

F. PINI

**Méthodes numériques pour des problèmes hyperboliques  
avec conditions aux limites non linéaires**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4*

« Journées éléments finis », , p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1977\\_\\_S4\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__S4_A12_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

METHODES NUMERIQUES POUR DES PROBLEMES HYPERBOLIQUES  
AVEC CONDITIONS AUX LIMITES NON LINEAIRES

---

F. PINI

INTRODUCTION.

Nous considérons dans ce papier un problème modèle correspondant à un problème que l'on rencontre en hydraulique: le problème du coup de bélier dans des conduites forcées (voir p.ex. [6]).

On se place dans le plan  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(x,t)$  ( $x$  sera la coordonnée spatiale,  $t$  le temps). On considère  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,T[ \subset \mathbb{R}^2$  avec  $T > 0$  donné et l'on se propose de résoudre sur  $\Omega$  un système hyperbolique symétrique d'ordre 1 à 2 fonctions inconnues lorsque des valeurs initiales (en  $t=0$ ) sont prescrites; de plus on impose à la solution des conditions aux limites (non linéaire en  $x=0$ , linéaire en  $x=1$ ). La partie principale de l'opérateur hyperbolique symétrique considéré est linéaire. Dans le problème du coup de bélier les fonctions inconnues correspondent essentiellement à la pression et à la vitesse de l'eau dans la conduite; la condition de bord non linéaire exprime la relation entre ces deux grandeurs physiques à la sortie de la conduite forcée lorsque l'on actionne une vanne.

Le cas général du point de vue exact et numérique est étudié dans [16]. Pour le cas linéaire, voir aussi [5],[7],[8],[10] mais en particulier pour une seule dimension d'espace [3],[17],[18],[19]. Pour le cas non linéaire voir aussi [20].

Pour l'approximation numérique nous proposons des méthodes de Galerkin explicites et implicites. Dans le cas linéaire des méthodes similaires ont été développées dans [11],[12],[13].

Pour les démonstrations des résultats donnés dans ce papier nous renvoyons à [15],[16].

NOTATIONS.

Pour  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\bar{A}$  désigne l'adhérence de  $A$ ,  $\partial A$  la frontière de  $A$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$C^1(\Omega)$  désigne comme d'habitude l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  dont les dérivées partielles sont également continues sur  $\Omega$ .

$C^1(\bar{\Omega})$  désigne l'ensemble des éléments de  $C^1(\Omega)$  qui se laissent prolonger ainsi que leurs dérivées partielles à des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ .

$C_0^1(\Omega)$  désigne l'espace des éléments de  $C^1(\Omega)$  ayant leur support dans  $\Omega$ .

Soit  $X$  un ensemble

$L^2(X; d\mu)$  désigne l'ensemble des fonctions de carré sommable sur  $X$  relativement à la mesure  $d\mu$ . Lorsque  $d\mu$  est la mesure de Lebesgue ou une mesure standard (ds sur un arc, p.ex.) on note seulement  $L^2(X)$ .  $(\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X$  désignent le produit scalaire dans  $L^2(X; d\mu)$  et la norme associée.

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble

$P_m(B)$  désigne l'espace des polynômes sur  $B$  de degré  $\leq m$ .

$Q_m(B)$  désigne l'espace des polynômes sur  $B$  de degré  $\leq m$  en chacune des variables séparément.

Si  $u$  est une fonction définie sur  $B$  et si  $C$  est un sous-ensemble de  $B$ ,  $u|_C$  désigne la restriction de  $u$  à  $C$ .

I. POSITION DU PROBLEME MODELE, EXISTENCE ET UNICITE.

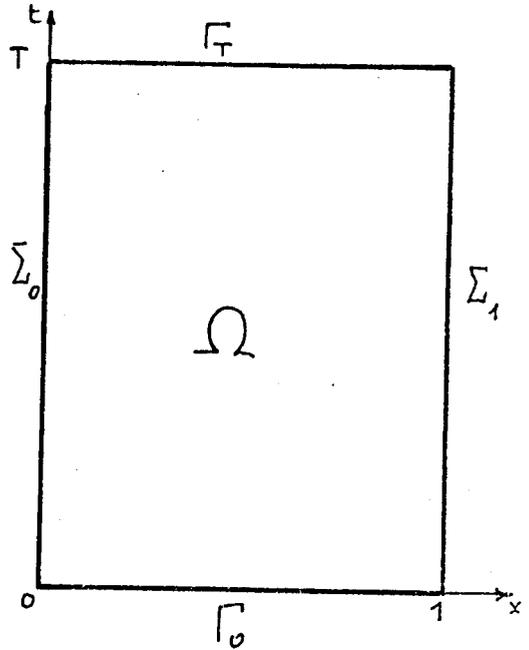
1. LE PROBLEME MODELE:

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,T[$ ;  $T > 0$  ;

$\Gamma_0 = [0,1] \times \{0\}$ ,  $\Gamma_T = [0,1] \times \{T\}$ ;

$\Sigma_0 = \{0\} \times ]0,T[$ ,  $\Sigma_1 = \{1\} \times ]0,T[$

(voir figure)



Soit A la matrice  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$

où  $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in C^1(\overline{\Omega})$  est telle que

(1)  $a(0,t) < 0$ ,  $a(1,t) < 0 \quad \forall t \in [0,T]$ .

Soit  $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $R(0) = 0$  et Lipschitzienne, i.e. on suppose qu'il existe une constante  $\alpha_R > 0$  telle que

(2)  $|R(x) - R(y)| \leq \alpha_R |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $u_0 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} \in L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ .

Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, monotone croissante.

On cherche  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  vérifiant

(3.1)  $a_t u + A a_x u + R(u) = f$

(3.2)  $u = u_0$  sur  $\Gamma_0$

(3.3)  $u_1 = g(u_2)$  sur  $\Sigma_0$

(3.4)  $u_2 = 0$  sur  $\Sigma_1$

Remarquons que l'hypothèse (1) implique que les points de  $\Sigma_0, \Sigma_1$  ne sont pas caractéristiques. On pourrait très bien remplacer (1) par:  $a(0,t) \neq 0$ ,  $a(1,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T]$ .

L'hypothèse (2) est naturelle.

L'hypothèse de monotonie sur la condition de bord correspond, dans le cas linéaire, à la notion de condition de bord maximale non négative introduite par Lax (voir [10]).

## 2. CHOIX DU CADRE FONCTIONNEL:

Soit  $E$  l'opérateur  $\partial_t + A\partial_x + R$ ,  $E_o = \partial_t + A\partial_x$  sa partie principale.

$E_o^* = -E_o - \partial_x A$  désigne l'adjoint formel de l'opérateur  $E_o$ . Pour  $u \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  nous dirons que  $E u \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  au sens faible s'il existe  $\chi \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  telle que

$$(u, E_o^* \varphi)_\Omega = (\chi, \varphi)_\Omega \quad \forall \varphi \in C^1(\Omega) \times C^1(\Omega).$$

Dans ce cas on pose  $E_o u = \chi$ ,  $Eu = \chi + R(u)$ .

Soit  $H(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \mid E_o u \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\}$  muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H(\Omega)} = (u, v)_\Omega + (E_o u, E_o v)_\Omega.$$

Remarquons que tous les espaces fonctionnels considérés dans ce papier sont réels.

### THEOREME 1.1:

(a)  $H(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H(\Omega)}$  est un espace de Hilbert séparable.

(b)  $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H(\Omega)$ .

Le résultat suivant montre l'existence de traces sur  $\partial\Omega$  des éléments de  $H(\Omega)$ .

### THEOREME 1.2: (Théorème des traces).

Il existe  $\alpha : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha = 0$  seulement en  $(0,0), (1,0), (0,T), (1,T)$  et une application linéaire continue

$\tau : H(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega; \alpha ds) \times L^2(\partial\Omega; \alpha ds)$  telle que  $\tau u = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ .

REMARQUES:

1) La fonction  $\alpha$  peut être choisie de sorte qu'elle s'annule linéairement au voisinage de ses zéros.

2) Des exemples prouvent que  $\tau(H(\Omega)) \not\subset L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$  en général.

3) Formule de Green.

Pour  $u, v \in H(\Omega)$  telles que  $\tau u \cdot \tau v \in L^1(\partial\Omega)$  on a

$$(4) \quad (E_o u, v)_\Omega = (u, E_o^* v)_\Omega + (A_v \tau u, \tau v)_{\partial\Omega},$$

où  $A_v = v_1 A + v_2 \text{Id}$ ,  $v = (v_1, v_2)$  est la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ .

En particulier pour  $u \in H(\Omega)$  telle que  $\tau u \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$  on a

$$(5) \quad (E_o u, u)_\Omega = -\frac{1}{2}((\partial_X A)u, u)_\Omega + \frac{1}{2} (A_v \tau u, \tau u)_{\partial\Omega}.$$

3. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION:

Nous pouvons maintenant donner un sens précis à (3.1), (3.2), (3.3),

(3.4): on cherche  $u \in H(\Omega)$  vérifiant (3.1) au sens faible et telle que les traces de  $u$  sur  $\Gamma_o, \Sigma_o, \Sigma_1$  vérifient (3.2), (3.3), (3.4) respectivement.

THEOREME I.3: (Existence, unicité, régularité sur  $\partial\Omega$ ).

Il existe un et un seul élément  $u \in H(\Omega)$  qui est solution du problème (3) dans le sens précisé ci-dessus. De plus on a que  $\tau u \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ .

Dans la suite notons  $u|_{\partial\Omega}$  pour  $\tau u$ ,  $u \in H(\Omega)$ . Pour  $X \subset \partial\Omega$  on note  $u|_X$  la restriction de  $\tau u$  à  $X$ .

REMARQUE: La condition de monotonie sur la non linéarité  $g$ , peut être affaiblie. Des exemples montrent toutefois qu'il existe des  $g$  (non croissantes) telles que le problème correspondant n'a pas de solution (ou en a une infinité) (voir [16]).

4. REGULARITE  $L^\infty$ :

Nous avons également montré, que pour des données essentiellement bornées, la solution est essentiellement bornée.

THEOREME I.4:

On suppose  $f \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Gamma_0) \times L^\infty(\Gamma_0)$ . Alors  
 $u \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ ,  $u|_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega)$ .

REMARQUE: Dans [1] on montre en particulier que le problème (linéaire, purement initial) considéré en dimension spatiale supérieure à 1 n'est en général pas bien posé dans  $L^\infty$  (voir aussi [2] et [14]).

II. APPROXIMATION NUMERIQUE

Reprenons le problème (I.3.1),(I.3.2),(I.3.3),(I.3.4) :

Trouver  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in H(\Omega)$  vérifiant

(1.1)  $Eu = f$  dans  $\Omega$  ;

(1.2)  $u = u_0$  sur  $\Gamma_0$  ;

(1.3)  $u_1 = g(u_2)$  sur  $\Sigma_0$  ;

(1.4)  $u_2 = 0$  sur  $\Sigma_1$  ;

avec  $E, f, u_0, g$  vérifiant les hypothèses faites plus haut.

Comme annoncé dans l'introduction nous allons considérer deux types de méthodes :

1. Des méthodes explicites avec éléments complètement discontinus. On en prouvera la stabilité sous la condition de Friedrichs-Courant-Lewy .
2. Des méthodes implicites, discontinues par bandes et inconditionnellement stables.

Ces méthodes peuvent en quelque sorte être combinées pour approximer des solutions discontinues ou avec dérivée première en  $x$  discontinue. On va voir qu'il suffit d'approximer les lignes de discontinuité (qui sont des caractéristiques) avec une précision suffisante et d'adapter

la géométrie des éléments finis aux lignes de discontinuité calculées. Nous esquissons seulement cette méthode dans la dernière partie de ce papier (pour plus de détails voir [15],[16]).

Soit  $P^+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P^- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ :  $P^+$ ,  $P^-$  sont les projecteurs sur

les sous-espaces propres positif respectivement négatif de  $A$  sur  $\Sigma_0$  (et  $\Sigma_1$ ).

Le lemme suivant montre que la condition de bord

(1.3)  $u_1 = g(u_2)$  sur  $\Sigma_0$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, monotone croissante

est équivalente à une condition de bord du type  $P^+u =$  fonction  $(P^-u)$  sur  $\Sigma_0$ , la fonction étant Lipschitzienne de constante  $\leq 1$ .

#### LEMME II.1:

Il existe une fonction et une seule  $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $u_1 = g(u_2)$  si et seulement si  $u_1 - u_2 = \tilde{g}(u_1 + u_2)$ . De plus  $\tilde{g}$  est Lipschitzienne de constante de Lipschitz  $\beta \leq 1$ ; on a  $\beta < 1$  si et seulement si  $g$  est Lipschitzienne et strictement monotone croissante.

Nous pouvons donc envisager la condition de bord équivalente à (1.3)

$$(2) \quad u_1 - u_2 = \tilde{g}(u_1 + u_2)$$

avec  $\tilde{g}$  Lipschitzienne de constante  $\leq 1$ .

#### 1. METHODES EXPLICITES:

Soient  $M, N \in \mathbb{N}$ ,  $h = \frac{1}{M}$ ,  $k = \frac{1}{N}$ . On suppose que  $h, k \rightarrow 0$  de façon à ce que  $\frac{k}{h} =: \lambda = \text{const.}$

Soit  $\tau_h$  la triangulation de  $\bar{\Omega}$  donnée dans la figure ci-après.

$T$  désigne un élément générique de  $\tau_h$ :

$\check{T}$  désigne un triangle générique  $\in \tau_h$  ayant son côté horizontal en haut (p.ex. DEF);  $\hat{T}$  désigne un triangle générique  $\in \tau_h$  ayant son côté horizontal en bas (p.ex. ABC).

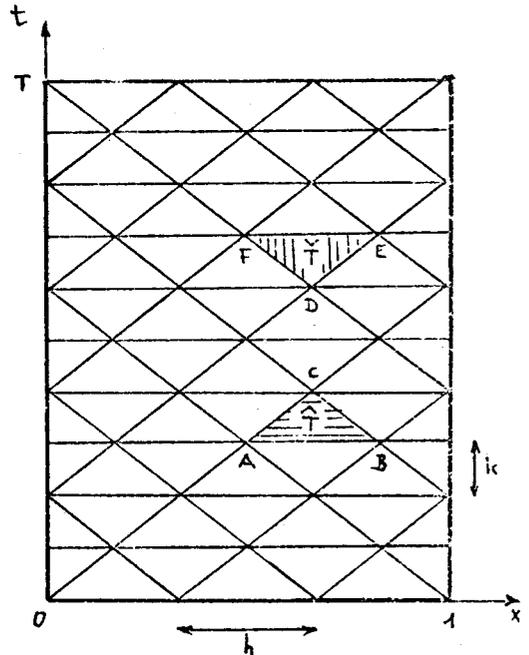
$v^{(T)} = (v_1^{(T)}, v_2^{(T)})$  est la normale extérieure unité à  $T \in \tau_h$ .

Posons  $A_v^{(T)} = v_1^{(T)}A + v_2^{(T)}Id$ .

Soit  $\partial-T = \{(x,t) \in \partial T \mid A_v^{(T)}(x,t)$   
est semi-définie négative}.

LEMME II.2:

- a)  $\partial-\hat{T}$  est constitué du côté horizontal de  $\hat{T}$ ,  $\forall \hat{T} \in \tau_h$ .
- b) Si  $\lambda \leq 1/(2 \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |a(x,t)|)$  alors  $\partial-\check{T}$  est formé des côtés obliques de  $\check{T}$ ,  $\forall \check{T} \in \tau_h$ .



REMARQUES:

1. On peut envisager des réseaux avec pas en espaces et en temps variables. Nous ne le faisons pas ici pour simplifier les notations.
2. La condition  $\lambda \leq 1/(2 \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |a(x,t)|)$  correspond à la condition de stabilité de Friedrichs-Courant-Lewy. On peut l'affaiblir en ne la vérifiant que localement (en t).

Introduisons encore quelques notations: pour un  $T \in \tau_h$  donné,  $\Delta = \Delta(T)$  désigne la réunion des éléments  $T' \in \tau_h, T' \neq T$  ayant un côté  $\subset \partial-T$ .

Si  $u$  est une fonction définie sur  $\bar{\Omega}$ ,  $T \in \tau_h$ ,  $u^{(T)}$ ,  $u^{(\Delta)}$  désignent les restrictions de  $u$  à  $T$ ,  $\Delta(T)$  respectivement. Dans la suite si  $\Delta = \phi$   $u^{(\Delta)} = 0$ .

Pour  $T \in \tau_h$  soit  $U_h^{(T)} = P_m(T) \times P_m(T)$ . On suppose  $m \geq 1$ . Soit  $U_h = \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid u|_T \in U_h^{(T)} \forall T \in \tau_h \text{ et } u_2|_{\Sigma_1} = 0\}$ .

Nous introduisons deux formes correspondant aux différentes expressions (1.3) et (2) des conditions de bord sur  $\Sigma_0$ .

Pour  $u, v \in U_h$  posons

$$(3) \quad a(u,v) = \sum_{T \in \tau_h} \{ (Eu^{(T)}, v^{(T)})_T - (A_v^{(T)}(u^{(T)} - u^{(\Delta)}), v^{(T)})_{\partial-T} +$$

$$+ (u_1^{(T)} - g(u_2^{(T)}), av_2^{(T)})_{\partial T \cap \Sigma_0} \} ;$$

$$(4) \quad \tilde{a}(u, v) = \sum_{T \in \tau_h} \{ (Eu^{(T)}, v^{(T)})_T - (A_v^{(T)}(u^{(T)} - u^{(\Delta)}), v^{(T)})_{\partial T} - \\ - \frac{1}{2} (u_1^{(T)} - u_2^{(T)} - \tilde{g}(u_1^{(T)} + u_2^{(T)}), a(v_1^{(T)} - v_2^{(T)}))_{\partial T \cap \Sigma_0} \} .$$

On considère les problèmes suivants: trouver  $u_h, \tilde{u}_h \in U_h$  vérifiant

$$(EX1) \quad a(u_h, v) = (f, v)_\Omega + (u_o, v)_{\Gamma_o} \quad \forall v \in U_h$$

$$(EX2) \quad \tilde{a}(\tilde{u}_h, v) = (f, v)_\Omega + (u_o, v)_{\Gamma_o} \quad \forall v \in U_h$$

REMARQUES:

1. On vérifie sans peine le caractère essentiellement explicite de ces schémas: la connaissance de la solution sur  $\Delta(T)$  pour un  $T \in \tau_h$  permet de déterminer la solution sur  $T$  moyennant la résolution d'un petit système algébrique.
2. Pour  $m = 1, a \equiv -1, \lambda = 1/2, R$  linéaire, les schémas (EX1), (EX2) sont continus et correspondent, sur les triangles intérieurs, au schéma aux différences de Friedrichs.

On peut aussi envisager des schémas du même genre mais avec des éléments différents: p.ex. on peut considérer la décomposition  $K_h$  de  $\bar{\Omega}$ .  $K_h = \{ \hat{T} \cup \Delta(\hat{T}) \mid \hat{T} \in \tau_h \} \cup \{ \check{T} \mid \check{T} \in \tau_h, \check{T} \cap \Gamma_T \neq \emptyset \}$ , i.e. essentiellement une décomposition de  $\bar{\Omega}$  en parallélogrammes; comme espaces  $U_h^{(K)}$  on considère, si  $K$  est un parallélogramme,  $Q_m(K) \times Q_m(K)$ ; pour les éléments triangulaires  $T \in K_h$  s'appuyant sur  $\Gamma_o$  ou  $\Gamma_T$  on prend  $U_h^{(T)} = P_m(T) \times P_m(T)$ . On peut introduire des formes analogues à (3), (4) et des problèmes associés du type (EX1), (EX2).

2. METHODES IMPLICITES:

Soient  $M, N, h, \tau, \lambda$  comme ci-dessus. On considère la décomposition  $K_h$  de  $\bar{\Omega}$  en rectangles de côtés  $h, k$  indiquée dans la figure ci-après.

Soit  $B_i = \{ (x, t) \mid (i-1)k \leq t \leq ik, 0 \leq x \leq l \}, i = 1, 2, \dots, N$ , la  $i$ -ème bande,

$$\Gamma_i = \{(x, t_i) \mid t_i = ik, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$\Gamma_{i-1}$  est la base de  $B_i$ .

Pour  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  on note

$$u^{(i)} = u|_{B_i} \quad i = 1, 2, \dots, N; \text{ on pose}$$

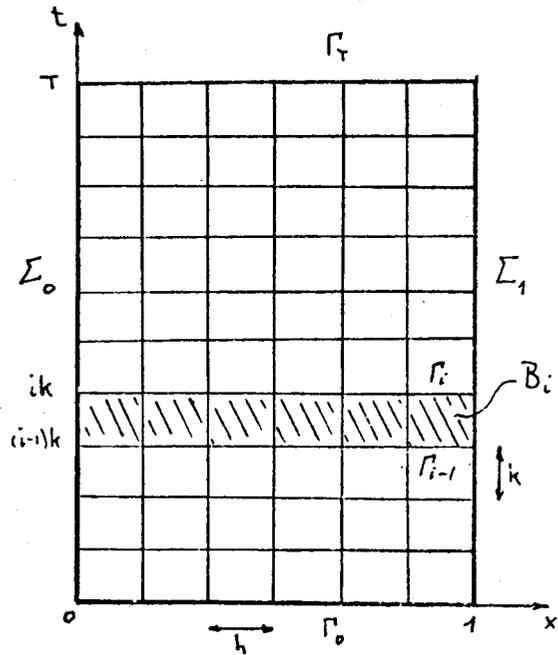
$$u^{(0)}|_{\Gamma_0} = 0.$$

On note  $U_h^{(i)} = \{u \in C^0(B_i) \times C^0(B_i) \mid u|_K \in Q_m(K) \times Q_m(K) \forall K \in B_i\}$

pour  $i = 1, 2, \dots, N$ .

$$U_h = \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid u|_{B_i} \in U_h^{(i)},$$

$$i = 1, 2, \dots, N; u_2|_{\Sigma_1} = 0\}.$$



Soit  $\mu \in ]0, 1[$  fixé tel que  $\mu\beta < 1$

où  $\beta$  est la constante de Lipschitz

de la non linéarité  $\tilde{g}$ . Soit  $M$  la matrice  $\mu^2 P^+ + P^-$ .  $M$  est définie positive.

On considère sur  $U_h \times U_h$  les formes

$$(5) \quad b(u, v) = \sum_{i=1}^N \{ (Eu^{(i)}, v^{(i)})_{B_i} + (u^{(i)} - u^{(i-1)}, v^{(i)})_{\Gamma_{i-1}} + (u_1^{(i)} - g(u_2^{(i)}), av_2^{(i)})_{\Sigma_0 \cap B_i} \};$$

$$(6) \quad \tilde{b}(u, v) = \sum_{i=1}^N \{ (Eu^{(i)}, Mv^{(i)})_{B_i} + (u^{(i)} - u^{(i-1)}, Mv^{(i)})_{\Gamma_{i-1}} - \frac{\mu^2}{2} (u_1^{(i)} - u_2^{(i)} - \tilde{g}(u_1^{(i)} + u_2^{(i)}), a(v_1^{(i)} - v_2^{(i)}))_{\Sigma_0 \cap B_i} \}.$$

et les problèmes approchés: trouver  $u_h, \tilde{u}_h \in U_h$  vérifiant respectivement

$$(IM1) \quad b(u_h, v) = (f, v)_{\Omega} + (u_0, v)_{\Gamma_0} \quad \forall v \in U_h$$

$$(IM2) \quad \tilde{b}(\tilde{u}_h, v) = (f, Mv)_{\Omega} + (u_0, Mv)_{\Gamma_0} \quad \forall v \in U_h.$$

Ces schémas sont implicites par bandes, i.e. la connaissance de

$u_h^{(i-1)}$  ou  $\tilde{u}_h^{(i-1)}$  (de  $u_0$  si  $i=1$ ) sur  $\Gamma_{i-1}$  permet de déterminer, moyennant la résolution d'un système algébrique d'ordre  $\sim 1/h$ , la solution sur  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Il est important de remarquer qu'une bonne numérotation des noeuds dans  $B_i$  permet d'obtenir des matrices de bande, de largeur de bande indépendante de  $h$  comme dans le cas d'éléments finis unidimensionnels ou des méthodes obtenues par des techniques de semi-discrétisation. (voir [15],[16]).

L'introduction de la matrice  $M$  permet d'obtenir une monotonie stricte de la forme  $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$  qui garantit une bonne stabilité de la méthode (voir Théorème II.3 ci-dessous); on obtient également une meilleure consistance relativement aux conditions de bord (voir Théorème II.7).

Une variante possible de ces schémas consiste à décomposer  $B_i$  en triangles. On obtiendra les mêmes résultats de stabilité, convergence, etc.

### 3. STABILITE. EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS APPROCHEES:

Sans restreindre la généralité nous faisons l'hypothèse de monotonie suivante :

H. Il existe une constante  $\gamma > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$(7) (R(u)-R(v), M(u-v))_{\Omega} \geq \gamma (u-v, M(u-v))_{\Omega} + \frac{1}{2} (\partial_x A(u-v), M(u-v))_{\Omega} \\ \forall u, v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

On pose  $M = \text{Id}$  pour les schémas (EX1), (EX2), (IM1).

Comme on vient de le mentionner cette hypothèse n'est pas restrictive: compte tenu de la propriété de Lipschitz de  $R$ , (voir (I.2)) elle peut toujours être satisfaite moyennant un changement des variables dépendantes du problème (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) du type  $u \rightarrow e^{-\sigma t} u$ .

Soit  $f, f' \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $u_0, u'_0 \in L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ . On considère  $\langle f, u_0 \rangle$ ,  $\langle f', u'_0 \rangle$  comme deux systèmes de données du problème (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).  $u_h, u'_h (\tilde{u}_h, \tilde{u}'_h)$  désignent les solutions éventuelles d'un des problèmes approchés considérés plus haut pour les données  $\langle f, u_0 \rangle$ ,  $\langle f', u'_0 \rangle$  respectivement.

THEOREME II.3: (Stabilité)

1. Méthodes explicites: On suppose l'hypothèse de Friedrichs-Courant-Lewy satisfaite:  $\lambda \leq 1/(2 \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |a(x,t)|)$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h, f, f', u_0, u'_0$  telle que  $(u_h, u'_h)$  solutions de (EX1),  $(\tilde{u}_h, \tilde{u}'_h)$  solutions de (EX2)

$$(8) \quad \|u_h - u'_h\|_{\Omega}^2 - \sum_{T, \partial T \in \Gamma_0} (A_v^{(T)}(u_h^{(T)} - u'_h{}^{(T)} - u_h^{(\Delta)} + u'_h{}^{(\Delta)}), u_h^{(T)} - u'_h{}^{(T)} - u_h^{(\Delta)} + u'_h{}^{(\Delta)})_{\partial T} + \|u_h - u'_h\|_{\Gamma_0}^2 - (ag(u_{h2}) - ag(u'_{h2}), u_{h2} - u'_{h2})_{\Sigma_0} \leq C \{ \|f - f'\|_{\Omega}^2 + \|u_0 - u'_0\|_{\Gamma_0}^2 \};$$

$$(9) \quad \|\tilde{u}_h - \tilde{u}'_h\|_{\Omega}^2 - \sum_{T, \partial T \in \Gamma_0} (A_v^{(T)}(\tilde{u}_h^{(T)} - \tilde{u}'_h{}^{(T)} - \tilde{u}_h^{(\Delta)} + \tilde{u}'_h{}^{(\Delta)}), \tilde{u}_h^{(T)} - \tilde{u}'_h{}^{(T)} - \tilde{u}_h^{(\Delta)} - \tilde{u}'_h{}^{(\Delta)})_{\partial T} + \|\tilde{u}_h - \tilde{u}'_h\|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Sigma_0}^2 \leq C \{ \|f - f'\|_{\Omega}^2 + \|u_0 - u'_0\|_{\Gamma_0}^2 \}.$$

2. Méthodes implicites: Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h, f, f', u_0, u'_0$  telle que  $(u_h, u'_h)$  solutions de (IM1),  $(\tilde{u}_h, \tilde{u}'_h)$  solutions de (IM2)

$$(10) \quad \|u_h - u'_h\|_{\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \|u_h^{(i)} - u'_h{}^{(i)} - u_h^{(i-1)} + u'_h{}^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 + \|u_h - u'_h\|_{\Gamma_0}^2 + \|u_h - u'_h\|_{\Gamma_T}^2 - (ag(u_{h2}) - ag(u'_{h2}), u_{h2} - u'_{h2})_{\Sigma_0} \leq C \{ \|f - f'\|_{\Omega}^2 + \|u_0 - u'_0\|_{\Gamma_0}^2 \};$$

$$(11) \quad \|\tilde{u}_h - \tilde{u}'_h\|_{\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \|\tilde{u}_h^{(i)} - \tilde{u}'_h{}^{(i)} - \tilde{u}_h^{(i-1)} + \tilde{u}'_h{}^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 + \|\tilde{u}_h - \tilde{u}'_h\|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Sigma_0}^2 \leq C \{ \|f - f'\|_{\Omega}^2 + \|u_0 - u'_0\|_{\Gamma_0}^2 \}.$$

On remarque que les schémas (EX1), (IM1) associés à la condition de bord (1.3) sont instables relativement aux traces sur  $\Sigma_0$  contrairement à ce qui se passe pour les schémas (EX2), (IM2) associés à la condition de bord (2). Ces instabilités seront en général compensées par une bonne consistance dans le cas où la solution est régulière.

En tout cas la condition de bord sur  $\Sigma_0$  sera mieux vérifiée par les schémas (EX2), (IM2) que par les schémas (EX1), (IM1).

Dans les cas où  $g$  est linéaire la condition de bord pourra être imposée aux éléments de  $U_h$  (comme on l'a fait ici pour la condition sur  $\Sigma_1$ ) et les schémas (EX1),(IM1) seront tout-à-fait satisfaisants.

Dans le cas linéaire à coefficients constants on montre dans [9] le résultat suivant: on suppose  $H$  non satisfaite; alors (8) est vérifiée pour  $h$  assez petit et quelque soit le degré  $m$  des polynômes considérés; (10) est vérifiée pour  $h$  assez petit et  $m=1,2$ . (pour  $m>2$  le problème reste ouvert).

La généralisation de ces résultats au cas non linéaire et à coefficients variables ne semble pas présenter de difficultés.

COROLLAIRE II.4: (Unicité des solutions approchées)

Les schémas (EX1),(EX2),(IM1),(IM2) admettent au plus une solution.

THEOREME II.5: (Existence des solutions approchées)

Les schémas (EX1),(EX2),(IM1),(IM2) admettent au moins une solution (donc exactement une en vertu du Corollaire II.4).

La démonstration de ce théorème utilise l'hypothèse  $H$  et le théorème du point fixe de Brouwer.

#### 4. CONSISTANCE ET CONVERGENCE:

Soit  $u \in H(\Omega)$  telle que  $u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ ,  $u_2|_{\Sigma_1} = 0$ . Soit  $\{U_h\}_{h \rightarrow 0}$  une des familles d'espaces d'approximation considérées plus haut. On a alors

THEOREME II.6: (Approximation)

Il existe une suite  $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$  telle que  $v_h \in U_h \cap [C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\bar{\Omega})] \forall h$  et

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{H(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{\partial\Omega} = 0.$$

La démonstration de ce théorème utilise la densité de  $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$  dans  $H(\Omega)$  (voir Théorème I.1) et des propriétés de l'opérateur de trace dans  $H(\Omega)$  (voir Théorème I.2).

Soit  $u$  la solution de (1.1),(1.2),(1.3),(1.4). Les approximations (EX1),(IM1) sont dites consistantes s'il existe une suite  $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$  telle que  $v_h \in U_h \forall h$  et

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{H(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|u_0 - v_h\|_{\Gamma_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \|v_{h1} - g(v_{h2})\|_{\Sigma_0} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sum_{T, \partial T \in \Sigma_0} (A_v^{(T)}(v_h^{(T)} - v_h^{(\Delta)}), v_h^{(T)} - v_h^{(\Delta)})_{\partial T} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (EX1)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \|v_h^{(i)} - v_h^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (IM1)}. \end{cases}$$

De même les approximations (EX2), (IM2) sont consistantes s'il existe une suite  $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$  telle que  $v_h \in U_h \forall h$  et

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{H(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|u_0 - v_h\|_{\Gamma_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \|v_{h1} - v_{h2} - \tilde{g}(v_{h1} + v_{h2})\|_{\Sigma_0} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sum_{T, \partial T \in \Gamma_0} (A_v^{(T)}(v_h^{(T)} - v_h^{(\Delta)}), v_h^{(T)} - v_h^{(\Delta)})_{\partial T} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (EX2)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \|v_h^{(i)} - v_h^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (IM2)}. \end{cases}$$

Remarquons qu'en général les  $v_h$  sont choisies dans  $C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\bar{\Omega})$ .

THEOREME II.7: (Consistance)

- a) Si  $g$  est Lipschitzienne alors (EX1) et (IM1) sont consistants.
- b) Si  $g$  est seulement localement Lipschitzienne et de plus  $u \in H(\Omega) \cap [(L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))]$  alors (EX1) et (IM1) sont consistants.
- c) Les schémas (EX2) et (IM2) sont consistants.

a) et c) sont un corollaire du Théorème d'approximation II.6; la démonstration de b) utilise ce dernier Théorème et le Théorème I.4.

Si la solution est régulière, p.ex.  $u \in H^{m+1}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)$  l'ordre de consistance est, dans tous les cas,  $O(h^m)$ .

Considérons maintenant le cas d'une solution ayant certaines discontinuités et donnons des ordres de consistance.

Supposons  $u$  régulière par morceaux: il existe  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \dots, \bar{\Omega}_K \subset \bar{\Omega}$  tels que

- 1)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^K \bar{\Omega}_i$ ; 2)  $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$  pour  $i \neq j$  est ou bien vide ou bien une portion

de ligne caractéristique; 3)  $u|_{\Omega_i} \in H^{m+1}(\Omega_i) \times H^{m+1}(\Omega_i)$ ,  $i=1,2,\dots,K$ .

Supposons que  $u \in H(\Omega)$  régulière par morceaux est discontinue le long des lignes constituant le réseau des intersections  $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$  (on sait (voir [4]) que le saut de  $u$  à travers ces lignes est dans le noyau de la matrice caractéristique  $A_\nu$  ( $\nu$  normale à la caractéristique) et l'on sait donner des équations différentielles ordinaires déterminant l'amplitude du saut sur toute la ligne lorsqu'on connaît cette amplitude en un point de la ligne, p.ex. sur  $\Gamma_0$ ).

Soit  $U_h$  l'un des espaces d'approximation considérés plus haut.

Dans cette situation on a :

THEOREME II.8: (Discontinuités de la fonction)

Il existe une suite  $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$  telle que  $v_h \in U_h \cap [C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\bar{\Omega})]$   $\forall h$  et telle que

$$(15) \quad \{ \|u-v_h\|_{H(\Omega)}^2 + \|u-v_h\|_{\partial\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq C h^{\frac{1}{2 + \frac{2}{m}}};$$

La constante  $C$  est indépendante de  $h$ ; elle dépend toutefois de  $u$  (norme  $H^{m+1}$  de  $u$  sur les  $\Omega_i$ , norme  $L^\infty$  des discontinuités).

Supposons maintenant  $u \in H(\Omega)$  régulière par morceaux continue mais de dérivée première en  $x$  discontinue le long du réseau des intersections  $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$ . On a alors

THEOREME II.9: (Discontinuités des dérivées)

Il existe une suite  $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$  telle que  $v_h \in U_h \cap [C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\bar{\Omega})]$   $\forall h$  et telle que

$$(16) \quad \{ \|u-v_h\|_{H(\Omega)}^2 + \|u-v_h\|_{\partial\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq C h^{\frac{3}{2 + \frac{2}{m}}}$$

où  $C$  est indépendante de  $h$  mais dépend de  $u$  (norme  $H^{m+1}$  de  $u$  sur les  $\Omega_i$ , norme  $L^\infty$  des discontinuités de  $\partial_x u$ ).

Ces théorèmes se démontrent par un procédé de régularisation/interpolation.

REMARQUE: Les ordres de consistance donnés dans les théorèmes II.8, II.9 peuvent être améliorés en choisissant une géométrie particulière du réseau des éléments finis. P.ex. dans le cas où les lignes caractéristiques sont des droites ( $a(x,t) \equiv \text{const}$ ) si pour le réseau triangulaire des schémas (EX1), (EX2) on choisit  $\lambda = \frac{1}{2|a|}$ , et si les lignes de discontinuité coïncident avec les lignes de noeuds alors ces ordres deviennent  $O(h^m)$ , comme dans le cas d'une solution régulière.

Un bon choix de la géométrie du réseau permet dans tous les cas de localiser les perturbations dues aux discontinuités.

L'idée qui est à la base de la méthode proposée ci-dessous pour approximer des solutions discontinues ou à dérivées première en  $x$  discontinue a son origine dans la remarque qu'on vient de faire.

De façon classique de la stabilité et de la consistance on déduit la convergence. Soit  $u$  la solution du problème (1.1),(1.2),(1.3),(1.4).

THEOREME II.10: (Convergence)

On suppose que les schémas considérés sont stables (Théorème II.3) et consistants (Théorème II.7).

a) On considère les schémas (EX1), (IM1). On suppose  $g^{-1}$  Lipschitzienne. Alors

$$(17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{\Omega} = \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{\Gamma_T} = \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u_0\|_{\Gamma_0} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ - \sum_{T, \partial T \in \Gamma_0} (A_v^{(T)} (u_h^{(T)} - u_h^{(\Delta)}), u_h^{(T)} - u_h^{(\Delta)})_{\partial T} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (EX1),} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \|u_h^{(i)} - u_h^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (IM1).} \end{cases}$$

b) on considère les schémas (EX2), (IM2). Alors

$$(18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_h - u\|_{\Gamma_T} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_h - u_0\|_{\Gamma_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_h - u\|_{\Sigma_0} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_{h_1} - \tilde{u}_{h_2} - \tilde{g}(\tilde{u}_{h_1} + \tilde{u}_{h_2})\|_{\Sigma_0} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ - \sum_{T, \partial T \in \Gamma_0} (A_v^{(T)} (\tilde{u}_h^{(T)} - \tilde{u}_h^{(\Delta)}), \tilde{u}_h^{(T)} - \tilde{u}_h^{(\Delta)})_{\partial T} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (EX2)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \|\tilde{u}_h^{(i)} - \tilde{u}_h^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour (IM2).} \end{cases}$$

On voit ainsi que les schémas (EX2), (IM2) garantissent une bonne approximation de la condition de bord:  $\| \tilde{u}_{h_1} - \tilde{u}_{h_2} - g(\tilde{u}_{h_1} + \tilde{u}_{h_2}) \|_{\Sigma_0} =$  ordre de consistance.

Par contre les schémas (EX1), (IM1) donnent en général seulement

$$\| u_{h_1} - g(u_{h_2}) \|_{\Sigma_0} = O(h^{n-\frac{1}{2}}) \text{ où } n \text{ est l'ordre de consistance.}$$

Cela confirme la remarque faite après le Théorème II.3 à propos de (EX1), (IM1).

### III. QUELQUES REMARQUES SUR UNE METHODE D'APPROXIMATION DE SOLUTIONS DISCONTINUES

Dans ce paragraphe nous esquissons les idées de base d'une méthode efficace pour approximer des solutions discontinues d'une équation modèle simple (voir [15],[16]).

Soit  $\Omega$  le domaine considéré jusqu'ici.

Soient  $a, \sigma, f$  des fonctions scalaires sur  $\Omega$ ,  $u_-$  une fonction scalaire sur  $\sum_0 \cup \Gamma_0$ .

On suppose  $a(0,t) > 0 \forall t \in [0,T]$  et suffisamment dérivable,  $\sigma > 0$  et continue partout sur  $\bar{\Omega}$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_-$  discontinue en  $x = x_0$ ,  $0 \leq x_0 < 1$ , très régulière ailleurs.

On considère le problème, trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u + \sigma u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\sum_0 \cup \Gamma_0} = u_- \end{cases}$$

On suppose  $u$  très régulière partout sauf le long de la ligne caractéristique  $\Gamma$  issue du point  $(x_0, 0)$ . L'équation de  $\Gamma$  est  $x = x(t)$  où

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,t), t \geq 0 ; \\ x(0) = x_0 . \end{cases}$$

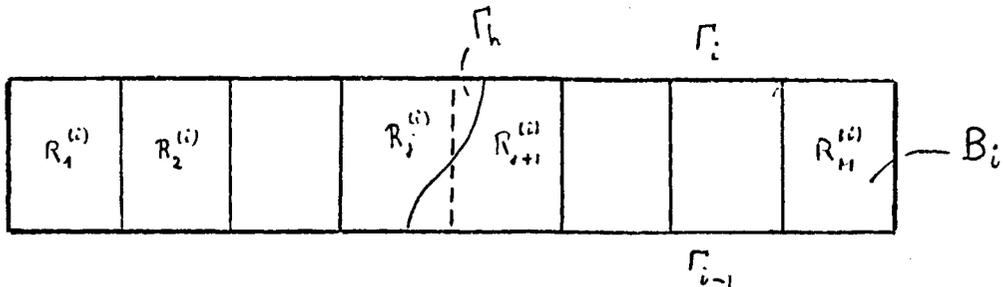
Remarquons que le long de  $\Gamma$   $v_1 a + v_2 \equiv 0$  où  $v = (v_1, v_2)$  est une normale à  $\Gamma$ .

On reprend la décomposition de  $\bar{\Omega}$  en rectangles considérée en II.2.  $h$  est le paramètre de finesse spatiale,  $k$  le pas en temps.

On résoud numériquement l'équation différentielle ordinaire (2) par pas de longueur  $k$ . On construit ainsi une ligne caractéristique approchée  $\Gamma_h$  d'équation  $x = x_h(t)$  où  $x_h$  est polynomiale sur chaque intervalle  $[ik, (i+1)k]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

On suppose  $|x(t) - x_h(t)| \leq Ch^{p+1}$  avec  $p > 0$ ,  $C$  constante indépendante de  $h$ . On aura alors  $v_1^h a + v_2^h = O(h^p)$  où  $v^h = (v_1^h, v_2^h)$  est une normale unité à  $\Gamma_h$ .

Dans la bande horizontale  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) on déforme le réseau rectangulaire, localement au voisinage de  $\Gamma_h$  de sorte à adapter la géométrie du réseau à la caractéristique approchée calculée. (voir figure) Soient  $R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, \dots, R_M^{(i)}$  les éléments du réseau déformé.



Les éléments adjacents à  $\Gamma_h$ ,  $R_j^{(i)}, R_{j+1}^{(i)}$  sont des rectangles déformés avec le côté commun,  $\Gamma_h$ , polynomial.

On remarque que si la condition de Friedrichs-Courant-Lewy ( $k/h \leq 1 / \max_{(x,t)} |a(x,t)|$ ) est satisfaite alors la déformation concerne au plus trois rectangles; deux rectangles seulement interviennent si  $k/h \leq 1 / (2 \max |a(x,t)|)$ . La déformation au voisinage de  $\Gamma_h$  est donnée essentiellement par une homothétie de la variable spatiale.

On pose (les notations se réfèrent à la figure ci-dessus)  $B_i^{(1)} = \bigcup_{\ell=1}^j R_\ell^{(i)}$  (la partie de  $B_i$  à gauche de  $\Gamma_h$ ),  $B_i^{(2)} = \bigcup_{\ell=j+1}^M R_\ell^{(i)}$  (la partie de  $B_i$  à droite de  $\Gamma_h$ ).

Sur  $R_\ell^{(i)}$ ,  $\ell \neq j, j+1$  on considère l'espace de polynômes  $Q_m^{(i)}(R_\ell^{(i)})$ , sur  $R_j^{(i)}$ ,  $R_{j+1}^{(i)}$  on considère les espaces  $\tilde{Q}_{m,j}$ ,  $\tilde{Q}_{m,j+1}$  respectivement, construits en "déformant"  $Q_m$  comme les éléments correspondants. On peut montrer (voir [15],[16]) que ces espaces "déformés" ont les propriétés d'approximation habituelles des espaces de type éléments finis dans l'espace de Sobolev  $H^{m+1}$ .

Soit  $U_h^{(i)} = \{v | v|_{B_i(r)} \in C^0(B_i^{(i)}), r=1,2; v|_{R_\ell^{(i)}} \in Q_m(R_\ell^{(i)}), \ell \neq j, j+1; v|_{R_j^{(i)}} \in \tilde{Q}_{m,j}; v|_{R_{j+1}^{(i)}} \in \tilde{Q}_{m,j+1}\}$ .

Sur  $U_h^{(i)} \times U_h^{(i)}$  définissons la forme

$$(3) \quad a^i(u,v) = \sum_{\ell} (Eu,v)_{R_\ell^{(i)}} + (u,v)_{\Gamma_{i-1}} + (u,av)_{\sum_0 \cap B_i} \quad (i=1,2,\dots,N).$$

Sur chaque  $B_i$  on résoud le problème: trouver  $u_h^{(i)} \in U_h^{(i)}$  telle que

$$(4) \quad a^i(u_h^{(i)}, v) = (f,v)_{B_i} + (u_h^{(i-1)}, v)_{\Gamma_{i-1}} + (u_h, av)_{\sum_0 \cap B_i}, \forall v \in U_h^{(i)}$$

où  $u_h^{(0)} = 0$  sur  $\Gamma_0$ . ( $i=1,2,\dots,N$ ).

Soit  $u_h$  la fonction définie sur  $\bar{\Omega}$  et telle que  $u_h|_{B_i} = u_h^{(i)}$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Soit  $u$  la solution de (1).

On suppose  $p > 1$ ; alors on a l'estimation d'erreur

$$(5) \quad \{ \|u - u_h\|_{\Omega}^2 + \|u - u_h\|_{\partial\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \|u_h^{(i)} - u_h^{(i-1)}\|_{\Gamma_i}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq C_1 h^m + C_2 h^{\frac{p+1}{2}}$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes indépendantes de  $h$  mais dépendantes de  $u$ .

Donc pour obtenir le même ordre de convergence que l'on obtient dans le cas d'une solution  $\in H^{m+1}(\Omega)$  il faut p.ex. que pour  $m=1$ ,  $p=2$ .

En utilisant les techniques de [9] on peut très vraisemblablement montrer que la restriction  $p > 1$  est superflue. Ainsi, pour  $m=1$ ,  $p=1$ , suffirait.

La généralisation de ces idées au cas d'un système ne pose pas de problèmes.

#### IV. AMELIORATION DE LA STABILITE

Revenons au problème (II.1.1),(II.1.2),(II.1.3)ou(II.2),(II.1.4). Nous proposons dans ce paragraphe une modification des schémas (EX1),(EX2), (IM1),(IM2) considérés au paragraphe II, donnant lieu à une meilleure stabilité. Jusqu'à présent il subsiste une dissymétrie entre la stabilité des schémas et la consistance nécessaire pour en garantir la convergence: plus précisément les relations de stabilité (II.8),(II.9),(II.10), (II.11) ne font intervenir que la norme  $\|\cdot\|_{\Omega}$  (en plus de certaines normes sur  $\partial\Omega$ ) alors que la consistance exige l'approximabilité de la solution exacte selon la norme  $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$  (voir (II.13),(II.14)). Les nouveaux schémas ci-dessous éliminent cette dissymétrie en introduisant une stabilité  $H(\Omega)$  (élément par élément).

Soit  $\alpha_R$  la constante de Lipschitz de la non linéarité  $R$  introduite en (I.2).

Soit  $\gamma$  la constante de monotonie de la non linéarité  $R$  introduite en (II.7).

Soit  $\beta$  la constante de Lipschitz de la non linéarité  $\tilde{g}$  (voir Lemme II.10); soit  $\mu \in ]0,1]$  tel que  $\mu\beta < 1$ . Soit  $\sigma > 0$  telle que  $\sigma\gamma\mu^2 > \frac{1}{2}\alpha_R^2$  ( $\mu = 1$  pour (EX1),(EX2),(IM1)).

Soit  $V_h$  l'un des espaces d'approximation envisagés plus haut (soit l'espace à éléments triangulaires associés aux schémas explicites, soit l'espace à éléments rectangulaires associés aux schémas implicites).

Soit  $c(.,.)$  l'une des formes définies sur  $V_h \times V_h$  par (II.3),(II.4) ou (II.5),(II.6) suivant la définition de  $V_h$ .

Introduisons sur  $V_h \times V_h$  la forme

$$(1) \quad C(v,w) = \sigma.c(v,w) + \sum_{\omega} (Ev, E_{\omega} w)_{\omega}$$

où - rappelons-le -  $E_{\omega}$  est la partie principale de l'opérateur hyperbolique symétrique  $E$ ; la somme dans le deuxième terme du membre de droite de (1) s'étend sur tous les éléments  $\omega$  de la décomposition de  $\Omega$  utilisée pour définir  $V_h$ .

On considère le problème suivant: trouver  $v_h \in V_h$  vérifiant

$$(2) \quad C(v_h, w) = \sum_{\omega} (f, E_{\omega} w + \sigma w)_{\omega} + \sigma \cdot (u_0, w)_{\Gamma_0}, \quad \forall w \in V_h.$$

On vérifie sans peine que le caractère explicite ou implicite par bandes, suivant les cas, est conservé.

Comme dans II.3 soient  $\langle f, u_0 \rangle$ ,  $\langle f', u'_0 \rangle$  avec  $f, f' \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $u_0, u'_0 \in L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  deux systèmes de données du problème considéré,  $v_h, v'_h$  les solutions (éventuelles) de (2) correspondantes.

Notons  $Q(v_h - v'_h)$  les termes des membres de gauche des relations de stabilité (II.8), (II.9), (II.10) ou (II.11) ne dépendant que des valeurs de  $v_h, v'_h$  sur le bord des éléments (et donc aussi de  $\Omega$ ). On a  $Q(v_h - v'_h) \geq 0$ .

THEOREME IV.1: (Stabilité)

Sous les hypothèses du Théorème II.3 il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h, f, f', u_0, u'_0$  telle que

$$(3) \quad \|v_h - v'_h\|_{\Omega}^2 + \sum_{\omega} \|E_{\omega}(v_h - v'_h)\|_{\omega}^2 + Q(v_h - v'_h) \leq C \{ \|f - f'\|_{\Omega}^2 + \|u_0 - u'_0\|_{\Gamma_0}^2 \}.$$

(Rappelons qu'en particulier dans le cas explicite l'hypothèse de Friedrichs-Courant-Lewy doit être satisfaite).

THEOREME IV.2: (Existence et unicité des solutions approchées)

Le problème (2) admet une et une seule solution.

L'unicité est un Corollaire du théorème précédent; l'existence se démontre en utilisant l'hypothèse de monotonie H (voir II.3) et le théorème du point fixe de Brouwer.

L'amélioration de la stabilité ainsi obtenue donne lieu à une convergence supplémentaire:

THEOREME IV.3: (Convergence)

On suppose le schéma considéré consistant (voir Théorème II.7). Alors en plus de (II.17), (II.18) (où  $u_h, \tilde{u}_h$  représentent cette fois les solutions de (2) dans les différents cas, explicites ou implicites, que nous avons désignés  $v_h$ ) on a

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\omega} [ \|u - v_h\|_{\omega}^2 + \|E_{\omega} u - E_{\omega} v_h\|_{\omega}^2 ] \right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

( $u$  est la solution exacte).

Les éventuels ordres de convergence sont les ordres de consistance (voir les remarques suivant le Théorème II.7 et les Théorèmes II.8 II.9).

Les remarques faites à la fin du paragraphe II à propos de l'approximation de la condition de bord sur  $\sum_0$  restent valables dans le cadre des schémas (2).

REFERENCES

- [1] Brenner, Ph.,  
The Cauchy problem for symmetric hyperbolic systems in  $L^p$ ,  
Math. Scand. 19 (1), 1966.
- [2] Brenner, Ph., Thomée V., Wahlbin, L.B.,  
Besov spaces and applications to difference methods for initial  
value problems., Springer-Verlag, 1975.
- [3] Campbell, L.L., Robinson, A.,  
Mixed problems for hyperbolic partial differential equations,  
Proc. London Math. Soc. (3) 5 (1955), 129-147.
- [4] Courant, R., Hilbert, D.,  
Methods of mathematical physics, vol. II, Interscience.
- [5] Duff, G.F.D.,  
Mixed problems for linear systems of first order equations,  
Can. J. of Math. 10, 1958, 127-160.
- [6] Evangelisti, G.,  
Teoria generale del colpo d'ariete col metodo delle caratteristiche,  
l'Energia elettrica No 2, 1965.
- [7] Friedrichs, K.O.,  
Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure and  
Appl. Math. XI, 33-418, (1958).
- [8] Friedrichs, K.O., Lax, P.D.,  
Boundary value problems for first order operators, Comm. Pure and  
Appl. Math. XVIII. 355-388, (1965).
- [9] Jaccard, Y.,  
Stabilité de méthodes de Galerkin implicites et explicites pour  
l'approximation numérique d'un système hyperbolique. Travail pra-  
tique de diplôme, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, janvier 1977.
- [10] Lax, P.D., Phillips, R.S.,  
Local boundary conditions for dissipative symmetric differential  
operators, Comm. Pure and Appl. Math. XIII, 477-455, (1960).
- [11] Lesaint, P.,  
Finite element methods for symmetric hyperbolic equations, Numer.  
Math. 21, 244-255, (1973).
- [12] Lesaint, P.,  
Finite element methods for the transport equation, R.A.I.R.O.,  
8ème année, août 1974, 67-94.

- [13] Lesaint, P.,  
Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, Thèse de doctorat d'Etat, Université P. et M. Curie, Paris 6, 1975.
- [14] Littman, W.,  
The wave operator and  $L^p$ -norms, J. Math. Mech. 12 (1963), 55-68.
- [15] Nassif, N.R., Pini, F.,  
Semi discrete and fully discrete Galerkin methods for solving the water hammer problem, à paraître.
- [16] Pini, F.  
Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, à paraître.
- [17] Thomée, V.  
Estimates of the Friedrichs-Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equations in two independent variables, Math. Scand. 5 (1), 1957.
- [18] Thomée, V.,  
Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method, Math. Scand. 6 (1), 1958.
- [19] Thomée, V.,  
Difference methods for two-dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems, Arch. Rat. Mech. Anal. 8, 1961.
- [20] Hamdache, K.A.,  
Thèse de troisième cycle, Université d'Alger, 1975.