R. ARCANGELI
J. L. GOUT

Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A1_0>

SUR L'EVALUATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

DANS UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$ (*)

R. ARCANGELI et J.L. GOUT

Département de Mathématiques

Université de PAU

===

(*) Texte en grande partie extrait d'un article à paraître dans la R.A.I.R.O.

0 - INTRODUCTION ET NOTATIONS

Ce travail est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les méthodes utilisées, basées sur la formule de Taylor avec reste intégral, permettent d'obtenir des majorations de l'erreur en semi-normes $|.|_{m,p,\Omega}$ (dont la définition est rappelée ci-dessous).

On en déduit des applications à l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans la méthode des éléments finis droits et à l'estimation de l'erreur d'intégration numérique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Cette étude a pour point de départ l'article de P.G. Ciarlet et P.A. Raviart [4]. Les résultats du paragraphe 2 font suite à celui de J. Meinguet [10], où est donné un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme (cf. également G. Strang [13], P.G. Ciarlet et P.A. Raviart [5], P.G. Ciarlet et C. Wagschal [6], R.E. Barnhill et J.R. Whiteman [1], J.H. Bramble et S.R. Hilbert [2] et [3]) .

Soient n un entier ≥ 1 et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, notée $||.||$, et on désigne par h le diamètre de Ω .

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} ,$$

et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $\alpha ! = \alpha_1 ! \ldots \alpha_n !$.

Soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de sa topologie naturelle. Pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $\ell = 0,1,\ldots,m$ et pour presque tout $x \in \Omega$, on note $D^\ell u(x)$ la $\ell^{\text{ième}}$ dérivée de u au point x et on pose

$$||D^\ell u(x)|| = \sup_{\substack{||\xi_i|| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq \ell}} |D^\ell u(x).(\xi_1,\ldots,\xi_\ell)| ,$$

avec, par convention, $||D^{\ell}u(x)|| = |u(x)|$ pour $\ell = 0$. On munit également $W^{m,p}(\Omega)$ des semi-normes

$$|u|_{\ell,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} ||D^{\ell}u(x)||^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 0 \leq \ell \leq m \quad ,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. Toutefois, pour K compact de $\mathbb{R}^n$, on écrira pour simplifier , comme c'est l'usage, $W^{m,p}(K)$ [ou $H^m(K)$, dans le cas $p = 2$] au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$, $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K , et $|.|_{\ell,p,K}$ au lieu de $|.|_{\ell,p,\overset{\circ}{K}}$.

Soit enfin k un entier ≥ 0 . On désigne par P_k l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en les n variables $x_1, \ldots, x_n$.

1- ETUDE DIRECTE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION

On suppose que

(1-1) $\quad k + 1 > \frac{n}{p}$,

(1-2) $\quad \Omega$ est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne, tel que $\overline{\Omega}$ soit étoilé par rapport à chacun des points de Σ ,

où

(1-3) $\quad \Sigma = \{a_i\}_{i=1,\ldots,N}$ est un ensemble P-unisolvant de points de $\overline{\Omega}$, P désignant un espace de dimension finie N de fonctions définies sur $\overline{\Omega}$ tel que $P_k \subset P \subset C^k(\overline{\Omega})$.

(Pour la définition d'ensemble P-unisolvant, comme, de façon générale, pour la définition des différentes notions utilisées dans la méthode des éléments finis, nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [4]) . On a évidemment

$$N \geq \dim P_k = \binom{n+k}{k} \quad .$$

Pour tout $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, pour tout $a \in \overline{\Omega}$ tel que $\overline{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a et pour tout $x \in \Omega$, on pose

(1-4) $$J(u,a)(x) = \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1}u(x+t(a-x)).(a-x)^{k+1} dt \ .$$

Compte tenu de (1-2) et (1-3), l'application de la formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral, donne, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $x \in \Omega$, les relations

$$(1\text{-}5) \qquad u(a_i) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{D^{\ell} u(x).(a_i - x)^{\ell}}{\ell!} + \frac{1}{k!} J(u,a_i)(x) \ , \quad i = 1,\dots, N \ .$$

On a d'abord la

Proposition 1-1 .

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1) , (1-2) et (1-3). Alors, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$,

$$(1\text{-}6) \qquad ||J(u,a_i)||_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1} \quad , \quad i = 1,\dots, N \ .$$

Démonstration

Le résultat est immédiat lorsque $p = +\infty$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$. On a

$$|J(u,a_i)(x)| \leqslant h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^k ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||\,dt$$

$$\leqslant h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{q}+\varepsilon} (1-t)^{k+\frac{1}{q}-\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||\,dt$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1)p-p\varepsilon-n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$
En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$|J(u,a_i)(x)| \leqslant h^{k+1} \left(\int_0^1 (1-t)^{-1+q\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^{pk+\frac{p}{q}-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant h^{k+1} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{1/q} \left(\int_0^1 (1-t)^{pk+p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dt\right)^{1/p} .$$

On en déduit que

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leqslant h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_{\Omega\times]0,1[} (1-t)^{p(k+1)-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dx dt$$

Effectuant dans l'intégrale du second membre le changement de variables

$$\left| \begin{array}{l} y_j = x_j + t(a_{i,j} - x_j) \quad , \quad j = 1,\dots, n \\ s = t \quad , \end{array} \right.$$

on obtient

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_C (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} \|D^{k+1}u(y)\|^p \, dyds \quad ,$$

où C est un cône ouvert de base Ω et de hauteur 1 inscrit dans $\Omega \times]0,1[$.
D'où l'inégalité

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \left(\int_0^1 (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} ds\right) \left(\int_\Omega \|D^{k+1}u(y)\|^p dy\right) ,$$

soit

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{(k+1)p-p\varepsilon-n} |u|^p_{k+1,p,\Omega} \; h^{p(k+1)} \quad ,$$

et le résultat, avec $\varepsilon = \frac{1}{q}\left[(k+1) - \frac{n}{p}\right]$. $\square$

On peut maintenant montrer le

Théorème 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1) , (1-2) et (1-3) . Soient Π l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur $\sum$ et $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$ l'ensemble des fonctions de base de P relativement à $\sum$. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0,1,\dots,k$, on a :

$$(1\text{-}7) \qquad |u-\Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega}\right) \quad |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1} \quad .$$

Démonstration

1°/ On montre d'abord (1-7) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$. Pour cela on reprend la démonstration du théorème 1 de Ciarlet-Raviart [4] en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, les p_i désignant ici les fonctions de base de P relativement à $\sum$. On obtient de même, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $m = 0,1,\dots,k$, la relation

$$D^m(\Pi u)(x) - D^m u(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N J(u,a_i)(x) D^m p_i(x),$$

où $J(u,a_i)(x)$ est défini par (1-4) . On en déduit que

$$|u-\Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega} \|J(u,a_i)\|_{L^p(\Omega)}$$

et le résultat suit compte tenu de (1-6).

2°/ On en déduit le résultat général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$.

On vérifie en effet que, pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $m = 0,1,\ldots,k$, on a : $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$. D'autre part,

- lorsque $p < +\infty$, on sait que $C^{k+1}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m = 0,1,\ldots, k+1$, puisque Ω est borné à frontière continue (cf. J. Nečas [11]). Il suffit alors de raisonner par densité pour conclure.

- lorsque $p = +\infty$, on remarque que, pour tout $p \geq 1$: $W^{k+1,\infty}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega)$, car Ω est borné. Dans ce cas, la relation (1-7) s'obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ dans le résultat précédent.

Remarque 1-1

Le théorème 1-1 s'applique évidemment à la méthode des éléments finis droits. Considérons seulement le cas des éléments finis de type n-simplexe : soit donc $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ (cf. P.A. Raviart [12]) et supposons alors que $\overline{\Omega}$ soit un élément quelconque K d'une triangulation $\mathcal{T}_h$.

Dans ce cas, il est important de remarquer que, lorsque la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est *régulière* (au sens de Ciarlet-Raviart [4]), la formule (1-7) conduit à des majorations *uniformes* de l'erreur d'interpolation (nous entendons par là que ces majorations sont de la forme

$$|u-\Pi u|_{m,p,K} \leq C(n,k,m,p)\ |u|_{k+1,p,K}\ h^{k+1-m} ,$$

où $C(n,k,m,p)$ ne dépend pas de $\sum$ et de K) : il suffit, pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $|p_i|_{m,\infty,K}$ à un calcul dans un n-simplexe de référence et de tenir compte de résultats de [4].

Remarque 1-2

Montrons maintenant que l'on peut *calculer* effectivement des majorations de l'erreur d'interpolation dans la méthode des éléments finis droits. Soient toujours $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\Omega} = K$ un élément quelconque d'une triangulation $\mathcal{T}_h$. Supposons que les fonctions de base p_i soient explicitées sous la forme

$$p_i(x) = f_i(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)) , \quad i = 1,\ldots, N ,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k indépendantes de $\sum$ et de K et où $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport au sommet du n-simplexe K .

On vérifie que, pour tout $m = 0,1,\ldots,k$ et pour tout $i = 1,\ldots, N$

$$||D^m p_i(x)|| \leqslant (\operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n+1} ||D\lambda_j||)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x))| ,$$

où ici $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Il résulte alors des relations (cf. Ciarlet-Wagschal [6])

$$||D\lambda_j|| \leqslant \frac{1}{\rho} , \; j = 1,\ldots, n+1 ,$$

où ρ désigne le maximum des diamètres des sphères contenues dans K , que l'on a , pour tout $m = 0,1,\ldots,k$,

$$(1\text{-}8) \qquad |u-\Pi u|_{m,p,K} \leqslant C(n,k,m,p,K) \quad |u|_{k+1,p,K} \; \frac{h^{k+1}}{\rho^m} ,$$

avec

$$(1\text{-}9) \qquad C(n,k,m,p,K) = \frac{1}{k!} \; \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N} \operatorname*{Max}_{x\in K} (\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x))|).$$

On constate que le second membre de (1-9) est en fait indépendant de K (il ne dépend que d'un n-simplexe fixe). On vérifie donc à nouveau que si la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est régulière, les majorations (1-8) sont uniformes.

On retrouve ainsi le théorème 5 de Ciarlet-Raviart [4] dans le cas où Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur $\sum$.

Il est à souligner que le calcul des constantes (1-9) s'effectue directement et ne nécessite donc pas le passage par un élément fini de référence.

Du point de vue numérique, ce calcul présente des difficultés, même dans le cas où P est un espace de polynômes (on est ramené à la détermination de maximums de fonctions de $n+1$ variables). Notons cependant que le calcul est aisé lorsque $m = k$ et $P = P_k$.

La méthode du paragraphe suivant, lorsqu'elle est applicable (cf. remarque 2-3) , ne présente pas les mêmes inconvénients.

2 - ETUDE BASEE SUR L'APPROXIMATION

Commençons par un résultat d'approximation.

Soient n un entier $\geqslant 1$, p un réel avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, k un entier tel que $k+1 > \frac{n}{p}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de diamètre h.

Pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et pour presque tout $a \in \Omega$, on note $\psi_T(u,a)$ le "polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a", défini par

$$(2\text{-}1) \qquad \forall x \in \Omega, \quad \psi_T(u,a)(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{D^\ell u(a).(x-a)^\ell}{\ell !},$$

et $D^m\psi_T(u,a)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application $x \to \psi_T(u,a)(x)$. On vérifie que l'application $(x,a) \to \|D^m\psi_T(u,a)(x)\|$ appartient à $L^p(\Omega\times\Omega)$.

Proposition 2-1

On suppose que n,p,k vérifient (1-1) et que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière continue. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$, on a :

(i) Si $p < +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,p,\Omega} \leqslant \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1-m}$$

(ii) Si $p = +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,\infty,\Omega} \leqslant \sup_{a\in\Omega} \text{ess}\, |u-\psi_T(u,a)|_{m,\infty,\Omega} \leqslant \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega}\, h^{k+1-m},$$

où $\psi_T(u,a)$ est défini par (2-1).

Démonstration

Dans (i) [resp. (ii)], la première inégalité est évidente. Tout revient donc, dans chaque cas, à vérifier la seconde.

1°- Montrons d'abord la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$.

Soient $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et a un point quelconque de Ω . On a

$$|u-\psi_T(u,a)|_{m,p,\Omega} = \left(\int_\Omega ||D^m u(x) - D^m\psi_T(u,a)(x)||^p dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre $k - m$ pour $D^m u$ au voisinage de a , on a :

$$D^m u(x) - D^m\psi_T(u,a)(x) = \frac{1}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} D^{k+1}u(a+t(x-a)).(x-a)^{k+1-m} dt ,$$

d'où

$$||D^m u(x) - D^m\psi_T(u,a)(x)|| \leq \frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} \, ||D^{k+1}u(a+t(x-a))|| dt .$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$||D^m u(x)-D^m\psi_T(u,a)(x)||^p \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!}\right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(a+t(x-a))||^p dt,$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1-m)p-p\varepsilon-n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En intégrant successivement les deux membres de l'inégalité précédente par rapport à x sur Ω , puis par rapport à a sur Ω , on a

$$\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!}\right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_\Omega da \int_\Omega dx \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(a+t(x-a))||^p dt.$$

Après permutation des intégrations en x et a , l'intégrale du second membre s'écrit

$$\int_\Omega dx \int_{\Omega\times]0,1[} (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(a+t(x-a))||^p da \, dt ,$$

et en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1-1, avec ici $\varepsilon = \frac{1}{q} (k+1-m- \frac{n}{p})$, on obtient

$$\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \leq (\text{mes } \Omega) \left(\frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}}\right)^p |u|^p_{k+1,p,\Omega} \; h^{(k+1-m)p} ,$$

d'où la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$.

2°- Montrons maintenant que le résultat précédent est encore valable pour $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$.

Soient $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$ et $(u_j) \subset C^{k+1}(\bar{\Omega})$ une suite convergeant vers u dans $W^{k+1,p}(\Omega)$: il suffit de vérifier que, quand $j \to +\infty$,

$$\left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow \left(\int_\Omega |u - \psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Or, on a

$$\left| \left(\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \right|$$
$$\leq \left(\int_\Omega |u-u_j|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\psi_T(u,a) - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où les deux termes du second membre tendent vers 0 , le premier par hypothèse et le second parce que majoré par

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \sum_{\ell=m}^{k} \frac{h^{\ell-m}}{(\ell-m)!} |u-u_j|_{\ell,p,\Omega} .$$

3°- La seconde inégalité dans (ii) résulte de l'inégalité correspondante dans (i). En effet, si $u \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ alors $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$, puisque Ω est borné, et il suffit de faire tendre p vers $+\infty$ dans (i) pour obtenir le résultat. □

Notons que la proposition 2-1 peut n'avoir lieu que pour $m = 0$. □

Signalons également que lorsque $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, on a (cf. J. Meinguet [10] l'inégalité

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,\infty,\Omega} \leq \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-m} . \quad \square$$

On déduit de la proposition 2-1 le résultat suivant, qui a pour point de départ une idée de J. Meinguet [10] :

<u>Théorème 2-1</u>

On suppose que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que les hypothèses (1-1) et (1-3) sont vérifiées et que Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur $\sum$.

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et pour tout $q \geq 1$, on a :

$$(2\text{-}2) \quad |u-\Pi u|_{m,q,\Omega} \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1-m}$$

$$+ (\text{mes } \Omega)^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,q,\Omega}\Big) |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1},$$

où $\{p_i\}_{i=1,\ldots,N}$ désigne l'ensemble des fonctions de base de P relativement à $\sum$.

Démonstration

Il suffit de montrer le résultat pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, et $p < +\infty$, le cas général s'obtenant en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ [compte tenu du fait que $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$] et en passant à la limite sur p lorsque $p = +\infty$.

Puisque

$$\forall \Psi \in P, \quad \Pi\Psi = \Psi,$$

on a en prenant $\Psi = \Psi_T(u,a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque,

$$\begin{aligned} u - \Pi u &= u - \Psi_T(u,a) - \Pi(u-\Psi_T(u,a)) \\ &= u - \Psi_T(u,a) - \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{N} J(u,a_i)(a)\, p_i, \end{aligned}$$

d'où, pour tout $x \in \Omega$,

$$||D^m(u-\Pi u)(x)|| \leq ||D^m(u-\Psi_T(u,a))(x)|| + \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{N} |J(u,a_i)(a)|\, ||D^m p_i(x)||.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonctions de la variable a et utilisant les propositions 1-1 et 2-1, il vient :

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} ||D^m(u-\Pi u)(x)|| \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1-m}$$

$$+ \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{N} ||D^m p_i(x)||\Big) u_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1}.$$

Prenant ensuite les normes $L^q(\Omega)$ des deux membres par rapport à la variable x, on obtient (2-2) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$.

Remarque 2-1

Comme le théorème 1-1 , le théorème 2-1 s'applique à la méthode des éléments finis droits. Ici aussi et pour les mêmes raisons que celles qui ont été développées dans la remarque 1-1 , la formule (2-2) fournit, lorsque la suite de triangulations est régulière, des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation dans un n-simplexe.

Remarque 2-2

Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que dans la remarque 1-1 , on obtient, pour tout $i = 1, \dots, N$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k + 1 > m + \frac{n}{p}$ avec $p < +\infty$, la relation

$$(2\text{-}3) \qquad |p_i|_{m,p,K} \leq \frac{1}{\rho^m} \left\{ \int_K \Big[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \Big]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Lorsque P est un espace de *polynômes*, le calcul des majorations (2-3) ne présente pas de difficultés particulières : on peut utiliser la formule

$$\int_K (\lambda_1(x))^{\nu_1} \dots (\lambda_{n+1}(x))^{\nu_{n+1}} dx = \frac{\nu_1! \dots \nu_{n+1}!}{(\nu_1 + \dots + \nu_{n+1} + n)!} n! \text{ mes } K , \quad \nu_1, \dots, \nu_{n+1} \in \mathbb{N} ,$$

(cf. O.C. Zienkiewicz [15]) pour calculer le second membre de (2-3) ce qui conduit à des majorations du type

$$|p_i|_{m,p,K} \leq C_i \frac{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}}{\rho^m} ,$$

où les C_i sont des constantes indépendantes de $\sum$ et de K .

Remarque 2-3

Rappelons que le théorème 2-1 nécessite l'hypothèse $k + 1 > m + \frac{n}{p}$: il peut donc n'avoir lieu que pour $m = 0$, alors que le théorème 1-1 est toujours valable pour $m = 0,1,\dots,k$.

Du point de vue du calcul numérique, l'utilisation du théorème 1-1 implique (cf. remarque 1-2) la détermination de maximums de fonctions de plusieurs variables, tandis que l'application du théorème 2-1 pour $p < +\infty$ entraîne seulement le calcul d'intégrales (cf. remarque 2-2). D'autre part, l'expérience montre que, pour $p < +\infty$, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 1-1 (cf. les exemples numériques du paragraphe 3).

Notons enfin que dans le cas usuel $n = p = 2$, on a la possibilité d'utiliser le théorème 2-1 pour $m = 0,1,\dots,k-1$ et le théorème 1-1 pour $m = k$.

3- APPLICATIONS

3-1 - Exemples d'application à la méthode des éléments finis droits

Soit K un triangle quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note h le diamètre de K et ρ le diamètre du cercle inscrit dans K.

Donnons d'abord des exemples d'application du théorème 1-1 dans le cas $p = 2$.

Exemple 3-1

On prend pour Σ l'ensemble des sommets de K et pour P l'espace P_1.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,\infty,K} = 3$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 3\, |u|_{2,2,K}\, h^2$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{3}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq 3\, |u|_{2,2,K}\, \frac{h^2}{\rho}$$

Exemple 3-2

On prend pour Σ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K et pour P l'espace P_2.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,\infty,K} = 6$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 2\, |u|_{3,2,K}\, h^3$$

$\underline{m = 1}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{21}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq 6 \; |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho}$$

$\underline{m = 2}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{36}{\rho^2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{2,2,K} \leq 9 \; |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho^2} \; . \qquad \square$$

Reprenons les exemples précédents en appliquant maintenant le théorème 2-1 avec $p = q = 2$.

<u>Cas de l'exemple 3-1</u> : On a $k = 1$, $n = p = 2$, donc le théorème (2-1) n'a lieu que pour $m = 0$.

On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,2,K} = \sqrt{\frac{3}{2}} \, (\text{mes } K)^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 3 \; |u|_{2,2,K} \; h^2$$

<u>Cas ce l'exemple 3-2</u> : Ici $k = 2$, $n = p = 2$: les seules valeurs possibles de m sont $m = 0$ et $m = 1$.

$\underline{m = 0}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,2,K} = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{10}} \, (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \subset H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq |u|_{3,2,K} \; h^3$$

$\underline{m = 1}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,2,K} \leq \frac{3 + 6\sqrt{2}}{\rho} \, (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq (1 + 3\,\frac{h}{\rho}) \; |u|_{3,2,K} \; h^2 \; . \qquad \square$$

On peut remarquer que, lorsqu'il est applicable, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats que le théorème 1-1.

3-2 - <u>Application à l'intégration numérique</u>

Pour tout $u \in C^0(\overline{\Omega})$, soit

$$R(u) = \int_\Omega u(x)dx - \sum_{i=1}^{N} \omega_i u(a_i) \qquad (3\text{-}1)$$

l'erreur d'intégration de u sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ correspondant à une formule d'intégration approchée caractérisée par des poids ω_i , $i = 1,\ldots, N$ et des points $a_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1,\ldots, N$. On suppose que

(3-2) $\quad \forall\, \psi \in P_k \quad , \quad R\psi = 0$

i.e. que l'intégration est exacte sur P_k . Notons que l'on a

(3-3) $\quad \sum_{i=1}^{N} \omega_i = \text{mes } \Omega$

Théorème 3-1

On suppose que n , p , k vérifient (1-1) , que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que R est la forme linéaire définie par (3-1) et (3-2) .

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, on a :

(3-4) $$|R(u)| \leq \left\{ (\text{mes } \Omega)^{1/q} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \right\} \frac{1}{k!} \quad \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \; h^{k+1} \quad ,$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration

Il suffit de montrer (3-4) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$, le cas général résultant alors d'un raisonnement précédemment utilisé.

Soit donc $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. On déduit de (3-1) et (3-2) que

$$|R(u)| \leq |u-\psi_T(u,a)|_{0,1,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \quad |u(a_i) - \psi_T(u,a)(a_i)|$$

où $\psi_T(u,a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, est défini par (2-1). On a encore

$$|R(u)| \leq (\text{mes}\Omega)^{1/q} \quad |u-\psi_T(u,a)|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \quad |u(a_i)-\psi_T(u,a)(a_i)|.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonction de la variable a , on obtient

$$|R(u)| \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{0,p,\Omega} da\Big)^{\frac{1}{p}} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \Big(\int_\Omega |u(a_i)-\psi_T(u,a)(a_i)|^p da\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

On procède ensuite comme dans la démonstration du théorème (2-1) et le résultat suit. $\square$

Notons que lorsque les poids ω_i sont *positifs*, il résulte de (3-3) que (3-4) s'écrit

$$|R(u)| \leq 2 \; (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{k!} \quad \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \; h^{k+1} .$$

REFERENCES

[1] BARNHILL R.E. et WHITEMAN J.R., Error Analysis of Finite Element Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems, *The mathematics of Finite Elements and Applications* (J.R. WHITEMAN, ed.), 83-112, Acad. Press (1973).

[2] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R., *Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. 7, 112-124 (1970).

[3] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R., *Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation*, Numer. Math. 16, 362-369 (1971).

[4] CIARLET P.G. et RAVIART P.A., *General Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^n$ with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal. 46, 177-199 (1972).

[5] CIARLET P.G. et RAVIART P.A., *Interpolation Theory over Curved Elements with Applications to Finite Element Methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin. 1, 217-249 (1972).

[6] CIARLET P.G. et WAGSCHAL C., *Multipoint Taylor Formulas and Applications to Finite Element Method*, Numer. Math. 17, 84-100 (1971).

[7] CHENIN P., *Thèse 3ème cycle*, Grenoble (1974).

[8] COATMELEC C., *Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (3) 83, 271-341 (1966).

[9] DESCLOUX J., *Méthode des éléments finis*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (1973).

[10] MEINGUET J., Realistic Estimates for Generic Constants in Multivariate Pointwise Approximation, *Topics in Numerical Analysis II*, J.J.H. Miller ed., Acad. Press. (1975).

[11] NEČAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).

[12] RAVIART P.A., *Méthodes des éléments finis*, rédigé par J.M. THOMAS, D.E.A. Analyse Numérique, Paris VI (1971-1972).

[13] STRANG G., *Approximation in the Finite Element Method*, Numer. Math. 19, 81-98 (1972).

[14] STROUD A.H., *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall (1971).

[15] ZIENKIEWICZ O.C., *La méthode des éléments finis*, Ediscience, Paris (1973).

====