

JEAN CEA

Approximation variationnelle Convergence des éléments finis Un test

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__S5_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

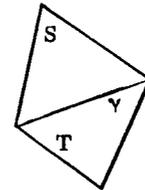
L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION VARIATIONNELLE
 CONVERGENCE DES ELEMENTS FINIS
 UN TEST

On s'intéresse à la construction systématique d'éléments finis tels que la solution u_h d'un problème approché converge vers la solution u du problème exact. La construction de ces éléments ne dépend pas des formes bilinéaires, elle ne dépend que de l'espace à approcher. Le résultat essentiel est la condition suffisante suivante : le problème approché sera "convergent" si tout élément u_h de l'espace approché à la propriété suivante : si γ est une interface entre 2 éléments on a :



$$(*) \quad \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} u_h^S d\sigma = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} u_h^T d\sigma, |\gamma| = \int_{\gamma} d\sigma$$

où u_h^S et u_h^T désignent les traces de u_h sur S et sur T.

Dans le cas d'éléments qui approchent des éléments de $H^2(\Omega)$ on écrira la relation (*) pour $u_h, D_1 u_h, D_2 u_h$; cependant la relation (*) pour u_h peut être remplacé par une relation très simple :

$$(**) \quad \begin{cases} \forall \gamma \quad \exists A, B \in \gamma \quad \text{tel que} \\ u_h^S(A) = u_h^T(B) \end{cases}$$

On limitera notre étude au cas où les points A, B sont des sommets ou des milieux de côtés, mais le résultat est plus général. Le §1 sert à définir le contexte dans lequel on va travailler, le §2 donne une construction systématique d'éléments finis pour l'approximation de $H^1(\Omega)$.

Dans le §3 on s'intéresse à l'approximation de $H^2(\Omega)$.

Jean CEA
 I. M. S. P.
 Mathématiques
 06034 NICE CEDEX
 France

§ 1 . LES PROBLEMES VARIATIONNELS

1. Le problème de Neumann d'ordre 2m

L'espace $V : H^m(\Omega)$

Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière ; on rappelle que
 $v \in H^m(\Omega) \Leftrightarrow v \in L^2(\Omega), D^p v \in L^2(\Omega)$

pour tout multi-indice $p = (p_1, \dots, p_n)$ tel que $|p| = p_1 + \dots + p_n \leq m$

$$D^p v = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} v$$

On pose :

$$(u, v)_V = \sum_{0 \leq |p| \leq m} (D^p u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

La forme bilinéaire $a(u, v)$:

pour $u, v \in V$ on pose

$$a(u, v) = \sum_{p, q} \int_{\Omega} a_{p, q}(x) D^p u(x) D^q v(x) dx$$

où les $a_{p, q}$ sont donnés dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifient l'hypothèse de coercivité :

$$(1.1) \quad \sum_{p, q} a_{p, q}(x) \xi_p \xi_q \geq \alpha \sum_p |\xi_p|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

pour tout $\xi = (\dots, \xi_p, \dots) \in \mathbb{R}^N$

le nombre N étant défini maintenant.

Le nombre $N = N(n, m)$:

N désigne le nombre de multi-indices $p = (p_1, \dots, p_n)$ tels que $0 \leq |p| \leq m$.

Compte tenu des hypothèses, la forme $u, v \rightarrow a(u, v)$ est bilinéaire, bicontinue, coercitive au sens suivant :

$$(1.2) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

La forme linéaire $L(v)$

On prend pour $v \in V$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$

$v \rightarrow L(v)$ est une forme linéaire et continue sur T

Le Problème P : déterminer $v \in V$ tel que :

$$(1.3) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

On sait que ce problème admet une solution et une seule. Pour les problèmes variationnels cf J. LIONS - E. MAGENES [].

2. Approximation de l'espace $H^m(\Omega)$: l'espace V_h^m

L'espace produit F

Dans [] J. CEA introduisait l'espace V comme un sous espace de l'espace produit $F = (L^2(\Omega))^{N(n, m)}$; en effet soit $v \in F$, on note les composantes de v de la façon suivante

$$v \equiv (\dots, v_p, \dots) \quad p = (p_1, \dots, p_n), 0 \leq |p| \leq m$$

visiblement $H^m(\Omega)$ peut être identifié avec le sous espace de F des éléments $v = (v_0, \dots, v_p, \dots)$ tels que :

$$v_p = D^p v_0$$

Notons que :

$$(u, v)_F = \sum_{0 \leq |p| \leq m} (u_p, v_p)_{L^2(\Omega)}$$

$$(u, v)_V = \sum (D^p u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

La triangulation :

On partage Ω en éléments $K_\ell, \ell \in L, L$ un ensemble d'indices donné ; on suppose que $K_\ell \cap K_{\ell'} = \emptyset, \forall \ell \neq \ell'$ et que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\ell \in L} \bar{K}_\ell$; on pose

$$h = \max_{\ell \in L} (\text{diam } K_\ell)$$

et on suppose qu'on a, en fait, une famille de triangulations \mathcal{T}_h , avec $h \rightarrow 0$; on suppose que la triangulation est "régulière" (pas d'écrasement d'éléments ...).

L'espace V_h^m :

On définit sur K un espace vectoriel $V_{h,K}^m$ de dimension finie, de fonctions régulières (des polynômes ...).

La notation \tilde{D}^p : soit v_h une fonction définie sur Ω et telle que $\forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_h|_K \in V_{h,K}^m$; à v_h on va associer des fonction \tilde{D}^p définies sur Ω , appartenant à $L^2(\Omega)$ et vérifiant

$$\tilde{D}^p v_h|_K = D^p (v_h|_K)$$

la dérivée D^p est la dérivée ordinaire dans K . Si v_h est localement un polynôme, $\tilde{D}^p v_h$ est aussi localement un polynôme (dérivé du précédent) ; on aura donc

$$(\dots, \tilde{D} v_h, \dots) \in F$$

V_h^m sera un sous-ensemble de tels éléments ; nous étudierons plus loin le problème du "raccordement" des $v_h|_K$

Hypothèse A :

V_h est un sous espace FERME de F

$$\|v_h\|_F = 0 \Rightarrow v_h = 0$$

Alors V_h est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{V_h} = \sum_{0 \leq |p| \leq m} (\tilde{D}^p u, \tilde{D}^p v)_{L^2(\Omega)}$$

Hypothèse B :

$\forall v \in V$, il existe $r_h v \in V_h$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\|_F = 0.$$

Hypothèse C :

On suppose que :

si $u_h \in V_h^m$, $\|u_h\|_F \leq c$, $\lim u_h = u \in F$ dans F faible

alors $u \in V$.

On peut interpréter les hypothèses B et C de la manière suivante :

on veut remplacer V par un espace voisin V_h , l'hypothèse B assure que V_h n'est pas trop "petit" (il y a assez d'éléments dans V_h pour approcher n'importe quel élément de V) tandis que l'hypothèse C assure que V_h n'est

pas trop grand (un élément qui est dans la "limite de V_h " est obligatoirement dans V .)

3. Les problèmes approchés

La forme bilinéaire sur $F \times F$:

On la note $a(u, v)$:

$$u, v \in F, \quad u = (\dots, u_p, \dots) \quad v = (\dots, v_p, \dots)$$

$$a(u, v) = \sum_{p,q} \int_{\Omega} a_{p,q} u_q v_p$$

elle est coercitive sur les 3 espaces F, V, V_h^m

La forme linéaire sur F :

$$v = (\dots, v_p, \dots)$$

$$L(v) = (f, v_0)_{L^2(\Omega)}$$

Le problème P_h : déterminer $u_h \in V_h^m$ tel que

$$(3.1) \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^m$$

si $u_h = (\dots, \tilde{D}^p u_{0,h}, \dots)$, $v_h = (\dots, \tilde{D}^p v_{0,h}, \dots)$.

On a, en identifiant $u_{0,h}$ et u_h

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h^m \\ \sum_{p,q} \int_{\Omega} a_{p,q} \tilde{D}^q u_h \cdot \tilde{D}^p v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \\ \forall v_h \in V_h^m \end{array} \right.$$

Théorème 3.1 : sous les hypothèses A, B, C et celles du problème P, alors

- 1) le problème P a une solution u et une seule
- 2) le problème P_h a une solution u_h et une seule
- 3) de plus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_F = 0$$

$$\text{i.e. } \forall p \quad 0 \leq |p| \leq m \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{D}^p u_h - D^p u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Démonstration :

Les points 1) et 2) sont des conséquences du lemme de Lax Milgram ; établissons le point 3 .

Convergence faible :

On a : $a(u_h, u_h) = L(u_h)$

d'où il vient

$$\|u_h\|_F \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

on peut donc extraire une sous-famille $u_{h'}$, faiblement convergente dans F vers un élément w de F

$$\begin{cases} \|u_{h'}\| \leq c \\ u_{h'} \rightharpoonup w \in F \end{cases}$$

alors d'après l'hypothèse C on a $w \in V$; mais

$$a(u_h, r_h v) = L(r_h v) .$$

Compte tenu des convergences $u_{h'} \rightharpoonup w$, $r_h v \rightarrow v$ on a par passage à la limite

$$a(w, v) = L(v) \quad v \in V$$

donc $w = u$ et $u_h \rightarrow u$ dans F faible.

Convergence forte : on a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) \\ &= L(u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + L(u_h) \end{aligned}$$

et comme $u_h \rightarrow u$, cela entraîne

$$\lim a(u - u_h, u - u_h) = L(u) - a(u, u) - a(u, u) + L(u) = 0 .$$

La coercivité entraîne alors la convergence forte.

Remarque 3.1

Ce théorème figure dans J.CEA [] dans un cadre plus général ; notons les points suivants : il n'est pas nécessaire de supposer que la forme $a(u, v)$ est symétrique, en d'autres termes que le problème P est issu d'un problème de minimisation ; l'introduction de l'espace F a permis de sortir du cadre de la méthode de Galerkin et d'approcher séparément les

dérivées D_u^p par des éléments de $L^2(\Omega)$, l'approximation étant dite alors EXTERNE ; dans le cas où $V \subset V_h$ l'approximation est dite INTERNE

Remarque 3.2 :

Dans le cas de l'approximation interne, l'hypothèse C est alors automatiquement vérifiée .

Remarque 3.3 :

On a exposé la méthode sur un exemple ; en réalité elle est beaucoup plus générale et on peut l'appliquer à des sous espaces d'espaces produits $(H^m(\Omega))^q$.

Les tests A, B, C

Pour se rapprocher du "langage Ingénieur", on emploiera le mot TEST au lieu d'hypothèse. Ainsi pour être assuré de la convergence de la méthode utilisée, notre espace V_h^m , avec un choix particulier d'éléments finis, doit passer avec succès les tests A, B, C.

Dans toute la suite, on va essentiellement se préoccuper du test C qui assure le "raccordement" des éléments lorsque $h \rightarrow 0$. Notons qu'il n'y a absolument rien à vérifier sur les formes bilinéaires et linéaires. Il ne s'agit ici que de l'approximation des espaces.

Si on veut calculer les formes bilinéaires et linéaires par des formules de quadratures, alors là seulement on pourra introduire des tests (de consistance en particulier!)

Il semble donc qu'il y ait une différence entre ce test C et le Patch Test cf. STRANG-FIX [] et la bibliographie de l'ouvrage.

§ 2 . APPROXIMATION DE $H^1(\Omega) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$

1. L'espace V_h^1 et le test C :

$H^1(\Omega)$ est un sous ensemble de $F_1 = (L^2(\Omega))^3$

$$u \equiv (u, D_1 u, D_2 u) \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$$

De même V_h^1 est un sous espace de F_1

$$v_h \equiv (v_h, \tilde{D}_1 v_h, \tilde{D}_2 v_h)$$

où $\tilde{D}_i v_h \Big|_K = D_i \left(\overline{v_h} \Big|_K \right)$ dérivée ordinaire dans K

$$\left(u_h, v_h \right)_{V_h^1} = \left(u_h, v_h \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \left(\tilde{D}_i u_h, \tilde{D}_i v_h \right)_{L^2(\Omega)}$$

1ère forme du TEST C :

$$\left. \begin{array}{l} u_h \in V_h^1, \|u_h\|_{F_1} \leq C \\ u_h \rightarrow u \in F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow v \in V = H^1(\Omega)$$

Notons que $u_h \rightarrow u \in F_1$ signifie que, si $u = (u_0, u_1, u_2)$

$$u_h \rightarrow u_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$\tilde{D}_1 u_h \rightarrow u_1 \in L^2(\Omega) \quad "$$

$$\tilde{D}_2 u_h \rightarrow u_2 \in L^2(\Omega) \quad "$$

il faut montrer que $u_1 = D_1 u_0$, $u_2 = D_2 u_0$ (donc que $u_0 \in H^1(\Omega)$).

Cela signifie que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(u_1, \varphi) + (u_0, D_1 \varphi) = 0 \quad i = 1, 2$$

On peut dire les choses autrement :

2ème forme du TEST C :

$$\left. \begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^1} \leq C \\ u_h \in V_h \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i = 1, 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi) \right\} = 0$$

les 2 formes sont évidemment équivalentes; c'est cette 2ème forme que nous allons utiliser.

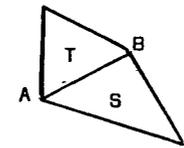
2. Une condition suffisante pour que le test C soit passé dans $H^1(\Omega)$.

Voyons d'abord quelques définitions : $u_h \in V_h^1$ est définie localement sur chaque élément K de la triangulation ; on pose $u_h^K = u_h \Big|_K$; u_h^K a une trace sur la frontière ∂K , notée γu_h^K , ou u_h^K , ou u_h s'il n'y a pas d'ambiguïté.

La propriété V.M. (valeur moyenne) :

On dira que u_h a la propriété V.M. si $\forall T, S \in \mathcal{T}_h$, ayant un côté commun

AB on a :



$$(2.1) \quad \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^T d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^S d\sigma.$$

Cette propriété est trivialement vérifiée si $u_h \in C^0(\Omega)$.

On va démontrer le

Théorème 2.1. : si tout élément de V_h^1 a la propriété V.M. alors le test C est passé dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration :

Commençons par donner une notation :

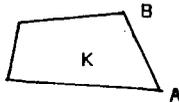
• à tout élément u_h on va associer une fonction définie sur Ω , constante

sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$; elle sera notée \hat{u}_h

$$\hat{u}_h|_K = \frac{1}{|K|} \int_K u_h^k(x) dx, \quad |K| = \int_K dx$$

• On associe à la restriction u_h^k de u_h à K une fonction \tilde{u}_h^k définie sur ∂K ,

constante sur chaque côté :



$$\tilde{u}_h^k|_{AB} = \frac{1}{|AB|} \int_{AB} \nu u_h^k d\sigma$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté on écrira \hat{u}_h, \tilde{u}_h au lieu de $\hat{u}_h|_K, \tilde{u}_h^k, \dots$

Démontrons le théorème :

Soit $u_h \in V_h^1$ tel que

$$\|u_h\|_{V_h^1}^2 = \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{D}_1 u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{D}_2 u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$$

soit $\varphi \in \mathcal{B}(\Omega)$ et $i = 1$ ou 2 ; il s'agit de montrer le test C sous la 2ème

forme :

$$(2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} A_i(u_h, \varphi) = 0$$

où

$$(2.3) \quad A_i(u_h, \varphi) = (D_i u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h, \tilde{D}_i \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

On a, en supprimant momentanément l'indice h ,

$$\begin{aligned} A_i(u, \varphi) &= \sum_K (D_i u, \varphi)_{L^2(K)} + (u, D_i \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_K \int_{\partial K} u \cdot \varphi \cdot \eta_i d\sigma \end{aligned}$$

la normale extérieure à ∂K ayant pour cosinus directeurs (η_1, η_2)

grâce à l'hypothèse V.M. on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u}) \varphi \eta_i d\sigma$$

mais puisque \tilde{u} est défini par valeur moyenne et que $\tilde{\varphi}$ est constante sur chaque

côté, on a aussi

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma$$

En ajoutant et en retranchant \hat{u} et $\hat{\varphi}$, on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u} + \hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \hat{\varphi} + \hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} A_i(u, \varphi) &= \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi}) \eta_i d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma \\ &\quad + \sum_K \int_{\partial K} (\hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma \end{aligned}$$

Sur chaque côté $\hat{u} - \tilde{u}$ est constant, donc le dernier terme est nul d'où :

$$(2.4) \quad \begin{cases} A_i(u, \varphi) = B_i(u, \varphi) + C_i(u, \varphi) \\ B_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi}) \eta_i d\sigma \\ C_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma = \sum_K \int_{\partial K} (\tilde{u} - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma \end{cases}$$

On peut réécrire B_i sous la forme ;

$$B_i(u, \varphi) = \sum_K \left\{ (D_i(u - \hat{u}), \varphi - \hat{\varphi})_{L^2(K)} + (u - \hat{u}, D_i(\varphi - \hat{\varphi}))_{L^2(K)} \right\}$$

$$B_i(u, \varphi) = (D_i u, \varphi - \hat{\varphi})_{L^2(\Omega)} + (u - \hat{u}, D_i \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

on vérifie facilement que

$$(2.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_i(u_h, \varphi) = 0$$

Pour majorer C_i , on utilise le fait que $|\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}| \leq C_\varphi \cdot h$ et que le nombre

d'éléments est d'ordre $\frac{1}{h^2}$ ceci est en fait une hypothèse sur la triangulation;

on a en utilisant plusieurs fois Cauchy-Schwartz :

$$|C_1(u, \varphi)|^2 \leq \frac{C_0}{h^2} \sum_K \int |\hat{u} - \tilde{u}|^2 d\sigma \cdot \int |\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}|^2 d\sigma$$

$$\leq C_1 \cdot h \sum_K \int_{\partial K} |\hat{u} - \tilde{u}|^2 d\sigma$$

admettons un instant le :

Lemme 2.1. : $\forall v \in H^1(K)$, pour tout coté γ de K on a :

$$(2.6) \quad |\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \leq C \|u\|_{H^1(K)}$$

alors il vient :

$$|C_1(u, \varphi)|^2 \leq C_2 h^2 \sum_K \|u\|_{H^1(K)}^2$$

$$|C_1(u, \varphi)|^2 \leq C_2 h^2 \|u\|_{F_1}^2$$

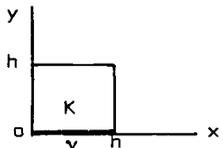
et donc

$$(2.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} C_1(u_h, \varphi) = 0$$

Avec (2.4), (2.5), (2.7) on obtient (2.2).

Démonstration du lemme :

Cas du carré :



$$\tilde{u}_\gamma = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, 0) dx$$

$$\hat{u} = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h u(x, y) dx dy$$

On a : $u(x, y) = u(x, 0) + \int_0^y u'_y(x, t) dt$

d'où en intégrant sur le carré

$$\hat{u} h^2 = \tilde{u}_\gamma h^2 + \iint dx dy \int_0^y u'_y(x, t) dt$$

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| h^2 = \left| \iint dx dy \int_0^y u'_y(x, t) dt \right|^2$$

$$\leq h^2 \iint dx dy \left| \int_0^y u'_y(x, t) dt \right|^2$$

$$\leq h^3 \iint dx dy \int_0^h |u'_y(x, t)|^2 dt$$

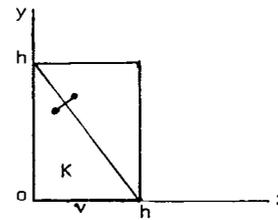
$$\leq h^4 \iint |u'_y(x, t)|^2 dt$$

$$\leq h^4 \|u\|_{H^1(K)}^2$$

d'où

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \leq \|u\|_{H^1(K)}$$

Cas du triangle isocèle :



on prolonge la fonction par reflexion

sur l'hypothénuse du triangle et on applique le

résultat précédent en remplaçant la norme dans

$H^1(K)$ par 2 fois la norme.

Cas général : (triangles): par une transformation affine on se ramène au cas précédent. (cf cours CIARLET [] Chap.6 - Th.3, Th.4)

Cas général : (quadrilatères): on partage le quadrilatère en 2 triangles.

Nous allons maintenant nous intéresser à des perturbations d'éléments qui passent le Test C.

Théorème 2.2 : si tout élément u_h de V_h^1 a la propriété suivante :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \|u_h\|_F \leq C \quad \text{alors il existe } \pi u_h \in F \text{ tel que :} \\ \lim_{h \rightarrow 0} (\pi u_h - u_h) = 0 \text{ dans } F \text{ faible et que } \pi u_h \text{ passe le Test C} \end{array} \right.$$

alors le Test C est passé dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration : avant de démontrer ce théorème, fixons un peu de vocabulaire :

πu_h est en général un élément fini plus simple que u_h , u_h peut être regardé

la démonstration est évidente : on retourne à l'hypothèse C, §1, n°2.

Regardons maintenant quelques utilisations possibles du théorème 2.2.

EXEMPLE 2.1.: on suppose ceci : si u_h est borné dans F, on peut construire

πu_h qui vérifie le Test C et tel que

$$(2.9) \quad \|u_h - \pi u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\tilde{D}_i u_h - \tilde{D}_i \pi u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_h \|u_h\|_F^2.$$

Alors (2.8) a lieu et le Test C est passé.

EXEMPLE 2.2.: on suppose maintenant, que πu_h passe le test, que

$\pi u_h - u_h \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ et que $\forall K$ on a

$$(2.10) \quad \int_K D_i(u_h - \pi u_h) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

Dans ces conditions (2.8) a lieu et le Test C est passé.

Remarque 2.1 :

Tout ce qui a été fait dans ce numéro est valable en dimension 3, (2.6)

devant être changé en

$$(2.6)' \quad |\hat{u} - \tilde{u}_v|^2 \leq C \frac{1}{h} \|u\|_{H^1(K)}^2$$

mais le théorème 2.1 est inchangé.

3. Quelques éléments qui passent le Test C dans $H^1(\Omega)$.

3.1 Relations qui permettent de définir des valeurs moyennes sur les côtés des éléments.

Soit u un polynôme défini sur K, soit \hat{u} son transporté sur l'élément de référence \hat{K} dont 2 sommets sont $(-1,0), (1,0)$; on va se limiter aux polynômes de degré 5; on suppose que

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_1, x_2) = & a + [bx + cy] + [dx^2 + exy + fy^2] + [gx^3 + hx^2y \\ & + ixy^2 + jy^3] + [kx^4 + lx^3y + mx^2y^2 + nxy^3 + py^4] \\ & + [qx^5 + rx^4y + sx^3y^2 + tx^2y^3 + uxy^4 + vy^5] \end{aligned}$$

$$\hat{u} = u_0 + u_1 + \dots + u_5$$

On pose

$$\psi(s) = \hat{u}(s, 0)$$

$$m = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(s) ds = \text{valeur moyenne de } u \text{ sur un côté de } K$$

$$E_X = \frac{\psi(X) + \psi(-X)}{2} \quad E_0 = \psi(0)$$

$$D_X = \frac{\psi'(X) - \psi'(-X)}{2}$$

Pour étudier les différentes contributions des polynômes homogènes u_0, \dots, u_5

on dispose les résultats sous forme de tableau :

\hat{u}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\psi(s) =$	a	+bs	+ds ²	+gs ³	+ks ⁴	+qs ⁵
m =	a	+ 0	+ $\frac{d}{3}$	+ 0	+ $\frac{k}{5}$	+ 0
$E_X =$	a	+ 0	+dX ²	+ 0	+kX ⁴	+ 0
$\psi'(s) =$		b	+2ds	+3gs ²	+4ks ³	+5qs ⁴
$D_X =$		+ 0	2ds	+ 0	+4kX ³	+ 0

3.1.1. Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles de la fonction

type $m = f(E_X, E_Y, E_Z)$ où f est une fonction connue; X, Y, Z pouvant être

distincts ou non; en fait $m = f(\psi(X), \psi(-X), \psi(Y), \psi(-Y), \psi(Z), \psi(-Z))$

$$(3.1) \begin{cases} \hat{u} \in (P_1, xy) \\ m = E_0 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad (0)$$

$$(3.2) \begin{cases} \hat{u} \in (P_1, xy) \\ m = E_1 \end{cases} \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (-1, +1)$$

$$(3.3) \begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = E_X, X^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(3.4) \begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = E_0 + \frac{1}{3X^2}(E_X - E_0) \quad X = 1 \end{cases} \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (-1, 0, 1)$$

$$(3.5) \begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = E_0 + \frac{1}{3X^2}(E_X - E_0) \quad 0 < X < 1 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-X, 0, +Y) \\ 0 < X < 1 \end{matrix}$$

$$(3.6) \begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = \frac{X^2 E_1 - E_X}{X^2 - 1} + \frac{1}{3} \frac{E_X - E_1}{X^2 - 1} \quad 0 \leq X < 1 \end{cases} \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-1, -X, X, 1) \\ 0 < X < 1 \end{matrix}$$

$$(3.7) \begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, x^4y^2, x^3y^2, x^2y^4, xy^5) \\ m = -\frac{2}{3} E_1 + \frac{5}{3} E_X \quad X^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$$

$$(3.8) \begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, \dots, xy^5) \\ m = f(E_0, E_X, E_Y) \quad 0 < X < Y \leq 1 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-1, -X, 0, X, Y) \\ 0 < X < Y \leq 1 \end{matrix}$$

$$(3.9) \begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, \dots, xy^5) \\ m = g(E_1, E_X, E_Y) \quad 0 \leq X < Y < 1 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-1, -Y-X, X, Y, 1) \\ 0 \leq X < Y \end{matrix}$$

3.1.2. Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles de la fonction u et de ses dérivées premières.

On ne va pas expliciter les fonctions; on donne seulement la forme des résultats

$$m = f(E_X, E_Y, D_2, D_Y)$$

les points X, Y, Z, V étant différents ou non selon les cas.

Une première relation est du type :

$$(3.10) \begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = f(E_X, D_Y) \quad 0 \leq X \leq 1 \quad Y \neq 0 \end{cases}$$

qui conduit à 2 cas particuliers

$$(3.10)_1 \quad X = 0 \quad 0 < Y \leq 1 \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-Y, 0, +Y) \\ 0 < Y \leq 1 \end{matrix}$$

$$(3.10)_2 \quad X = 1 \quad 0 < Y \leq 1 \quad \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad \begin{matrix} (-1, -Y, +Y, +1) \\ 0 < Y \leq 1 \end{matrix}$$

$$(3.11) \begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5 y, x^4 y^2, x^3 y^3, x^2 y^4, xy^5) \\ m = f(E_X, E_Y, D_Z^1) \end{cases} \quad \text{Contraintes sur } X, Y, Z$$

elle conduit à des cas particuliers :

$$(3.11)_1 \quad X = 0, \quad 0 < Y \leq 1, \quad Y^2 \neq 2Z^2$$



$$(3.11)_2 \quad X = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & Y^2 & Z^4 \\ 0 & 2Z & 4Z^3 \end{pmatrix} \neq 0$$



Enfin on a une relation du type

$$(3.12) \begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5 y, \dots, xy^5) \\ m = f(E_X, D_Y, D_Z) \end{cases} \quad \begin{aligned} &YZ(Z-Y)(Z+Y) \neq 0 \\ &0 \leq X \leq 1 \quad 0 < Y < Z \leq 1 \end{aligned}$$

qui conduit aux 3 cas :

$$(3.12)_1 \quad X = 1$$



$$(3.12)_2 \quad X = 0$$



$$(3.12)_3 \quad X \in]0, 1[$$



Notons ceci : on peut aussi établir des relations qui utilisent la dérivée seconde; nous ne le ferons pas ici.

3.2 Quelques éléments

On choisit comme degrés de liberté les éléments qui servent à exprimer m dans les relations précédentes. Notons que dans plusieurs cas on ne fixera pas tous les degrés de liberté.

d = nombre de degrés de liberté imposés pour passer le Test C
 p = nombre total de degrés.

TRIANGLES						
type	S c h é m a	d	d°P	p	points(sur -1, +1)	relation
0		3	≥1	>3	aucun	Th. 2.1
1		3	1	3	0	(3.1)
2		3	1	10	± 1	(3.2)
3		6	3	10	± 1/√3	(3.3)
4		6	3	10	± 1, 0	(3.4)
5		9	3	10	± X, 0 0 < X < 1	(3.5)
6		9	3	10	± 1, ± Y 0 < X < 1	(3.6)
7		9	5	21	± 1, ± 1/√5	(3.7)
8		15	5	21	± Y, ± X, 0	(3.8)
9		15	5	21	± X, 0, ± 1 0 ≤ X < Y < 1	(3.9)

type	S c h é m a	d	d°P	p	points	relation
10		9	3	10	$\pm X, 0$ $0 < X \leq 1$	(3.10) ₁
11		9	3	10	$\pm 1, \pm X$	(3.10) ₂
12		15	5	21	$0, \pm X, \pm Y$ contrainte	(3.11) ₁
12'		21	5	21	$0 \pm X, \pm Y$ contrainte	(3.11) ₁
13		15	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ contrainte	(3.11) ₂
13'		21	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ contrainte	(3.11) ₂
14		15	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Z$ $0 < Y < Z < 1$	(3.12) ₁
15		15	5	21	$0, \pm Y, \pm Z$ $0 < Y < Z \leq 1$	(3.12) ₂
16		18	5	21	$\pm X, \pm Y, \pm Z$ $0 \leq X \leq 1$ $0 < Y < Z < 1$	(3.12) ₃

type	S c h é m a	d	d°P	p	points	relation
0		4	> 2		aucun	Th.2.1
1		4	$P_{1,xy}$	4	± 1	(3.1)
2		8	P_3	10	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	(3.2)
3		8	P_3	10	$\pm 1, 0$	(3.4)
4		12	$P_3, x^3, y^3, x^2y^2, xy^3$	12	$\pm X, 0$ $0 < X \leq 1$	(3.5)
5		12	$P_3, x^3, y^3, x^2y^2, xy^3$	12	$\pm 1, \pm X$ $0 < X < 1$	(3.6)
6		12	P_5	21	$\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$	(3.7)
7		20	P_5	21	$\pm X, \pm Y, 0$ $0 < X < Y < 1$	(3.8)
8		20	P_5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ $0 \leq X < Y < 1$	(3.9)
9		12	$P_3, x^3, y^3, x^2y^2, xy^3$	13	$\pm X, 0$ $0 < X \leq 1$	(3.10) ₂
10		20	P_5	21	$\pm X, \pm Y, 0$ 1 contrainte	(3.11) ₁
11		20	P_5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ 1 contrainte	(3.11) ₂
12		20	P_5	21	$\pm 1, \pm Y, \pm Z$ $0 < Y < Z \leq 1$	(3.12) ₁
13		20	P_5	21	$\pm Y, \pm Z, 0$ $0 < Y < Z \leq 1$	(3.12) ₂

§ 3. APPROXIMATION DANS $H^2(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

1. L'espace V_h^2 et le Test C dans $H^2(\Omega)$

$v \in H^2(\Omega)$ est identifié avec un élément de $F_2 = (L^2(\Omega))^6$

$$v \equiv (v, D_1 v, D_2 v, D_{1,1} v, D_{1,2} v, D_{2,2} v)$$

$$\text{où } D_i v = \frac{\partial}{\partial x_i} v, \quad D_{i,j} v = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v$$

De même un élément $v_h \in V_h^2$ est identifié avec un élément de F_2

$$v_h \equiv (v_h, \tilde{D}_1 v_h, \tilde{D}_2 v_h, \tilde{D}_{1,1} v_h, \tilde{D}_{1,2} v_h, \tilde{D}_{2,2} v_h)$$

et on a

$$\|v_h\|_{V_h^2} = \|v_h\|_{F_2}$$

la 2^{ième} forme du Test C est ici :

$$(1.1) \quad \left. \begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \leq c \\ u_h \in V_h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i, j = 1, 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) - (u_h, D_{j,i} \varphi)\} = 0 \end{array} \right.$$

ou encore

$$(1.2) \quad \left. \begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \leq c \\ u_h \in V_h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i, j = 1, 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) + (\tilde{D}_j u_h, D_i \varphi)\} = 0 \end{array} \right.$$

Théorème 1.1 : si tout élément $(u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h, \tilde{D}_{1,1} u_h, \tilde{D}_{1,2} u_h, \tilde{D}_{2,2} u_h)$ de V_h^2 est tel

que $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ ont la propriété Valeur Moyenne alors le Test C est passé

dans $H^2(\Omega)$.

Démonstration :

On applique le Théorème 2.1 à $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$.

Cela va permettre la construction de nombreux éléments finis qui passent le

Test C dans $H^2(\Omega)$; il suffit de choisir les degrés de liberté de façon que

les 3 valeurs moyennes de $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ s'expriment en fonction de ces de-

grés de liberté.

Notons la remarque importante suivante :

si $u_h, \tilde{D}_s u_h, \tilde{D}_n u_h$ ont la propriété V.M. alors $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ aussi, et le Test

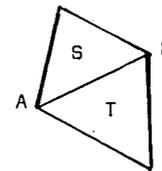
C est passé; D_s est la dérivée tangentielle, D_n la dérivée normale à \mathcal{K} ;

si maintenant, on impose aux éléments, le raccordement aux sommets de la

triangulation, on obtient le

Théorème 1.2 : le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall u_h \in V_h^2$ et pour toute interface

AB commune à 2 éléments S et T on a :



$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h^S(A) = u_h^T(A), \quad u_h^S(B) = u_h^T(B) \\ \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^S d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^T d\sigma \end{array} \right. \quad D_n = \frac{\partial}{\partial n}$$

Démonstration :

Les relations (1.3) entraînent ceci : $\tilde{D}_s u_h, \tilde{D}_n u_h$ vérifient la propriété V.M.;

donc d'après le théorème 2.1, $\tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ passent le Test dans $H^1(\Omega)$.

Il ne reste plus qu'à montrer que u_h passe le test dans $H^1(\Omega)$.

Démontrons le dans le cas d'un triangle : si $u_h \in V_h^2$, on désigne par πu le polynôme d'interpolation de degré 1 de u_h (dans chaque élément K de la triangulation). On sait que (cf. CIARLET [])

$$(1.4) \quad \|u_h - \pi u_h\|_{H^1(K)} \leq c h \|u_h\|_{H^2(K)}$$

la constante c ne dépendant pas de h .

On a maintenant :

$$A_1(u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1 u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

mais $\pi u_h \in C^0(\Omega)$ et donc

$$(1.5) \quad A_1(\pi u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1 \pi u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\pi u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0$$

d'où

$$A_1(u_h, \varphi) = A_1((u_h - \pi u_h), \varphi)$$

$$A_1(u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1(u_h - \pi u_h), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h - \pi u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

Compte tenu de (1.4) il vient :

$$(1.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} A_1(u_h, \varphi) = 0.$$

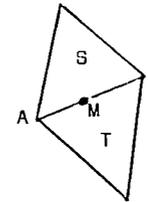
Cas des quadrilatères : on partage en 2 triangles et dans chaque triangle, on

utilise le prolongement précédent.

On va établir maintenant un théorème analogue :

Théorème 1.3 : le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall u_h \in V_h^2$ et pour toute

interface AB on a :



$$(1.7) \quad \begin{cases} u_h^S(M) = u_h^T(M) & M \text{ milieu de } AB \\ \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^S d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^T d\sigma \\ \frac{1}{AB} \int_{AB} D_s u_h^S d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_s u_h^T d\sigma \end{cases}$$

Démonstration :

Comme celle du Théorème 1.2 avec les changements suivants :

- 1) πu_h interpole maintenant aux milieux des côtés
- 2) il faut établir (1.4) pour cette interpolation
- 3) On n'a plus (1.5) : $A_1(\pi u_h, \varphi) = 0$

mais seulement

$$\lim A_1(\pi u_h, \varphi) = 0$$

puisque πu_h est du type T1 (cf. §2)

le reste de la démonstration est inchangé.

Conclusion : chacun des 3 théorèmes va donner naissance à des éléments qui passent le Test C dans $H^2(\Omega)$.

2. Quelques expressions des valeurs moyennes de u, u'_x, u'_y .

On reprend ce qui a été fait dans le § 2, n°3. u est le polynôme transporté,

par une transformation affine, sur le triangle $(-1,0), (+1,0), (0,+1)$, u_1

désigne le polynôme homogène de degré 1 qui entre dans la constitution de 0 .

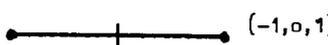
$$\begin{aligned}
\hat{u} &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\
\psi(s) &= a + bs + ds^2 + gs^3 + ks^4 + qs^5 \\
\psi'_x(s) &= b + 2ds + 3gs^2 + 4ks^3 + 5qs^4 \\
\psi_y(s) &= c + es + hs^2 + ls^3 + rs^4 \\
m &= a + \frac{d}{3} + \frac{k}{5} \\
m_x &= b + g + q \\
m_y &= c + \frac{h}{3} + \frac{r}{5}
\end{aligned}$$

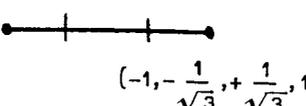
On a noté $\psi(s) = \hat{u}(s, 0)$

$$\begin{aligned}
\psi_x(s) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(s, 0) & m_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_x(s) ds \\
\psi_y(s) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(s, 0) & m_y &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_y(s) ds
\end{aligned}$$

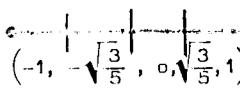
le côté AB habituel est ici $(-1, +1)$.

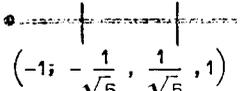
2.1. Quelques relations qui font intervenir des valeurs de la fonction et des dérivées

$$(2.1) \left\{ \begin{aligned}
\hat{u} &\in (P_2, x^2y, xy^2) \\
m_x &= \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\
m_y &= \psi_y(0) \\
\psi_x(0) &= \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2}
\end{aligned} \right.$$


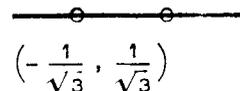
$$(2.2) \left\{ \begin{aligned}
\hat{u} &\in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5) \\
m_x &= \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\
m_y &= \frac{\psi_y(x) + \psi_y(-x)}{2}
\end{aligned} \right. \quad x^2 = \frac{1}{3}$$


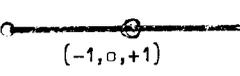
$$(2.3) \left\{ \begin{aligned}
\hat{u} &\in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5) \\
m_x &= \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\
m_y &= \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1)) + \frac{2}{3} \psi_y(0) \\
\psi_x(0) &= \frac{3}{4} (\psi(1) - \psi(-1)) - \frac{1}{4} (\psi_x(1) + \psi_x(-1))
\end{aligned} \right. \quad (-1, 0, 1)$$

$$(2.4) \left\{ \begin{aligned}
\hat{u} &\in P_6 \\
m_x &= \psi(1) - \psi(-1) \\
m_y &= \frac{5}{18} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{4}{9} \psi_y(0) \\
\psi_x(0) &= \frac{9}{8} (\psi(1) - \psi(0)) - \frac{5}{8} (\psi_x(x) + \psi_x(-x))
\end{aligned} \right. \quad \left(-1, -\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}, 1 \right) \quad x^2 = \frac{3}{5}$$


$$(2.5) \left\{ \begin{aligned}
\hat{u} &\in P_6 \\
m_x &= \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\
m_y &= \frac{5}{6} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1))
\end{aligned} \right. \quad \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 \right) \quad x^2 = \frac{1}{5}$$


2.2. Quelques autres relations :

$$(2.6) \left\{ \begin{aligned}
u &\in P_4 \\
m_x &= \psi_x(x) + \psi_x(-x) \\
m_y &= \frac{\psi_y(x) + \psi_y(-x)}{2}
\end{aligned} \right. \quad x^2 = \frac{1}{3}$$


$$(2.7) \left\{ \begin{aligned}
u &\in P_4 \\
m_x &= \frac{2}{3} \psi_x(0) + \frac{1}{6} (\psi_x(1) + \psi_x(-1)) \\
m_y &= \frac{2}{3} \psi_y(0) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1))
\end{aligned} \right.$$


$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in P_6 \\ m_x = \frac{5}{12} (\psi_x(x) + \psi_x(-x)) + \frac{1}{12} (\psi_x(1) + \psi_x(-1)) \\ m_y = \frac{5}{6} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ (-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1) \\ x^2 = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in P_6 \\ m_x = \frac{4}{9} \psi_x(0) + \frac{5}{18} (\psi_x(x) + \psi_x(-x)) \\ m_y = \frac{4}{9} \psi_y(0) + \frac{5}{18} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ (-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}) \\ x^2 = \frac{3}{5} \end{array}$$

3. Quelques éléments qui passent le Test C dans $H^2(\Omega)$.

d = nombre de degrés de liberté imposés pour passer le Test C

p = nombre total de degrés de liberté.

(voir tableau page
suivante)

TRIANGLES						
type	S c h é m a	d	d° P	p	Points	relation
0		9				Th. 1.1
1		6				Th. 1.2
2		6	MURLEY 2	6	(-1, 0, +1)	(2.1)
3		6	FRAEISS P2 < PK < P3		(-1, 0, +1)	(2.2)
4		15	P4, x3y2, x2y3	17	(-1, -1/√3, 1/√3, 1)	(2.2)
5		15	P4, x3y2, x2y3	17	(-1, 0, +1)	(2.3)
6		18	P5	21	(-1, -√3/5, 0, √3/5, 1)	(2.4)
7		21	P5	21	(-1, -1/√5, 1/√5, 1)	(2.5)
8		9				Th. 1.3
9		15	P4	15	(-1/√5, 0, 1/√5)	(2.9)
10		15	P4	15	(-1, 0, 1)	(2.10)
11		21	P5	21	(-1, -1/√5, 0, 1/√5, 1)	(2.11)
12		21	P5	21	(-√3/5, 0, +√3/5)	(2.12)

QUADRILATERES						
type	S c h é m a	d	P	p	Points	relation
0		12				Th. 1.1
1		8			-1, +1	Th. 1.2
2		8	P2, x2y, xy2	12	(-1, 0, +1)	Th. 1.2 (2.1)
3		12	P4	15	(-1, -1/√3, 1/√3, 1)	(2.2)
4		16	P4, x3y2, x2y3	17	(-1, 0, +1)	(2.3)
5		16	P5	21	(-1, -√3/5, 0, √3/5, 1)	(2.4)
6		20	P5	21	(-1, -1/√5, 1/√5, 1)	(2.5)
7		24	P6	28	(-1, -√3/5, 0, √3/5, 1)	(2.4)
8		28	P6	28	(-1, -1/√5, 1/√5, 1)	(2.5)
9		12				Th. 1.3
10		28	P6	28	(-1, -1/√5, 1/√5, 1)	(2.8)
11		28	P6	28	(-√3/5, 0, +√3/5)	(2.9)