D^s \varphi\|_K , \ \forall \varphi \in H^\ell(K),$$

où $C_1(K)$ est une constante qui dépend de K et de l'opérateur d'interpolation Π_K. L'estimation (5.17) en résulte en remplaçant $C_1(K)$ par son maximum pour tous les $K \in \mathcal{K}$ et en effectuant un changement d'échelle sur les dimensions de K.

Démonstration du théorème 5.2

Soit Π_h l'opérateur d'interpolation qui associe à chaque fonction $\varphi \in C^0(\mathcal{G}_T)$ la fonction $\Pi_h \varphi \in V_h$ telle que $\Pi_h \varphi = \Pi_K r_K \varphi$ à l'intérieur de

...

tout élément $K \in \mathcal{C}_h$, où r_K désigne la restriction à K. L'estimation (5.15) s'obtient en appliquant l'estimation générale du théorème 4.1 avec $v_h = \Pi_h u$, puis le lemme 5.1 précédent et une variante du théorème 5 de [3]. L'estimation (5.16) résulte ensuite de (4.3).

<u>Remarque 5.2</u> : Dans le cas $\mathcal{C}_h^{,n+o} = \mathcal{C}_h^{,n}$, on a $\Pi_h \varphi \in V_h \cap C^0(\mathcal{G}_T)$, quel que soit $\varphi \in C^0(\mathcal{G}_T)$. On peut donc appliquer le théorème 4.2 au lieu du théorème 4.1. Dans ce cas la condition $Nh < \lambda$ est inutile. Dans l'expression de γ' il faut remplacer λ par 1 et dans le second membre de (5.15) on peut remplacer $h^{k'}$ par $h^{k'+1}$.

REFERENCES

[1] R. Bonnerot et P. Jamet, A second order finite element method for the one-dimensional Stefan problem. Int. J. Numer. Meth. Eng., 8, 811-820, 1974.

[2] R. Bonnerot et P. Jamet, Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problem by space-time finite elements. A paraître dans J. Comp. Phys., 1977.

[3] P. Ciarlet et P-A. Raviart, General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 177-199, 1972.

[4] M. Crouzeix, Sur l'approximation des équations différentielles opérationnelles linéaires par des méthodes de Runge-Kutta. Thèse, Univ. de Paris VI, 1975.

[5] J. Douglas et T. Dupont, A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations. Math. Comp., 27, 121, 17-18, 1973.

[6] G. Fichera, On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order, <u>Boundary problems in differential equations</u>, Univ. of Wisconsin press, 1960.

[7] P. Jamet, Numerical methods and existence theorems for parabolic differential equations whose coefficients are singular on the boundary, Math. Comp., 22, 104, 721-743, 1968.

[8] P. Jamet, Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés, RAIRO, Anal. Num., 10, 3, 43-61, 1976.

[9] P. Jamet, Elements finis espace-temps pour la résolution numérique de problèmes de frontières libres, <u>Méthodes numériques en mathématiques appliquées</u>, Presses de l'université de Montréal, 1976.

[10] P. Jamet et R. Bonnerot, Numerical solution of the Eulerian equations of compressible flow by a finite element method which follows the free boundary and the interfaces, J. Comp. Phys., 18, 1, 21-45, 1975.

...

[11] P. Lesaint et P-A. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equation, Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations, C. de Boor editor, Academic press 1974.

[12] J. L. Lions, Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques, Annales de l'institut Fourier, 7, 143-182, 1957.

[13] A. L. Mignot, Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires, Rendiconti del seminario matematico della università di Padova, volume XL, 1968.

[14] M. Mori, Stability and convergence of a finite element method for solving the Stefan problem, publications of the research institute for mathematical sciences, Kyoto University, 12, 2, 1976.

[15] M. Mori, A finite element method for solving moving boundary problems, IFIP working conference on modelling of environmental systems, Tokyo, 167-171, 197[illegible].

[16] J. T. Oden, A general theory of finite elements II. Applications. Int. J. Numer. Meth. Eng. 1, 247-259, 1969.

[17] P-A. Raviart, The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations, Topics in numerical analysis, J.J.H. Miller editor, Academic press, 1972.

[18] M. F. Wheeler, An H^{-1} Galerkin method for parabolic problems in a single space variable, SIAM J. Numer. Anal., 12,5, 1975.

[19] O. C. Zienkiewicz et C. J. Parekh, Transient field problems : two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements, Int. J. Numer. Meth. Eng. 2, 61-71, 1970.

[20] M. Zlámal, Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems, Math. Comp., 29, 130, 350-359, 1975.

[21] M. Zlámal, Finite element methods in heat conduction problems, Proceedings of the Brunel conference on finite elements, 1975, to appear.