CHRISTIAN RICHARD

# Temps d'entrée dans $]0,\infty[$ et maxima de sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et de même loi (d'après N.H. Bingham)

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A10_0>

# TEMPS D'ENTREE DANS $]0,\infty[$ ET MAXIMA DE SOMMES PARTIELLES DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES ET DE MEME LOI (D'APRES N.H. BINGHAM)

Christian RICHARD

## I - Introduction et notations

Le but de ce papier est l'étude asymptotique du maximum des sommes partielles de variables aléatoires $(X_k)$ indépendantes et de même loi ; $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ (avec $S_k = X_1 + \ldots + X_k$).

Cette étude donne des résultats différents selon qu'on a ou non une certaine condition de centrage sur les $X_i$.

Nous nous intéresserons ici essentiellement au cas centré, et nous montrerons qu'on peut alors donner une estimation de la probabilité pour que $M_n$ appartienne à un intervalle I (compact) : $P(M_n \in I)$.

En particulier, nous obtenons que si les $X_i$ sont symétriques (sans autre condition) ou si les $X_i$ sont centrées et admettent un moment d'ordre 2, alors $P(M_n \in I)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ces résultats se trouvent dans [1] et [2].

La rédaction donnée ici s'inspire de ces articles et en simplifie certains passages.

$$S_0 = 0 \quad , \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad , \quad M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$$

$(X_n)$ indépdendantes, de même loi $\mu$

$T = \inf\{n \geq 1 \mid S_n > 0\} \qquad T'^{*} = \inf\{n \geq 1 \mid S_n \leq 0\}$

soit $\nu$ la loi de $S_T$ et $V = \sum_{n \geq 0} \nu^{*n}$

## II - Remarque préliminaire

Théorème 1

> Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} P(S_r \leq 0) \to \gamma$ quand $n \to \infty$, avec $0 < \gamma < 1$,
>
> alors la fonction $L$ définie par
>
> $L(\frac{1}{1-s}) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma]$ est à variation
>
> lente quand $s \uparrow 1$.

Démonstration :

- Soit $H$ la mesure suivante

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} [P(S_k \leq 0) - \gamma] \; \varepsilon_k$$

- Définissons les fonctions suivantes :

(1) $A(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t} \, dH(t)$

(2) $a(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dH(t)$

(3) $\ell(\lambda) = e^{A(\lambda)}$

* En posant $s = e^{-\lambda}$ on a alors

- $A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma]$

- $a(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k [P(S_k \leq 0) - \gamma]$

- $L(\frac{1}{1-s}) = \ell(\lambda)$

* d'autre part, on a

$$\frac{d}{d\lambda} A(\lambda) = -a(\lambda) \qquad (4)$$

D'après (2), on obtient

$$\lambda a(\lambda) = \lambda(1-e^{-\lambda})^{-1} (1-s) \sum_{k=1}^{\infty} s^k \left[P(S_k \leq 0) - \gamma\right] \qquad (5)$$

où on a posé $s = e^{-\lambda}$

* Posons $a_k = \left[P(S_k \leq 0) - \gamma\right]$

Notre hypothèse est rappelons-le $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} a_r \to 0$

Il est connu (théorème d'Abel) qu'alors on a

$(1-s) \sum_{k=1}^{\infty} s^k a_k \to 0$ quand $s \uparrow 1$ (i.e. $\lambda \downarrow 0$)

puisque $(1-e^{-\lambda}) \sim \lambda$ quand $\lambda \to 0$, on aura d'après (5)

$$\lambda a(\lambda) \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0 \qquad (6) \quad .$$

Comme de (3) et (4), il vient :

$$\frac{\ell(\rho\lambda)}{\ell(\lambda)} = \exp |A(\rho\lambda) - A(\lambda)| = \exp |-\int_{\lambda}^{\rho\lambda} a(u)du$$

$$= \exp |-\int_{1}^{\rho} t\lambda\, a(t\lambda)\frac{dt}{t}| \qquad \text{pour } \rho > 0 \qquad (7)$$

il résultera alors de (6) et (7) que :

$$\frac{\ell(\rho^{\lambda})}{\ell(\lambda)} \to 1 \qquad \text{quand } \lambda \to 0$$

ce qui signifie que $\ell(\lambda)$ est à variation lente à zéro et par conséquent que $L(\frac{1}{1-s})$ est à variation lente quand $s \uparrow 1$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Remarques sur le théorème 1 :

1) L'hypothèse du théorème exprime une condition de centrage puisque :

a- $EX_1 > 0 \Longrightarrow P(\frac{S_n}{n} \leq 0) \to 0$ (car $P(|\frac{S_n}{n}-EX_1|>\varepsilon)\to 0$ d'après la loi faible des grands nombres)

b- $EX_1 < 0 \Longrightarrow P(\frac{S_n}{n} \leq 0) \to 1$ (on change $X_i$ en $-X_i$)

Plus précisément

- Si $EX_1 < 0$ alors $P(S_n > 0) = P(\frac{S_n}{n} > 0) \geq$
$$P(|\frac{S_n}{n} - EX_1| \geq EX_1)$$

et d'après le théorème suivant (Katz)

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \geq 1 \\ E\,|X_1|^\alpha < \infty \end{array} \right. \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\left|\frac{S_n}{n}-EX_1\right| \geq \varepsilon)}{n^{2-\alpha}} < +\infty$$

la série $\sum_1^\infty \frac{1}{k} P(S_k > 0)$ est convergente

Le comportement de $M_n$ est alors relativement simple puisque $S_n \to -\infty$ p.s. donc $M_n$ est p.s. borné. La limite p.s. $M = \lim_n M_n$ a été étudiée : (cf [5] P 2 page207). Les arguments employés pour cette étude sont du même type que ceux que nous utiliserons par la suite dans le cas centré.

- Si $EX_1 > 0$ l'étude est analogue.

- Il s'avère donc que le cas le plus difficile est celui où $EX_1 = 0$.

2) <u>Précisons un peu L sur des exemples</u>

a- Considérons le cas $\begin{cases} EX_i = 0 \\ EX_i^2 = 1 \\ E|X_i|^{2+\delta} < \infty \quad \text{avec} \quad \delta > 0 \end{cases}$

Il résulte du théorème central limite que :

$$P(S_n > 0) = P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 0) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \qquad (\text{d'où } \gamma = \frac{1}{2})$$

et en conséquence grâce au théorème de vitesse de convergence, on peut dire que sous l'hypothèse $E|X_i|^{2+\delta} < \infty$ on a

$$|P(S_n > 0) - \frac{1}{2}| \leq \frac{\text{cste}}{n^{\delta/2}} \qquad (\text{"cste"=constante})$$

La série $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\}$ est alors absolument convergente puisque $|\frac{1}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\}| \leq \frac{\text{cste}}{k^{1+\delta/2}}$

Il en résulte que $\lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\} = c$

d'où $L(\frac{1}{1-s}) \sim e^{-c}$ quand $s \uparrow 1$

b- Si $X_i$ a une loi symétrique diffuse, alors

$P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2} \quad \forall n$ , donc $\gamma = \frac{1}{2}$

Alors $L(\frac{1}{1-s}) = 1$

<u>Corollaire</u> :

| |
|---|
| Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} P(S_r > 0) \to \rho$ avec $0 < \rho < 1$ |
| Alors $\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(S_k \leq 0) = \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L(\frac{1}{1-s}) \quad 0 \leq s < 1$ |

Démonstration :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} = \text{Log } \frac{1}{1-s}$$

d'où $\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(S_k \leq 0) = \frac{1}{(1-s)^\gamma} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma]$

$$= \frac{1}{(1-s)^\gamma} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad \text{où} \quad \gamma = 1 - \rho$$

on peut en effet appliquer le théorème 1 avec $1 - \rho$ puisque

$$\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} P(S_r \leq 0) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n} P(S_r > 0)$$ □

III - Objet de l'étude

Nous voulons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2

> Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} P(S_r > 0) \to \rho$ quand $n \to \infty$ avec $0 < \rho < 1$
>
> alors $\mu_n = \frac{n^\ell}{L(n)} \Gamma(1-\rho)\ P(M_n\ \varepsilon \cdot) \xrightarrow{\text{vaguement}} V$

(où L désigne la fonction à variation lente définie au théorème 1).

## IV - Début de la démonstration

Comme on a $M_n \geq 0$ (puisque $M_n = \max\limits_{0 \geq k \geq n} S_k$ et $S_0 = 0$) le résultat cherché équivaut à une convergence sur les transformées de Laplace i.e.

$$\forall\lambda \geq 0 \quad \tilde{\mu}_n(\lambda) \to \tilde{V}(\lambda) \quad (\text{où } \tilde{\mu}(\lambda) = \int e^{-\lambda x}\, d\mu(x))$$

En d'autres termes, il s'agit de montrer que :

$$E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{L(n)\ \tilde{V}(\lambda)}{n^{\ell}\,\Gamma(1-\ell)}$$

Mais comme $E(e^{-\lambda M_n})$ est une suite monotone en $n$, il est équivalent de montrer que :

$$\sum_{r=0}^{n} E(e^{-\lambda M_r}) \sim \frac{n^{1-\ell}}{\Gamma(2-\ell)} \quad L(n) \quad \tilde{V}(\lambda)$$

En effet, on a le lemme suivant : (facile)

Soit $L$ une fonction à variation lente, $\{a_n\}$ une suite monotone telle que $q_n \geq 0$ , $0 < \alpha < \infty$

Alors $q_0+q_1+\ldots+q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} n^{\alpha} L(n)$ <==>

$$q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n)$$

il suffit donc d'appliquer le théorème 1 et de poser $\alpha = 1-\rho$ .

On doit donc démontrer que

$$\sum_{r=0}^{n} E(e^{-\lambda M_r}) \sim \frac{n^{1-\rho}}{\Gamma(2-\rho)} \quad L(n) \quad \tilde{V}(\lambda)$$

Rappelons l'énoncé du théorème de Karamata (cf [4], section XIII, 5, théorème 5, p.423)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si} \quad a_n \geq 0 \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \qquad \alpha > 0 \text{ , alors} \\ \\ a_0+\ldots+a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} n^{\alpha} L(n) \iff \phi(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\alpha}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \\ \\ \qquad \text{quand } s \uparrow 1 \text{ où } L \text{ est à variation lente.} \end{array}\right.$$

Appliquons-le à $a_r = E(e^{-\lambda M_r})$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \tilde{V}(\lambda)$$

D'autre part :

$$V = \sum_{n\geq 0} \nu^{*n} \implies \tilde{V}(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \nu^{*n}(\lambda) = \sum_{n\geq 0} [\tilde{V}(\lambda)]^n = \frac{1}{1-\tilde{\nu}(\lambda)}$$

Il est donc équivalent de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \cdot \frac{1}{1-E(e^{-\lambda S_T})}$$

ou encore grâce au corollaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \left[\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} p(S_k \leq 0)\right] \cdot \frac{1}{1-E(e^{-\lambda S_T})} \qquad (1)$$

## V - Démonstration de (1)

Pour obtenir (1), il est naturel d'essayer

1°) d'exprimer les lois des $M_n$ en fonction de la loi de $(T,S_T)$

2°) d'exprimer les relations entre $(T,S_T)$ et les lois individuelles des $(S_n)$ .

~ 1°- Grâce à un lemme de dualité la première partie est facile :

Proposition 1

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq s < 1 \qquad \lambda > 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \Big[\sum_{\ell=0}^{\infty} s^\ell E(e^{-\lambda S_\ell}; T'^{*} > \ell)\Big] \cdot \Big[\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(T>m)\Big] \end{array}}$$

Démonstration :

Posons $T'_n = \inf\{k \in [1,n] \;/\; S_k = M_n\}$

On a $E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^{n} E(e^{-\lambda M_n}, T'_n = k)$ (car les $[T'_n = k]$ sont disjoints)

$$= \sum_{k=0}^{n} E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \ldots, S_{k-1} \leq S_k, \ldots, S_n \leq S_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E(e^{-\lambda S_k} \underbrace{1_{[S_0 < S_k] \cap \ldots \cap [S_{k-1} < S_k]}}_{A} \cdot \underbrace{1_{[S_{k+1} \leq S_k] \cap \ldots \cap [S_n \leq S_k]}}_{B})$$

Les variables aléatoires A et B sont indépendantes car dans A n'interviennent que $X_1,\ldots,X_k$ et dans B n'interviennent que $X_{k+1},\ldots,X_n$ et les $(X_i)$ sont indépendantes.

Donc :

$$E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^{n} E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k,\ldots,S_{k-1} < S_k)P(S_{k+1} \leq S_k,\ldots,S_n \leq S_k)$$

a) On a : $P(S_{k+1} \leq S_k,\ldots,S_n \leq S_k) = P(T > n-k)$

En effet :

→ Remarquons d'abord que les variables aléatoires

$(X_1,\ldots,X_k,S_k)$ et $(X_1^*,\ldots,X_k^*,S_k^*)$ où

$X_1^* = X_k,\ldots,X_k^* = X_1$ , $S_k^* = S_k$

ont mêmes lois jointes parce que les $(X_i)$ sont indépendantes et de même loi.

[NB : Ceci est connu et utilisé sous le nom de principe de dualité (cf [4] section XII.2, p.377)]

→ Donc

$P(S_{k+1} \leq S_k,\ldots,S_n \leq S_k) = P(X_{k+1} \leq 0,\ldots,X_{k+1}+\ldots+X_n \leq 0)$

$= P(X_1 \leq 0,\ldots,X_1+\ldots+X_{n-k} \leq 0)$

$= P(S_1 \leq 0,\ldots,S_{n-k} \leq 0)$

$= P(T > n-k)$

b) On a :

$$E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \ldots, S_{k-1} < S_k) = E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k)$$

En effet :

On obtient toujours grâce à la même remarque que :

$$E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \ldots, S_{k-1} < S_k)$$

$$= E(e^{-\lambda S_k^*}, S_0^* < S_k^*, \ldots, S_{k-1}^* < S_k^*)$$

$$= E(e^{-\lambda S_k^*}, S_k > 0, \ldots, S_1 > 0)$$

$$= E(e^{-\lambda S_k}, S_1 > 0, \ldots, S_k > 0)$$

$$= E(e^{-\lambda S_k} ; T'^* > k)$$

c) Finalement, on a obtenu :

$$E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^{n} E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k)\ P(T > n-k)$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} s^k E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k) s^{n-k} P(T > n-k)$$

$\downarrow$

ceci existe car $E(e^{-\lambda M_n}) < 1$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} s^\ell E(e^{-\lambda S_\ell}; T'^* > \ell)\right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(T > m)\right]$$

$\square$

$\sim$ 2° Pour obtenir (1), il suffit donc de montrer que :

Proposition 2

$$\log\Big(\sum_{m=0}^{\infty} s^m \, P(T > m)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \, P(S_n \leq 0) \qquad (A)$$

$$\frac{1}{1-E(s^T e^{-\lambda S_T})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell} \, E(e^{-\lambda S_\ell} \, ; \, T'^{*} > \ell) \qquad (B)$$

De telles égalités ne sont pas évidentes, elles nécessitent des ingrédients puissants (lemmes combinatoires, ou théorèmes sur les fonctions analytiques) ; elles sont toutefois aujourd'hui classiques. Nous reproduisons ici l'essentiel des démonstrations connues afin de rendre ce papier plus intrinsèque. Voici deux méthodes :

a) Utilisation des fonctions analytiques (démonstration complète)

Les relations (A) et (B) résultent immédiatement de la proposition suivante où l'on fait $\theta = -\lambda$ ($\lambda$ réel) dans (a) et (c) et $\theta = 0$ dans (b).

Proposition 2bis

(a) $$1 - E(s^T e^{\theta S_T}) = \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} ; S_k > 0)\Big]$$

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \, E(e^{\theta S_k}, T > k) = \exp\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} \, ; \, S_k \leq 0)\Big]$$

(c) $$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \, E(e^{\theta S_k}, T'^{*} > k) = \exp\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} \, ; \, S_k > 0)\Big]$$

(d) $$1 - E(s^{T'^{*}} e^{\theta S_{T'^{*}}}) = \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} \, ; \, S_k \leq 0)\Big]$$

| | |
|---|---|
| où $0 \leq s < 1$ partout et $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$ dans (a) et (c) <br> $(\theta \in \mathbb{C})$ <br> $\mathrm{Re}\,\theta \geq 0$ dans (b) et (d) <br> (Re = partie réelle) | |

(On comparera à la démonstration faite dans le cas de v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ , au lieu de $\mathbb{R}$, faite dans [5], p.181)

Il suffit de démontrer (a) et (b) ; la démonstration de (c) et (d) serait analogue.

<u>Démonstration</u> :

Posons, pour $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$ :

$$f(\theta) = [1 - E(s^T e^{\theta S_T})] \cdot \exp[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k}, S_k > 0)]$$

et pour $\mathrm{Re}\,\theta \geq 0$ :

$$g(\theta) = [\sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{\theta S_k}, T > k)] \cdot \exp[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k}, S_k \leq 0)]$$

Il s'agit de montrer que :

$f(\theta) = 1$ pour $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$

$g(\theta) = 1$ pour $\mathrm{Re}\,\theta \geq 0$

Pour celà, il suffit de faire les remarques suivantes :

1°) Grâce aux relation évidentes $\begin{cases} S_T > 0 \\ S_k \leq 0 \quad \text{pour} \quad T > k \end{cases}$

On voit que ces fonctions sont holomorphes donc analytiques sur les domaines respectifs $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta < 0$, continues et bornées sur $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta \geq 0$ . (facile).

2°) Montrons que $f(\theta) = g(\theta)$ pour $\mathrm{Re}\,\theta = 0$

Posons $\theta = i\alpha$

Par définition de $f$ et $g$ , il suffit de voir que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k}, T > k) = [1-E(s^T e^{i\alpha S_T})] \;.\; \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{i\alpha S_k})$$

Puisque :

$$\to \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k} 1_{[T>k]}) = E(\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}) \text{ car } 1_{[T>k]}=0 \text{ pour } k\geq T$$

et

$$\to \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{i\alpha S_k}) = \exp(-\mathrm{Log}(1-s\hat{\mu}(\alpha))) = \frac{1}{1-s\hat{\mu}(\alpha)}$$ (où $\hat{\mu}$ est la fonction caractéristique de $\mu$)

On peut réécrire l'égalité à démontrer sous la forme :

$$E\left[\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = \frac{1}{1-s\hat{\mu}(\alpha)} \left[1-E(s^T e^{i\alpha S_T})\right]$$

Or ceci est facile à vérifier. En effet,

$$E\left[\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] - E\left[\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right]$$

Il n'y a pas de problème de convergence car $0 \leq s < 1$

- $E\left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k})$ (d'après le théorème de Lebesgue)

$$= \frac{1}{1-s\hat{\mu}(\alpha)}$$

- D'autre part

$$E\left(\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(s^{T+k} e^{i\alpha S_{T+k}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s^k E\left(s^T e^{i\alpha(S_{T+k}-S_T)} e^{i\alpha S_T}\right)$$

Mais $S_{T+k}-S_T$ est indépendant de $T$ et $S_T$ d'où

$$E\left[\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = E\left(s^T e^{i\alpha S_T}\right) . \sum_{k=0}^{\infty} s^k E\left(e^{i\alpha(S_{T+k}-S_T)}\right)$$

d'où

$$E\left(\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right) = E\left(s^T e^{i\alpha S_T}\right) . \sum_{k=0}^{\infty} s^k \hat{\mu}(\alpha)$$ (car $S_{T+k}-S_T$ a même loi que $S_k$)

$$= \frac{1}{1-s\hat{\mu}(\alpha)} . E\left(s^T e^{i\alpha S_T}\right) \qquad \square$$

3°) (-) Les fonctions $f$ et $g$ sont donc analytiques, respectivement sur $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta < 0$, continues et bornées sur $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta \geq 0$ . D'autre part elles sont égales sur $\mathrm{Re}\,\theta = 0$ .

Le lemme suivant indique qu'elles sont constantes et comme $\lim_{\mathrm{Re}\,\theta\to\infty} f(\theta) = 1$ , la proposition 2bis est démontrée.

Il reste donc à voir que :

<u>Lemme</u>

Sous les hypothèses (-) , $f$ et $g$ sont constantes

<u>Démonstration</u> :

Définissons une fonction $M$ par

$$M(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \mathrm{Re}\,\theta \leq 0 \\ g(\theta) & \mathrm{Re}\,\theta \geq 0 \end{cases}$$

M est continue et bornée ; si nous réussissons à montrer qu'elle est analytique, elle sera alors constante grâce au théorème de Lio ville.

Or M est analytique sur $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta > 0$ et continue partout, il résulte alors du théorème de Morera qu'elle est analytique partout.

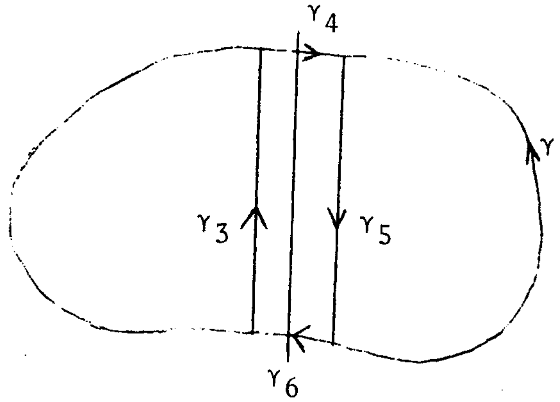
<u>En effet</u>

* Enoncé du théorème de Morera

Si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue et telle que $\int_\gamma F(z)dz = 0$ pour tout circuit $\gamma$ , alors F est analytique sur $\mathbb{C}$

* Il suffit donc de voir que $\int_\gamma M(z)\,dz = 0$ pour tout circuit $\gamma$.

Il suffit pour cela de se limiter aux circuits qui coupent l'axe des imaginaires, car la relation est connue pour les autres en raison de l'analycité sur $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ et $\mathrm{Re}\,\theta < 0$.



Soit $\varepsilon > 0$

- $\exists\ \eta > 0 \quad |z-z'| < \eta \Longrightarrow |M(z) - M(z')| < \varepsilon$ (sur tout compact) puisque $M$ est continue.

- Soit $\varepsilon' = \inf(\eta,\varepsilon)$ et considérons les courbes $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ telles que Long $\gamma_6 < \varepsilon'$

  Long $\gamma_4 < \varepsilon'$

Alors

* $\left|\int_{\gamma_3} M(z)\,dz + \int_{\gamma_5} M(z)\,dz\right| < \varepsilon$ en raison de la continuité de $M$

* $\left|\int_{\gamma_6} M(z)\,dz\right| < \sup\limits_{z\in\gamma} |M(z)| \times \text{long } \gamma_6 \leq \varepsilon \sup\limits_{z\in\gamma} M(z)$

* $\left|\int_{\gamma_4} M(z)\,dz\right| \leq \sup\limits_{z\in\gamma} |M(z)| \times \text{long } \gamma_4 \leq \varepsilon \sup\limits_{z\in\gamma} M(z)$

Il en résulte que

$\int_{\gamma_5} M(z)\,dz + \int_{\gamma_6} M(z)\,dz + \int_{\gamma_3} M(z)\,dz + \int_{\gamma_4} M(z)\,dz$ est aussi petit qu'on veut, d'où le résultat.

La proposition 2bis est donc démontrée et le théorème aussi par conséquent. $\square$

b) Utilisation d'un lemme combinatoire (démonstration abrégée)

Posons: $T_1 = T$ ,

$T_2 = \inf\{n > T_1 \ ;\ S_n > S_{T_1}\}$ ,

$T_3 = \inf\{n > T_{r-1} \ ;\ S_{T_r} > S_{T_{r-1}}\}$

Ce sont les dates successives des records de la suite de v.a. $(S_n)$.
Il est facile de voir (et connu) que les v.a. $T_1$ , $T_2 - T_1$ , ..., $T_r - T_{r-1}$ sont indépendantes ($\geqslant 0$) et de même loi notée $\tau$.

$T_r$ a donc pour loi $\tau^{*r}$

Nous noterons enfin $\tau(s)$ la fonction génératrice de $\tau$ $(0 \leq s \leq 1)$

$$\tau^{*r}(s) = [\tau(s)]^r$$

Grâce à un lemme combinatoire astucieux (cf. [4], section XII, 6, p.393-4) on peut démontrer (cf. [4], section XII, 7, p.394-7) que:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} P(T_r = n) = \frac{1}{n} P(S_n > 0)$$

$$\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\tau(s))^n\right) = \log \frac{1}{1-\tau(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0)$$

La démonstration de (A) est alors évidente, car:

$$\tau(s)^n = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(T_n = k) \quad \text{donne}$$

$$\frac{1}{1-\tau(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n = k)$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n = k)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s^k P \quad (k \text{ est un record})$$

Or $P(k \text{ est un record}) = P(0 < S_k, S_1 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k)$

$$= P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_k > 0)$$

$$= P(T'^* > k)$$

d'où $\log\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(T'^* > k)\, s^k\right) = \log\left(\frac{1}{1-\tau(s)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0)$

pour des raisons de symétrie, on a donc :

$$\log\left[\sum_{k=0}^{\infty} P(T > k)\, s^k\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n \leq 0)$$

c'est-à-dire (A).

* Il reste à prouver (B) i.e.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell} E(e^{-\lambda S_\ell}, T'^* > \ell) = \frac{1}{1-E(s^T e^{-\lambda S_T})}$$

Nous avons

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0,\ 0 < S_n \leq x)$$

$$= P(S_r < S_n \leq x \quad (r = 0,1,\ldots,n-1))$$

$$= P(n \text{ est un record et } S_n \leq x)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(n \text{ est le } r^{\text{è}} \text{ record et } S_n \leq x)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(T_r = n\ ,\ S_n \leq x) \quad x > 0 \qquad n \geq 1$$

i.e. $P(T'^* > n\ ,\ S_n \leq x) = \sum_{r=1}^{\infty} P(T_r = n\ ,\ S_n \leq x)$ pour $n \geq 1$

Ainsi

$$E(e^{-\lambda S_n}\ ;\ T'^* > n) = \sum_{r=1}^{n} E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) \quad \text{pour } n \geq 1$$

d'où

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}\ ,\ T'^* > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{r=1}^{n} E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n)$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n)$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n)$$

(puisque $\sum_{n=1}^{r-1} s^n E(e^{-\lambda S_n}\ ,\ T_r = n) = 0$)

D'autre part

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) = E(e^{-\lambda S_{T_r}} s^{T_r})$$
$$= E(e^{-\lambda S_T} s^T)^r$$

en vertu du fait que $(S_{T_r} - S_{T_{r-1}}, T_r - T_{r-1})$ sont indépendantes et de même loi que $(S_T, T)$.

Il en résulte que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T'^* > n) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} E(e^{-\lambda S_T} s^T)^r$$
$$= \frac{1}{1-E(e^{-\lambda S_T} s^T)}$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T'^* > n) = \frac{1}{1-E(e^{-\lambda S_T} s^T)}$

La relation (B) est donc démontrée. $\square$

## VIII - Circonstances sous lesquelles la condition suivante est satisfaite

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(S_k \leq 0) \to \gamma \qquad \text{avec} \quad 0 < \gamma < 1$$

(1) Nous avons vu au paragraphe 1- que lorsque les $X_i$ ont une distribution commune symétrique alors la condition (*) est satisfaite avec $\gamma = \frac{1}{2}$ .

(2) On a vu aussi que la condition (*) est satisfaite avec $\gamma = \frac{1}{2}$ si

$$E\, X_i = 0$$
$$E\, X_i^2 < \infty$$

(3) Supposons que les $X_i$ appartiennent au domaine d'attraction d'une loi stable d'exposant $\alpha \neq 1$ , avec la restriction $E\, X_i = 0$ pour $\alpha > 1$ , et sans restriction pour $\alpha < 1$

Dans ces conditions, on sait qu'il existe une suite $A_1, \ldots, A_n$ de constantes telles que $\frac{S_n}{A_n}$ converge en loi vers une variable aléatoire stable.

Ainsi

$$P(S_k \leq 0) = P(\frac{S_n}{A_n} \leq 0) \to \gamma \qquad \text{quand} \quad n \to \infty$$

On démontre que si la fonction caractéristique de la loi limite stable est :

$$\exp\{-c|t|^{\alpha}(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\, tg\,(\frac{\pi\alpha}{2}))\} \qquad \text{où} \quad \begin{cases} t \in R \\ 0<\alpha<1 \quad \text{ou} \quad 1<\alpha\leq 2 \\ c > 0 \\ 1\leq\beta\leq 1 \end{cases}$$

alors $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha}$ arctg $(-\beta \text{ tg } \frac{\pi\alpha}{2})$

(4) Supposons que $Y_1,\ldots,Y_n$ sont indépendantes, de même loi $\mu$, $\mu$ étant la loi de Cauchy symétrique, de fonction de répartition :

$P(Y_1 < x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$ arctg $x$ , et de fonction caractéristique $\hat{\mu}(t) = e^{-|t|}$ .

- Soit $R_n = Y_1 + \ldots + Y_n$

  Il est bien connu que $\frac{R_n}{n}$ a pour loi $\mu$ (puisque de loi de Cauchy symétrique est stable d'indice 1).

- Posons alors $X_k = Y_k - a$ pour $k \geq 1$ où a est une constante.

  On a alors :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq 0) &= P(R_n - n\,a \leq 0) = P(R_n \leq n\,a) \\ &= P(\frac{R_n}{n} \leq a) \\ &= P(Y_1 \leq a) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg } a \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\gamma$ arbitraire compris entre 0 et 1, on peut en choisissant correctement a construire à partir de la loi de

Cauchy symétrique une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi satisfaisant la condition (*) avec la limite $\gamma$.

(5) Pour une discussion plus approfondie sur la condition (*), voir [3],[6],[7].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] N.H. BINGHAM "Limit theorems in fluctuation theory" Adv. Appl. Prob 5 (1973) p.554-69

[2] D.J. EMERY "Limiting behaviour of the distributions of the maxima of partial sums of certain random walks" J. Appl. Prob. 9 (1972) p.572-9

[3] D.J. EMERY "On a condition satisfied by certain random walks" Zeit für Wahr. 31 (1975) p.125-39

[4] W. FELLER "An introduction to probability theory and its applications" (vol 2) Wiley and Sons (1966) 2è édition

[5] F. SPITZER "Principles of random walk" Van Nostrand (1964)

[6] J.L. TEUGELS "Random variables associated with a random walk" Second Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics (1977) Abstracts t.3, p.229-30.

[7] V.M. ZOLOTAREV "Mellin-Stieltjes transforms in probability theory" Th. of Proba 2 (1957) p.433-60