JON AARONSON

Sur le jeu de Saint-Pétersbourg

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A3_0>

SUR LE JEU DE SAINT-PETERSBOURG

Jon Aaronson

Abstract : We prove a result on the asymptotic behaviour of the partial sums of $\mathbb{N}$-valued i.i.d.r.v.s. On the basic of this result, we discuss the "fairness" of the Saint-Petersburg game.

Résumé : Nous démontrons un résultat sur le comportement asymptotique des sommes partielles variables aléatoires, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$. A partir de ce résultat, nous discutons le caractère équitable du jeu de Saint-Pétersbourg.

Soit (Ω, a, P) un espace de probabilité et soit $x_n : \Omega \to \mathbb{N} (n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, de loi :

$$P(x_n = k) = f_k \ , \quad n,k \geq 1 \ .$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \ , \ c_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n \ , \ L(t) = \int_0^t c_{[s]} ds \ , \ a(t) = \frac{t}{L(t)} \quad \text{et}$$

$$b(t) = a^{-1}(t) \ .$$

Cette dernière est bien définie pour t grand, parce que $a(t)$ est une fonction strictement croissante continue.

La loi faible de grands nombres pour de telles variables aléatoires (non nécessairement intégrables) a été démontrée par W. Feller (cf. [2]) :

<u>Théorème de Feller</u> :

$$\exists \quad b_n \quad \text{telle que} \quad \frac{s_n}{b_n} \overset{p}{\to} 1$$

ssi $L(t)$ est une fonction à croissance lente.

Dans ce cas : $b_n \sim b(n)$.

On dit que $h(t)$ est (une fonction) <u>à croissance régulière d'indice α</u> si

$$\frac{h(\lambda t)}{h(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \lambda^{\alpha} \qquad \forall \lambda > 0 \quad ,$$

et que $h(t)$ est à croissance lente si on a la condition précédente avec $\alpha = 0$.

Il n'est pas difficile de voir que si $L(t)$ est à croissance lente, alors $b(t)$ est à croissance régulière d'indice 1. Il résulte donc, facilement du lemme de Borel-Cantelli que (résultat bien connu) :

<u>Proposition</u>

$$\text{Si} \quad \frac{s_n}{b_n} \overset{p}{\to} 1 \quad \text{et} \quad E(x_1) = \infty$$

$$\text{alors} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{b_n} = \infty \quad \text{p.s.}$$

Il est démontré dans [2] que $L(t)$ est à croissance lente ssi

$\text{Log } L(t) = x(t) + \int_0^t \varepsilon(s)ds$ ou $x(t) \to x$ et $\varepsilon(t) = o(1/t)$ que $t \to \infty$

Nous considérons la propriété plus forte :

(*) $\operatorname{Log} L(t) = x(t) + \int_0^t \varepsilon(s)ds$ ou $x(t) \to x$ et $\varepsilon(t) = o(1/t\log\log t)$ que $t \to \infty$.

Nous démontrons le :

Théorème :

Si $L(t)$ a la propriété (*), alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{b(n)} \geq e^{-1} \quad \text{p.s.}$$

mais avant celà, nous discutons :

Le Jeu de Saint-Pétersbourg

Un tour du jeu consiste en la procédure suivante :

Le joueur A jette une pièce jusqu'à la première apparition de "face" et paye au joueur B :

$2^{\text{nombre de jets}}$ pièces.

Si x_n est la somme que A paye au $n^{\text{ième}}$ tour, alors les $\{x_n\}$ sont des variables aléatoires, indépendantes, de loi

$p(x_n = 2^k) = 2^{-k}$, et donc, $L(t) \sim \operatorname{Log}_2 t$ que $t \to \infty$

Grâce au théorème de Feller :

$$\frac{1}{n \operatorname{Log}_2 n} s_n \xrightarrow{p} 1$$

Une interprétation de ce résultat a été donnée dans [1] (où on peut trouver une autre démonstration) : le jeu de St Pétersbourg est "équitable au sens classique" si B paye à A des "droits d'entrée cumulés" s'élevant à $b_n \sim n \operatorname{Log}_2 n$ pièces pour sa participation aux n premiers tours.

Notre résultat remet ce concept d'"équitable" en question, parce que la proposition et le théorème ($\operatorname{Log}_2 t$ a la propriété (*)) donnent :

$$\frac{1}{e} \leq \underset{n\to\infty}{\underline{\lim}} \frac{s_n}{n\mathrm{Log}_2 n} \leq \underset{n\to\infty}{\overline{\lim}} \frac{s_n}{n\mathrm{Log}_2 n} = \infty \quad \text{p.s.}$$

C'est-à-dire, avec le règlement ci-dessus, le joueur B est, p.s., avantagé.

Démonstration du Théorème

Pour commencer, nous réduisons le problème à la forme intégrable (iv).

Soit :

$$\varepsilon_0 = 1 \ , \ \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{[s_k=n]} \ (n\geq 1), \ u_n = E(\varepsilon_n) \ , \ \psi_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \phi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n \ .$$

D'abord, si

(i) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\psi_n}{a(n)} \leq e \quad \text{p.s.}$$

nous avons, grâce à la croissance régulière de $a(t)$ que $\forall\varepsilon > 0$:

$$\psi_n(\omega) \leq (1+\tfrac{\varepsilon}{2})\ e\ a(n) \leq a((1+\varepsilon)en) \quad \forall n \geq N(\omega,\varepsilon) \quad \text{p.s.}$$

et, parce que : $s_n \geq n$, $\psi_{s_n} \equiv n$, et $b = a^{-1}$:

$$s_n(\omega) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{b(n)}{e} \qquad \forall n \geq N(\omega,\varepsilon) \quad \text{p.s.}$$

Il est donc suffisant d'établir (i) .

Ensuite, soit $u(\lambda) = E(\phi_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n$ $c(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ et $\lambda_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Grâce à l'indépendance de $\{x_n\}$:

(ii) $$u(\lambda) = ((1-\lambda)\ c(\lambda))^{-1}$$

et, en raison de la croissance lente de $L(t)$:

(iii) $$c(\lambda) \sim L(\tfrac{1}{1-\lambda}) \quad \text{que} \quad \lambda \uparrow 1^-$$ (le théorème de Karamata, cf.[2])/

Il est maintenant suffisant d'établir :

(iv) $$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} \frac{\phi_{\lambda_n}}{u(\lambda_n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

parce que : $u(\lambda_n) \sim a(n)$ et $\phi_{\lambda_n} \geq (1-\frac{1}{n})^n \psi_n$.

Le reste de cette note est une démonstration de (iv) en utilisant la propriété (*), et l'inégalité de Tchebycheff.

Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1)$: $A(p,\lambda) = E((\phi_\lambda/u(\lambda))^p)$, et, pour $M > 1$: $p_n(M) = [M \operatorname{Log} n] + 1$, $A_n(M) = A(p_n(M),\lambda_n)$.

<u>Lemme</u> : Si, pour tout $M > 1$: $\log A_n(M) = o(\log n)$ que $n \to \infty$ alors (iv) est vrai.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Tchebycheff :

$$p(\phi_{\lambda_n} \geq e^{\varepsilon} u(\lambda_n)) \leq e^{-\varepsilon p_n(\frac{2}{\varepsilon})} A_n(\tfrac{2}{\varepsilon})$$

$$\leq A_n(\tfrac{2}{\varepsilon})/n^2$$

$$\leq n^{-3/2} \qquad \text{pour grand } n .$$

Donc, p.s., $\phi_{\lambda_n} \geq e^{\varepsilon} u(\lambda_n)$ seulement pour un nombre fini de n . □

Nous estimons maintenant le : $A_n(M)$.

En raison de l'indépendance de $\{x_n\}$:

$$E(\varepsilon_{n_1} \varepsilon_{n_2} \varepsilon_{n_3} \cdots \varepsilon_{n_p}) = u_{n_1} u_{n_2-n_1} \cdots u_{n_p-n_{p-1}} \quad \text{pour } n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p$$

et, en conséquence :

$$E(\phi_\lambda{}^p) \leq p! \prod_{k=1}^{p} u(\lambda^k) \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

Soit $L_1(t) = c(1 - \frac{1}{t})$, alors :

$$c(\lambda^k) = L_1(\tfrac{1}{1-\lambda^k}) \geq L_1\left(\tfrac{1}{k}\left(\tfrac{1}{1-\lambda}\right)\right)$$

et donc, par (ii) :

$$E(\phi_{\lambda_n}^{\;p}) \leq p! \prod_{k=1}^{p} ((1-\lambda_n^k)\; L_1(\tfrac{n}{k}))^{-1}$$

De plus, parce que $\lambda_n \leq e^{-1/n}$:

$$\frac{1}{1-\lambda_n^k} \leq \frac{e^{k/n}}{e^{k/n}-1} \leq \frac{n}{k}\, e^{k/n}$$

Nous avons :

$$E(\phi_{\lambda_n}^{\;p}) \leq n^p\, e^{\frac{p(p+1)}{2n}} \prod_{k=1}^{p} (1/L_1(\tfrac{n}{k}))$$

et, par (ii) :

$$A(p,\lambda_n) \leq e^{\frac{p(p+1)}{2n}} \prod_{k=1}^{p} (L_1(n)/L_1(\tfrac{n}{k}))$$

Par (iii), la fonction $L_1(t)$ a la propriété (*), et donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} A_n(M) &\leq \frac{p_n(M)^2}{n} + \sum_{k=2}^{p_n(M)} (\operatorname{Log} L_1(n) - \operatorname{Log} L_1(\tfrac{n}{k})) \\ &\leq \frac{p_n(M)^2}{n} + \sum_{k=2}^{p_n(M)} |x(n) - x(\tfrac{n}{k})| + \sum_{k=2}^{p_n(M)} \int_{\frac{n}{k}}^{n} |\varepsilon(s)|\, ds \, . \\ &= \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \, . \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\alpha_n \to 0 \quad , \quad \beta_n = o(p_n(M)) = o(\operatorname{log} n) \quad \text{que} \quad n \to \infty$$

parce que $\dfrac{p_n(M)}{n} \leq \dfrac{2M \operatorname{Log} n}{n} \to 0$.

En utilisant la propriété (*), nous avons :

$$\gamma_n \leq p_n(M) \sum_{k=1}^{p_n(M)^{-1}} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} |\varepsilon(s)|\, ds$$

$$= o\left(p_n(M) \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} \frac{ds}{s \log \log s}\right) \quad \text{que} \quad n \to \infty ,$$

$$\text{parce que} \quad \frac{n}{p_n} \to \infty .$$

Nous terminons la démonstration du théorème en montrant que la dernière somme est bornée.

$$\sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} \frac{ds}{s \log \log s} \leq \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \frac{1}{k} \frac{1}{\log \log \frac{n}{k+1}}$$

$$\leq \frac{\log p_n(M)}{\log \log \frac{n}{p_n(M)}} \to 1 \quad \text{que} \quad n \to \infty$$

$\square$

Références :

[1] W. Feller : Introduction to Probability Theory and its applications Wiley N.Y. vol. 1

[2] Ibid : vol. 2