PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JACQUES ROUSSEAU-EGELE

La loi forte des grands nombres pour des suites stationnaires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A11_0>

LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

POUR DES SUITES STATIONNAIRES

Jacques ROUSSEAU-EGELE

I. Introduction

- Soit $\{X_k\}$ une <u>suite stationnaire</u> (<u>au sens large</u>) de v.a. sur un espace de probabilité (Ω,a,P) : $X_k \in L^2$; EX_k et $EX_k \overline{X}_{k+n}$ sont indépendants de k . On supposera que $EX_k = 0$ et $E|X_k|^2 = 1$, pour tout k .

Posons,
$$R_1(n) = EX_k \overline{X}_{k+n}$$
$$R_2(n) = E\left|\frac{1}{n}\sum_1^n X_k\right|^2 .$$

On se propose de donner des conditions suffisantes pour la L.F.G.N., pour qu'on ait :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^n X_k = 0 \quad \text{p.s.}$$

Ces critères sont dus essentiellement à V. GAPOCHKINE dans le cas stationnaire. La démonstration repose sur une utilisation astucieuse de la représentation spectrale. Nous donnons ici une démonstration qui met en valeur l'utilisation d'un lemme de majoration. Ce lemme permet de donner des critères de convergence pour une classe plus étendue de suites de v.a. :

- $\{X_k\}$ est quasi-stationnaire si $E|X_k|^2 \leq c^2$, c constante finie et si $\sup\limits_k |E\, X_k\, \overline{X_{k+n}}| \leq \phi_1(n)$ où $\phi_1(n) \downarrow 0$, ϕ_1 fonction positive. On peut aussi imposer la condition plus faible suivante :

$$\sup_m E\left|\frac{1}{n}\sum_{m+1}^{m+n} X_k\right|^2 \leq \phi_2(n) \quad , \quad \phi_2(n) \downarrow 0 \quad , \quad \phi_2 \text{ fonction}$$

positive.

On supposera que $EX_k = 0$ et $E|X_k|^2 \leq 1$.

Pour ces suites, les conditions pour avoir la L.F.G.N. ont été étalbies par I. GAL et J. KOKSMA.

Exemples :

1. Si les X_k sont indépendantes et de même loi, $\{X_k\}$ est stationnaire.
2. Soit $\{\xi_k\}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi. On suppose que $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma^2 < \infty$. Posons $X_n = \sum\limits_{\infty}^{\infty} a_k\, \xi_{n+k}$.
   Alors, $\{X_n\}$ est une suite stationnaire au sens strict (la loi de $(X_{n+k},\dots,X_{m+k})$ est la même que celle de $(X_n,\dots,X_m)$). Si les ξ_k ne sont pas indépendantes, mais seulement orthogonales, alors $\{X_n\}$ est seulement stationnaire (au sens large).
3. Soit $\psi(k) \downarrow 0$, une fonction positive telle que $\sum\limits_k \frac{\psi(k)}{k} = \infty$. Il est facile de voir qu'il existe une suite $b_n \uparrow \infty$ telle que $\sum\limits_1^{\infty} p_n = \infty$, $p_n = \frac{\psi(2^n)}{b_n} < 1$. Soit une suite $\{\xi_n\}$ de v.a. indépendantes, où ξ_n prend les valeurs $b_n^{1/2}$, $-b_n^{1/2}$, 0 avec respectivement les probabilités $\frac{p_n}{2}$, $\frac{p_n}{2}$ et $1-p_n$.
   Posons $X_1 = 0$, $X_k = \xi_n$ si $2^{n-1} < k \leq 2^n$.
   On a $EX_k\, X_j = \psi(2^n)$ s'il existe n tel que $2^{n-1} < k , j \leq 2^n$ et $EX_k\, X_j = 0$ dans le cas contraire.
   On voit que la suite $\{X_k\}$ est quasi-stationnaire, mais non stationnaire.

II. Représentation spectrale d'une suite stationnaire

Les démonstrations des résultats énoncés ici se trouvent dans le livre de I. IBRAGIMOV et Y. LINNIK, chapitre 16.

1 - On note M_p^q la tribu engendrée par $X_p,\dots,X_q$, $-\infty \leq p,q \leq \infty$.

H_p^q le sous-espace de L^2 des v.a. M_p^q - mesurables.

L_p^q le sous-espace fermé de L^2 engendré par les combinaisons linéaires de $X_p,\dots,X_q$.

On a $L_p^q \subset H_p^q$.

Si $\{X_k\}$ est stationnaire au sens strict, on est dans le cas de la théorie ergodique pour une transformation conservant la mesure.

Si $\{X_k\}$ est stationnaire au sens large, on définit un opérateur U sur $L_{-\infty}^{\infty}$ par :

$$U(\sum_k c_k X_k) = \sum_k c_k X_{k+1} .$$

L'opérateur U étant unitaire, on considère sa représentation spectrale et on peut donc écrire :

$$R_1(n) = \langle U^n X_0, X_0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, d\langle E_\lambda X_0, X_0\rangle$$

La mesure $\mu(d\lambda) = d\langle E_\lambda X_0, X_0\rangle$ est appelée <u>mesure spectrale de la suite $\{X_k\}$</u>.

Comme $R_1(0) = 1$, on a $R_1(n) = \hat{\mu}(n)$, μ étant la transformée de Fourier d'une probabilité.

<u>Remarques</u> :

1. μ détermine R_1 et réciproquement.

2. Si $\{X_k\}$ est gaussien, μ détermine $\{X_k\}$.
3. μ a une densité si et seulement si $\{X_k\}$ est donné par l'exemple 2.

   Si μ a une densité, alors $\hat{\mu}(n) \to 0$ à l'infini, cette dernière propriété impliquant que μ est diffuse.
4. Si μ est la mesure de Lebesgue, alors $R_1(n) = 0$, $n \neq 0$ et $\{X_k\}$ est orthogonale.

2 - On démontre que si $\{X_k\}$ est stationnaire, de mesure spectrale μ , alors il existe un processus à accroissements orthogonaux $Z(\lambda)$ tel que :

$$X_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dZ(\lambda)$$

avec $E|dZ(\lambda)|^2 = d\mu(\lambda)$.

On a pour tout λ, $Z(\lambda) = E_\lambda X_0$ p.s.

Remarques :

1. $Z(\lambda)$ détermine $\{X_k\}$.
2. Si $\{X_k\}$ est gaussien, alors $Z(\lambda)$ est gaussien.

III. Un lemme de majoration

Lemme :

Soient $\{z_j\}$ une suite de nombres complexes et $\{t_k\}$ une suite de nombres réels positifs. Alors on a :

$$\max_{2^p<n\leq 2^{p+1}} \left| \sum_{j=2^{p+1}}^{n} z_j \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{p} t_k \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in(0,1)^k} \left|\sum{}' z_j\right|^2\right)$$

où $n = 2^p+1+\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i\, 2^{p-i}$ et où $\sum'$ est la somme sur les j prise de l'indice $2^p+1+\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, 2^{p-i}$ à l'indice $2^p+1+\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, 2^{p-i} + 2^{p-k-1}$.

Preuve :

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{j=2^p+1}^{n} z_j \right| \leq \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{2^p+1+\sum_1^k \varepsilon_i 2^{p-i}}^{2^p+1+\sum_1^k \varepsilon_i 2^{p-i}+\varepsilon_{k+1} 2^{p-k-1}} z_j \right| \leq \sum_{k=1}^{p} t_k^{-1/2}\, t_k^{1/2} \left|\sum{}' z_j\right|,$$

d'où à l'aide de l'inégalité de Cauchy :

$$\left| \sum_{j=2^p+1}^{n} z_j \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{p} t_k \left|\sum{}' z_j\right|^2\right) .$$

Le lemme s'obtient en prenant le maximum dans le membre de gauche de l'inégalité, pour $2^p < n \leq 2^{p+1}$ et en majorant le membre de droite par la somme des valeurs que peut prendre $|\sum' z_j|$, quand n varie de 2^p+1 à 2^{p+1} .

■

Soit $S_n = \sum_1^n X_k$.

THEOREME :

Soit $\{X_k\}$ une suite stationnaire (large). Alors on a :

$$\lim_{p\to\infty} \max_{2^p<n\leq 2^{p+1}} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{S_{2^p}}{2^p} \right| = 0 \quad \text{p.s.} \tag{1}$$

Si $\{X_k\}$ est quasi-stationnaire, (1) est vérifiée si :

$$\sum_1^\infty \frac{\phi_i(k)}{k} < \infty \qquad (i = 1,2) \qquad (2)$$

Preuve :

- Traitons d'abord le cas quasi-stationnaire.

Comme $(a + b)^2 \leq 2\,a^2 + 2\,b^2$, on a pour $2^p < n \leq 2^{p+1}$:

$$\max_n \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2^p}}{2^p}\right|^2 \leq \frac{1}{2^{2p-2}}|S_{2^p}|^2 + \frac{1}{2^{2p-1}} \max_n \left|\sum_{2^p+1}^{n} X_j\right|^2 ,$$

et d'après le lemme, on a :

$$E \max_n \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2^p}}{2^p}\right|^2 \leq 4\,E\left|\frac{S_{2^p}}{2^p}\right|^2 + \frac{1}{2^{2p-1}} \left(\sum_1^p t_k^{-1}\right)\left(\sum_1^p t_k\, 2^k \max_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)} E\left|\sum{}' X_j\right|^2\right) \quad (3)$$

Considérons le second terme du membre de droite de (3).
Si $1 < q < 2$ et $t_k = q^k$, ce terme est égal à :

$$0\left(\sum_1^p \left(\frac{q}{2}\right)^k \phi_2(2^{p-k})\right)$$

et $\displaystyle\sum_1^p \left(\frac{q}{2}\right)^k \phi_2(2^{p-k}) = 0(\phi_2(2^{p/2})) + 0\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{p/2}\right)$

Comme $\displaystyle\sum_k \frac{\phi_2(k)}{k} < \infty$, on a $\displaystyle\sum_p \phi_2(2^{p/2}) < \infty$.

De là, on déduit que $\displaystyle\frac{1}{2^{2p-1}} \max_n \left|\sum_{2^p+1}^{n} X_j\right|^2$ tend vers 0 p.s. quand p tend vers l'infini.

Pour démontrer (1) dans le cas quasi-stationnaire, il suffit donc de démontrer que $\displaystyle\sum_p E\left|\frac{S_{2^p}}{2^p}\right|^2 < \infty$, qui résulte aussi (2).

Le cas $i = 1$, se réduit au cas $i = 2$, par un calcul simple.

- Dans le cas stationnaire, les majorations doivent être être plus fines pour éviter la condition (2).

On a :

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2^p}}{2^p} = \sum_{2^p+1}^{n} \left(\frac{S_j}{j} - \frac{S_{j-1}}{j-1}\right)$$

et donc :

$$E \max_n \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2^p}}{2^p}\right|^2 \leq \left(\sum_1^p t_k^{-1}\right)\left(\sum_1^p t_k\, 2^k \max_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)} E \left| \sum{}' \left(\frac{S_j}{j} - \frac{S_{j-1}}{j-1}\right)\right|^2\right)$$

et si $a = 2^p+1+\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, 2^{p-i}$, $b = 2^p+1+\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, 2^{p-i}+2^{p-k-1}$, on a :

$$= \left(\sum_1^p t_k^{-1}\right)\left(\sum_1^p t_k\, 2^k \max_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)} E \left|\frac{S_b}{b} - \frac{S_a}{a}\right|^2\right)$$

Or on a :

$$\frac{S_a}{a} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a}\left(\frac{e^{ia\lambda}-1}{e^{i\lambda}-1}\right) Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} K_a(\lambda)\, Z(d\lambda)$$

où $K_a(\lambda) = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{ia\lambda}-1}{e^{i\lambda}-1}\right)$ et $Z(\lambda)$ est le processus à accroissements orthogonaux associé à $\{X_k\}$.

On a aussi :

$$\frac{S_b}{b} - \frac{S_a}{a} = \int_{-\pi}^{\pi} (K_b(\lambda) - K_a(\lambda))\, Z(d\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} K_{a,b}(\lambda)\, Z(d\lambda)$$

Pour $K_{a,b}(\lambda) = K_b(\lambda) - K_a(\lambda)$, on vérifie facilement que :

* $|K_{a,b}(\lambda)| \leq C(b-a)|\lambda|$, $0 < a < b$, $|\lambda|\, b \leq \pi$

* $|K_{a,b}(\lambda)| \leq C(b-a)a^{-1}$, $0 < a < b$, $|\lambda| \leq \pi$

* $|K_{a,b}(\lambda)| \leq C\, a^{-1}\, |\lambda|^{-1}$, $0 < a < b$, $|\lambda| \leq \pi$

Donc :

$$|K_{a,b}(\lambda)| \leq \begin{cases} C\ 2^{p-k-1}\ |\lambda| & , \quad 0 \leq |\lambda| \leq 2^{-p} \\ C\ 2^{-k-1} & , \quad 2^{-p} < |\lambda| < 2^{-(p-k)} \\ C\ 2^{-p}\ |\lambda|^{-1} & , \quad 2^{-(p-k)} < \lambda \leq \pi \end{cases}$$

et l'on obtient le résultat en étudiant la convergence de trois séries (voir [4]).

■

Corollaire 1.

Si la condition (2) est vérifiée pour une suite quasi-stationnaire, alors on a la L.F.G.N.

Remarques :

1. Le théorème précédent montre, que dans le cas stationnaire les conditions pour avoir la L.F.G.N. vont porter sur $\frac{S_{2^p}}{2^p}$, car (1) est automatiquement vérifié, ce qui n'est pas le cas pour une suite quasi-stationnaire ((2) impliquant alors (1) et $\frac{S_{2^p}}{2^p} \to 0$ p.s.).

2. Reprenons l'exemple 3. On voit que $\phi_1(k) \leq \psi(k)$. Si de plus, on suppose que $k\psi(k)$ est croissante, il est facile de démontrer que $\phi_2(k) \leq \psi(k)$. D'autre part, on a :

$$\frac{2S_{2^n}}{2^n} - \frac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}} = 2^{-n+1} \sum_{2^{n-1}+1}^{2^n} X_k = \xi_n$$

Les v.a. ξ_n sont indépendantes, $|\xi_n| = b_n^{1/2}$ avec probabilité b_n

et $\sum_n p_n = \infty$. D'après le lemme de BOREL-CANTELLI, on déduit que :

$$\overline{\lim_n} \left|2 \frac{S_{2^n}}{2^n} - \frac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}\right| = \infty \qquad \text{p.s.}$$

et donc $\qquad \overline{\lim_n} \left|\frac{S_n}{n}\right| = \infty \quad$ p.s.

Donc, le théorème précédent ne peut pas être amélioré dans la classe des suites quasi-stationnaires.

3. Dans le lemme et le théorème , la suite $\{2^p\}$, peut-être remplacée par une suite $\{n_p\}$, lacunaire. Le lemme permet aussi de donner une démonstration du théorème de RADEMACHER-MENCHOFF.

Dans la suite, $\{X_k\}$ est supposée stationnaire (au sens large), et l'on note μ la mesure spectrale et $Z(\lambda)$ le processus à accroissements orthogonaux, associés.

Corollaire 2.

Soit $\{X_k\}$ une suite stationnaire. La convergence presque sûre de $\frac{S_n}{n}$ est équivalente à la convergence presque sûre de $\int_{|\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda)$.

Preuve :

Il suffit de vérifier que $\frac{S_{2^p}}{2^p} - \int_{|\lambda| \leq 2^{-p}} Z(d\lambda)$ tend vers 0 p.s.

On a :

$$|K_n(\lambda)| \leq \frac{C}{n|\lambda|} \quad , \qquad 0 \leq |\lambda| \leq \pi$$

$$|K_n(\lambda) - 1| \leq C\, n|\lambda| \quad , \qquad 0 \leq |\lambda| \leq \pi$$

et

$$\frac{S_{2^p}}{2^p} - \int_{|\lambda|\leq 2^{-p}} Z(d\lambda) = \int_{|\lambda|\leq 2^{-p}} K_{2^p}(\lambda)\, Z(d\lambda) + \int_{2^{-p}<|\lambda|\leq\pi} K_{2^p}(\lambda)\, Z(d\lambda) \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\infty} E\left|\frac{S_{2^p}}{2^p} - \int_{|\lambda|\leq 2^{-p}} Z(d\lambda)\right|^2 &\leq C\Big(\sum_0^{\infty} 2^{2p} \int_{|\lambda|\leq 2^{-p}} |\lambda|^2\, \mu(d\lambda) \\ &\quad + \sum_0^{\infty} 2^{-2p} \int_{2^{-p}<|\lambda|\leq\pi} |\lambda|^{-2}\, \mu(d\lambda)\Big) \\ &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda)\, \mu(d\lambda)\end{aligned}$$

où $\phi(\lambda) = \sum_{\{p:2^p|\lambda|\leq 1\}} 2^{2p}|\lambda|^2 + \sum_{\{p:2^p|\lambda|>1\}} 2^{-2p}|\lambda|^{-2} \quad , \quad 0 < |\lambda| \leq \pi$

$\phi(0) = 0$

et donc $\phi(\lambda) \leq 4$.

$\blacksquare$

Posons

$$a_k = \Big(\int_{2^{-(k-1)}<|\lambda|\leq 2^{-k}} \mu(d\lambda)\Big)^{1/2}$$

$$Z_k = a_k^{-1}\Big(\int_{2^{-(k-1)}<|\lambda|\leq 2^{-k}} Z(d\lambda)\Big) \quad (\text{si } a_k = 0, \text{ alors } Z_k \equiv 0)$$

<u>THEOREME</u> : [4]

Soit $\{X_k\}$ une suite stationnaire.

1) $\frac{S_n}{n}$ converge p.s. ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{|\lambda|\leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = Z\{0\}$.

2) La L.F.G.N. est vérifiée pour une suite stationnaire ssi

$$\mu\{0\} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{0<|\lambda|\leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = 0 \quad \text{p.s.}$$

3) La condition $\lim\limits_{n} \int_{0<|\lambda|\leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = 0$ p.s. est équivalente à la convergence p.s. de la série orthogonale $\sum_{1}^{\infty} a_k Z_k$.

Remarques :

$\frac{S_n}{n}$ converge toujours vers $Z\{0\}$ dans L^2 et donc la L.F.G.N. est vérifiée ssi $\mu\{0\} = 0$, car $E|Z\{0\}|^2 = \mu\{0\}$. C'est le théorème de VON-NEUMANN. On sait que pour la L.F.G.N. les conditions $R_1(n)$ ou $R_2(n) \to 0$ ne sont pas suffisantes. Il faut renforcer les conditions sur le comportement à l'infini de $R_i,(i=1,2)$ ou sur le comportement de μ à l'origine.

THEOREME : [4]

Si $\mu\{0\} = 0$ et $\int_{0<|\lambda|\leq\lambda_0} (\log\log \frac{1}{|\lambda|})^2 \mu(d\lambda) < \infty$ (il existe $\lambda_0 > 0$) .

alors on la L.F.G.N. pour une suite $\{X_k\}$ stationnaire.

Si $w(u)$ est monotone, croissante et pour $u \to \infty$,

$$w(u) = o\,(\log\log u)^2 ,$$

alors il existe une suite stationnaire $\{X_k\}$ pour laquelle

$$\mu\{0\} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{0<|\lambda|\leq\pi} w\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \mu(d\lambda) < \infty$$

et $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas presque sûrement.

Preuve :

Ce théorème est une conséquence du théorème de RADEMACHER-MENCHOFF, car la condition précédente s'écrit $\sum a_k^2 \log^2 k < \infty$

On construit le contre-example par la méthode de MENCHOFF [1] .

■

THEOREME : [4]

Soit $\{X_k\}$ une suite stationnaire. Si la série $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{R_i(k) \log \log k}{k \log k} < \infty$ alors $\{X_k\}$ vérifie la L.F.G.N. $(i=1,2)$.

Ce résultat n'est pas améliorable dans la classe des suites stationnaires, c'est-à-dire que si $\phi(k)$ vérifie une condition de "décroissance régulière" et $\sum_k \frac{\phi(k) \log \log k}{k \log k} = \infty$, alors il existe une suite stationnaire $\{X_k\}$ telle que $R_i(n) = 0(\phi(n))$ et telle que $\frac{S_n}{n}$ diverge p.s. Par exemple on peut prendre $\phi(k) = (\log \log k)^{-2}$. On montre que, si $R_i(k) = 0(\log \log k)^{-2-\varepsilon}$ $\varepsilon > 0$, on a la L.F.G.N. Si $\varepsilon = 0$, on peut trouver une suite stationnaire qui ne la vérifie pas.

Pour terminer, on peut se poser la question de savoir à quelles conditions $\frac{S_n}{\alpha(n)} \to 0$ p.s., si l'on ne fait aucune hypothèse de décroissance sur les $R_i (i=1,2)$.

PROPOSITION : [4]

Pour toute suite stationnaire $\frac{S_n}{n} = o\,(\log \log n)$ p.s.

Ce résultat est une conséquence directe de la représentation spectrale. On montre, en outre, que cette condition n'est pas améliorable dans la classe des suites considérées.

Références :

[1] G. ALEXITS : Convergence problems of orthogonal series - Pergamon Press (1961).

[2] I. IBRAGIMOV ; Y. LINNIK : Independant and stationnary sequences of random variables - Wolters Nordhoff Publishing (1971).

[3] I. GAL ; J. KOKSMA - Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., 53, (1950), 638-653.

[4] V. GAPOCHKINE - Teor. Ver. prim. Tom XXII vol. 2 (1977) 295-318 (En russe).