ROBERT VIDAL

Représentation d'anneaux principaux, non nécessairement commutatifs, séparés et complets pour la topologie de Krull

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A8_0>

REPRESENTATION D'ANNEAUX PRINCIPAUX, NON NECESSAIREMENT COMMUTATIFS, SEPARES ET COMPLETS POUR LA TOPOLOGIE DE KRULL par Robert VIDAL

1 - Définitions et notations

Soit A un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, de radical de Jacobson R. La topologie de Krull sur l'anneau A est la topologie linéaire dont une base de voisinages ouverts de 0 est constituée des puissances R^i, $i \geqslant 0$ de R. Cette topologie est séparée si et seulement si : $\bigcap_{i \geq 0} R^i = \{0\}$ et le séparé-complété de l'anneau A pour cette topologie est identifié à la limite projective $\varprojlim_{i \geq 0} A/_{R^i}$ pour les morphismes canoniques.

L'anneau quotient semi-simple $A_{/R}$ sera dit simple artinien, lorsque $A_{/R}$ ne contient aucun idéal bilatère propre et vérifie la condition de "chaîne descendante" pour ses idéaux (à droite ou à gauche, voir (5)).

Un A-module à droite et à gauche M est un A-bimodule selon la terminologie de M. ARTIN (1) s'il engendré sur A (à droite ou à gauche) par son centralisateur noté : $Z_A(M) = \{x \in M / ax = xa, \forall a \in A\}$. Un A-bimodule est dit simple, s'il ne contient aucun sous-bimodule propre, et en particulier il est engendré par tout élément non nul de son centralisateur. Notons que le quotient $R_{/R^2}$ est un A- (et un $A_{/R}$ -) module à droite et à gauche.

L'anneau unitaire Λ , non nécessairement commutatif, de radical de Jacobson $\mathfrak{m}$ sera dit local lorsque $\Lambda_{/\mathfrak{m}}$ est un corps gauche.

L'objet de ce travail est l'étude et la représentation d'une classe particulière d'anneaux, non nécessairement commutatifs ; les démonstrations utilisent des résultats connus sur les modules strictement linéairement compacts, voir (13) et sur les représentations des catégories abéliennes localement artiniennes, voir (7) et (13).

Dans tout ce qui suit, nous rappellerons sous le sigle * les hypothèses de travail :

*. A est un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, de radical de Jacobson R, vérifiant :

i) A est séparé et complet pour la topologie de Krull.

ii) $A_{/R}$ est un anneau simple, artinien.

iii) $R_{/R^2}$ est un A-bimodule simple.

et sous le sigle ** les hypothèses :

** . Λ est un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ vérifiant :

i) Λ est séparé et complet pour la topologie de Krull.

ii) $\mathfrak{m}_{/\mathfrak{m}^2}$ est un Λ-bimodule simple.

2 - Théorèmes de structure

Théorème 1. Soit A un anneau vérifiant les hypothèses * ; alors les seuls idéaux bilatères non triviaux sont les R^i, $i > 0$ et tout idéal bilatère est principal à droite et à gauche. De façon plus précise, il existe $r \in R$ tel que $\forall i > 0$, $A\,r^i = r^i\,A = R^i$.

Preuve : la démonstration repose sur le Lemme préliminaire :

Lemme. Sous les hypothèses du théorème 1, pour tout $i \geq 0$, $R^i{}_{/R^{i+1}}$ est un A-bimodule simple.

Remarque : Le lemme est vérifié dès que $A_{/R}$ est un anneau simple et $R_{/R^2}$ un A-bimodule simple. voir (10).

Démonstration du Lemme. Remarquons d'abord que pour $i = 0$, $R^0{}_{/R^1} = A_{/R}$ est un A-bimodule simple. Soit ρ_1 un élément non nul de $Z_A\,(R_{/R^2})$.

$\forall a \in A \quad \rho_1 a = a\rho_1$, et cet élément engendre $R_{/R^2}$

$$\rho_1\,A = A\,\rho_1 = R_{/R^2}$$

Si r est un représentant de ρ_1 dans R, on a :

$$\forall a \in A \qquad ra - ar \in R^2 \quad \text{et } r\,A + R^2 = Ar + R^2 = R.$$

Montrons par récurrence que : $\forall i > 0$, $\forall a \in A$: $r^i a - ar^i \in R^{i+1}$.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang i-1, on a en particulier :

$r^{i-1}a - a\, r^{i-1} \in R^i$ et donc $r^i a - r\, a\, r^{i-1} \in R^{i+1}$ et

$r^{i-1}\, ar - a\, r^i \in R^{i+1}$ d'où : $r^i\, a - a\, r^i + r\,(r^{i-2}a - a\, r^{i-2}) \in R^{i+1}$

or, par hypothèse de récurrence : $r^{i-2}a - a\, r^{i-2} \in R^{i-1}$ ce qui achève la démonstration.

Montrons par récurrence que : $\forall\, i > 0 \quad r^i\, A + R^{i+1} = Ar^i + R^{i+1} = R^i$.

La démonstration est analogue à celle exposée dans (8), nous la reproduisons ici :

L'hypothèse de récurrence s'écrit : $r^{i-1}\, A + R^i = Ar^{i-1} + R^i = R^{i-1}$

d'où : $r^{i-1}\, R + R^{i+1} = R\, r^{i-1} + R^{i+1} = R^i$ et donc :

$$r^i\, A + R^{i+1} = A\, r^i + R^{i+1} = R^i.$$

Notons, pour tout $i > 0$, par ρ_i la classe de r^i dans $R^i/_{R^{i+1}}$ on a :

$\forall\, i > 0\,,\ \forall\, a \in A \qquad \rho_i\, a = a\, \rho_i$ et $\rho_i\, A = A\, \rho_i = R^i/_{R^{i+1}}$.

Il s'ensuit que pour tout $i > 0$, ρ_i est un élément de $Z_A(R^i/_{R^{i+1}})$ qui engendre $R^i/_{R^{i+1}}$. Ceci démontre que $R^i/_{R^{i+1}}$ est un A-bimodule.

Soit, pour tout $i > 0$, $f_i : A \twoheadrightarrow R^i/_{R^{i+1}}$ l'épimorphisme d'A-bimodule voir (1), défini par : $\forall\, a \in A,\ f_i(a) = \rho_i a = a\rho_i$. On a $f_i(R) = 0$, d'où f_i passe au quotient selon un épimorphisme d'A-bimodule :

$$\bar{f}_i : A/_R \twoheadrightarrow R^i/_{R^{i+1}} \quad \text{qui fait commuter le diagramme :}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f_i"] \arrow[d, two heads] & R^i/_{R^{i+1}} \\ A/_R \arrow[ur, "\bar{f}_i"'] & \end{tikzcd}$$

où $A \twoheadrightarrow A/_R$ désigne l'épimorphisme canonique d'A-bimodule. $A/_R$ étant un anneau simple, il est clair que $\ker \bar{f}_i = \{0\}$ et donc $\bar{f}_i$ définit un isomorphisme d'A-bimodule ; ce qui démontre que $R^i/_{R^{i+1}}$ est un bimodule simple et achève ainsi la preuve du Lemme préliminaire.

Fin de la démonstration du Théorème 1.

En utilisant le lemme préliminaire, on montre, par récurrence, que pour tout entier $i > 0$, $A/_{R^i}$ est un anneau artinien à droite et à gauche, et l'anneau A, identifié à $\varprojlim_{i \geq 0} A/_{R^i}$ est un anneau strictement linéairement compact à droite et à gauche. On en déduit que l'idéal bilatère R est de type fini, comme A - module à droite (et à gauche) voir (13) et le lemme de Nakayama appliqué à : $r\,A + R^2 = A\,r + R^2 = R$ montre que : $r\,A = A\,r = R$ d'où pour tout entier $i > 0$ $r^i A = A\,r^i = R^i$.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de A, distinct des R^i, $i \geq 0$ alors $\mathfrak{J} \subset R$ (car l'anneau $A/_R$ est simple) ; de plus $\mathfrak{J}$ n'est dense dans aucun des R^i, $i > 0$ pour la topologie de Krull induite (voir (9)) ; (En effet si $\mathfrak{J} + R^{i+1} = R^i$ alors le lemme de Nakayama implique $\mathfrak{J} = R^i$) et si $\mathfrak{J} \subset R^i$, alors $\mathfrak{J} \subset R^{i+1}$ $\forall\, i > 0$ ..
(En effet $\dfrac{\mathfrak{J} + R^{i+1}}{R^{i+1}}$ est un sous A-bimodule de $R^i/_{R^{i+1}}$ (voir (1) proposition 2.4) et comme $\mathfrak{J}$ n'est pas dense dans R^i et que $R^i/_{R^{i+1}}$ est un bimodule simple on a : $\mathfrak{J} + R^{i+1} = R^{i+1}$).
En conclusion : $\mathfrak{J} \subset \bigcap_{i \geq 0} R^i = \{0\}$, c'est-à-dire $\mathfrak{J} = \{0\}$.
Nous particularisons maintenant l'étude, au cas où Λ est un anneau local, nous obtenons ;

Théorème 2. Soit Λ un anneau vérifiant les hypothèses ** ; alors les seuls idéaux à droite, ou à gauche, non triviaux sont les $\mathfrak{m}^i$, $i > 0$ et Λ est principal à droite et à gauche.

Preuve. Le lemme préliminaire s'affine ici, en remarquant que $\forall\, i > 0$, l'isomorphisme de Λ-bimodule : $\bar{f}_i : \Lambda/_{\mathfrak{m}} \longleftrightarrow \mathfrak{m}^i/_{\mathfrak{m}^{i+1}}$, où $\Lambda/_{\mathfrak{m}}$ est un corps gauche, permet de montrer que : $\mathfrak{m}^i/_{\mathfrak{m}^{i+1}}$ est un Λ - module simple à droite et un Λ - module simple à gauche.

Si $\mathfrak{U}$ est un idéal à droite (ou à gauche) de Λ distinct des $\mathfrak{m}^i$, $i \geq 0$, alors $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{m}$ et de plus d'après le lemme de Nakayama $\mathfrak{U}$ n'est dense dans aucun des $\mathfrak{m}^i$, $i > 0$;(pour la topologie de Krull induite) et si $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{m}^i$ alors $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{m}^{i+1}$, $\forall\, i > 0$. (En effet $\dfrac{\mathfrak{U} + \mathfrak{m}^{i+1}}{\mathfrak{m}^{i+1}}$ est un sous Λ-module à droite (ou à gauche) du Λ-module simple à droite et à gauche : $\dfrac{\mathfrak{m}^i}{\mathfrak{m}^{i+1}}$).

En conclusion : $\mathfrak{U} \subset \bigcap\limits_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i = \{0\}$, c'est-à-dire $\mathfrak{U} = \{0\}$ ..

3 - Théorème de Représentation.

Théorème 3. Tout anneau A, vérifiant les hypothèses * se représente comme une algèbre de matrices $M_n(\Lambda)$, à n lignes et n colonnes sur un anneau local Λ vérifiant les hypothèses ** . L'entier n et l'anneau Λ étant uniquement déterminés.

Réciproquement, toute algèbre de matrices sur un anneau local Λ vérifiant les hypothèses ** est un anneau vérifiant les hypothèses *.

Preuve : La démonstration du Théorème 3 est exposée dans (11) ; nous le reproduisons ici :

Désignons par $\mathrm{Pro\,Mod}_{\mathrm{l.f.}}(A)$ la catégorie des pro-modules, à droite par exemple, de longueur finie, voir (7) ; A étant un anneau strictement linéairement compact, il s'ensuit que cette catégorie est abélienne localement artinienne locale (car $A/_R$ est simple). Notons U, le A-module à droite, type unique de projectif indécomposable alors l'anneau des A-endomorphismes de U ; $\Lambda = \mathrm{End}_A(U)$ est local, d'idéal maximal : $\mathfrak{m} = \mathrm{Hom}_A(U, UR)$ et est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Si n est l'invariant de Loewy de type U de A, considéré comme A-module à droite, A est isotypique et $A \simeq U^{(n)}$ (somme directe de n copies de U) . Les isomorphismes classiques d'anneaux :

$$A \simeq \mathrm{End}_A(A) \simeq \mathrm{End}_A(U^{(n)}) \simeq (\mathrm{End}_A(U))^{(n^2)} = M_n(\Lambda)$$

identifient A à une algèbre de matrices sur Λ où $R \simeq M_n(\mathfrak{m})$ idéal des matrices à coefficients dans $\mathfrak{m}$. (Voir aussi (5) page 79, proposition 4).

Il s'ensuit aisément que $R^2 \simeq M_n(\mathfrak{m}^2)$ et donc $R/_{R^2} \simeq M_n(\mathfrak{m}/_{\mathfrak{m}^2})$.

Un générateur central ρ du Λ-bimodule $R/_{R^2}$ se représente dans $M_n(\mathfrak{m}/_{\mathfrak{m}^2})$ par une matrice scalaire θ I, où I désigne la matrice identité, ce qui établit que θ est un générateur central de $\mathfrak{m}/_{\mathfrak{m}^2}$ comme Λ-bimodule.

L'unicité de la construction s'établit par un procédé analogue à celui employé dans la démonstration du théorème de Wedderburn pour les anneaux simples artiniens (voir par exemple (2)).

La preuve de la réciproque est laissée aux soins du lecteur.

Propriétés de l'anneau local Λ..

Proposition 4. Soit Λ un anneau local vérifiant les hypothèses ** . Alors, ou bien Λ est un anneau artinien à droite et à gauche, ou bien Λ est un anneau de valuation discrète admettant un corps des fractions à droite et à gauche.

Preuve. La démonstration de la proposition 4 est exposée dans (11) ; nous la reproduisons ici :

Si la filtration décroissante des $\mathfrak{m}^i$, $i > 0$ est stationnaire, l'anneau Λ s'identifie à l'un de ses quotients artiniens à droite et à gauche $\Lambda/_{\mathfrak{m}^i}$ convenable ; sinon le radical de Jacobson est non nilpotent . Soit π un relèvement dans $\mathfrak{m}$ d'un générateur central du Λ-bimodule $\mathfrak{m}/_{\mathfrak{m}^2}$, on a : (voir preuve du théorème 1).

$\pi^i \Lambda = \Lambda \pi^i = \mathfrak{m}^i$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\pi^i \lambda - \lambda \pi^i \in \mathfrak{m}^{i+1}$.

Tout élément $\lambda \neq o$ de Λ s'écrit sous la forme : $\lambda = \pi^i u$ avec $i \in \mathbb{N}$ et u inversible. D'où si $\mu = \pi^j v$ ($j \in \mathbb{N}$, v inversible) $\lambda\mu = \pi^i u \pi^j v = \pi^{i+j} u'v$, avec $u \pi^j = \pi^j u'$ et u' inversible (car $u - u' \in \mathfrak{m}$) donc $\lambda\mu$ est non nul et Λ est intègre.

La fonction d'ordre : $V : \Lambda - \{o\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à tout $\lambda \neq o$ associe le plus grand entier i tel que λ appartienne à $\mathfrak{m}^i$ est alors une valuation discrète dont la topologie associée est celle de Krull. La construction d'un corps des fractions à droite et à gauche utilise la méthode de P. Gabriel dans (3) et (4). Les conditions pour avoir un "bon" calcul des fractions se résument ici à :

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall \tau \in \Lambda - \{o\},\ \exists \mu \in \Lambda,\ \exists \tau \in \Lambda - \{o\} \ / \ \lambda \tau = \tau \mu$$

$$\exists \mu' \in \Lambda,\ \exists \tau' \in \Lambda - \{o\} \ / \ \tau'\lambda = \mu'\tau$$

Λ étant principal à droite et à gauche, ces conditions sont vérifiées. Nous considérons dans ce qui suit uniquement le cas où Λ est un anneau de valuation discrète.

Définition. On appelle uniformisante de la valuation, tout élément $\pi \in \mathfrak{m}$ relèvement d'un élément non nul du centralisateur de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; soit encore : $V(\pi) = 1$ et $\forall \lambda \in \Lambda \quad \pi\lambda - \lambda\pi \in \mathfrak{m}^2$.

Puisque Λ est strictement linéairement compact et que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un Λ-bimodule simple, une uniformisante est un générateur de $\mathfrak{m}$ comme Λ-module (à droite et à gauche) dont la classe est centrale dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

L'intégrité de Λ permet d'associer, à toute uniformisante π de la valuation, une application $s_\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ définie par :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \mu = s_\pi(\lambda) \text{ avec } \pi\lambda = \mu\pi.$$

Proposition 5. Pour toute uniformisante π de la valuation, s_π est un automorphisme de l'anneau Λ, vérifiant :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad s_\pi(\lambda) - \lambda \in \mathfrak{m}.$$

Preuve. Il est bien clair que s_π est un endomorphisme de l'anneau Λ, injectif (car $s_\pi(\lambda) = o \Longrightarrow \pi\lambda = o \Longrightarrow \lambda = o$ par intégrité de Λ) et surjectif (car $\forall \mu \in \Lambda$, $\exists \lambda \in \Lambda / \pi\lambda = \mu\pi$ et π engendre $\mathfrak{m}$ à droite et à gauche). De plus : $\forall \lambda \in \Lambda \quad \pi\lambda - \lambda\pi \in \mathfrak{m}^2$ ce qui s'écrit : $(s_\pi(\lambda) - \lambda)\pi \in \mathfrak{m}^2$ d'où le résultat cherché en simplifiant par π.

Une uniformisante π est centrale si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \pi\lambda = \lambda\pi.$$

Alors l'automorphisme d'anneau associé s_π coïncide avec l'identité. Il est intéressant de savoir si un anneau local Λ peut posséder une uniformisante centrale ; plus précisément .

Proposition 6. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) L'anneau Λ possède une uniformisante centrale.
ii) Pour toute uniformisante π de la valuation, s_π est un automorphisme intérieur de Λ.
iii) Il existe une uniformisante π de la valuation telle que s_π soit un automorphisme intérieur de Λ.

Preuve. Il est trivial que i) $\Longrightarrow$ iii) et ii) $\Longrightarrow$ iii) . Montrons i) $\Longrightarrow$ ii)
Soit π_o une uniformisante centrale : $\forall \lambda \in \Lambda$, $\pi_o \lambda = \lambda \pi_o$.

Si π est une uniformisante quelconque alors il existe u inversible tel que : $\pi = u\,\pi_o$ et donc $u^{-1}\pi = \pi_o$. $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $\pi\,\lambda = u\,\pi_o\lambda = u\,\lambda\,\pi_o = (u\lambda u^{-1})\pi$

On en conclue que : $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $s_\pi(\lambda) = u\lambda u^{-1}$.

Montrons iii) $\Rightarrow$ i) Soit π une uniformisante de la valuation telle que s_π soit un automorphisme intérieur de Λ :

$\exists\, u$ inversible tel que $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $s_\pi(\lambda) = u\,\lambda\,u^{-1}$.

Alors $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $\pi\,\lambda = s_\pi(\lambda)\ \pi = u\,\lambda\,u^{-1}\,\pi$. Posons $\pi_o = u^{-1}\ \pi$ on a :

$\forall\, \lambda \in \Lambda$; $\pi_o\,\lambda = \lambda\,\pi_o$ et π_o est une uniformisante centrale de la valuation.

4. Exemples d'anneaux locaux, non commutatifs vérifiant les hypothèses **

Nous donnons ici, sans démonstration, deux exemples d'anneaux locaux, de valuation discrète complète, non commutatifs ; le premier possède une uniformisante centrale et le second est sans uniformisante centrale. Pour plus de précision sur ces exemples nous renvoyons à (11) et à (12).

Exemple 1. Soit K un corps gauche ; l'anneau des séries formelles à une indéterminée $\Lambda = K\,[[X]]$ est un anneau local séparé et complet pour la topologie de Krull, non commutatif, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est un bimodule au sens de M. ARTIN engendré centralement par l'uniformisante X et le corps résiduel isomorphe à K. $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ est un $K\,[[X]]$ -bimodule isomorphe à K donc est un $K\,[[X]]$ - bimodule simple.

Exemple 2. Soit p un nombre premier, et soit $K = \mathbb{Z}/_{(p)}(y)$ le corps commutatif des fractions rationnelles à une indéterminée y et à coefficients dans $\mathbb{Z}/_{(p)}$ (corps à p -éléments).

Notons par $K\,[[X]]$ le groupe additif abélien des séries formelles à une indéterminée X et à coefficients dans K.

Soit $s : K\,[[X]] \longrightarrow K\,[[X]]$ un endomorphisme de groupe additif abélien défini par :

- $\forall\, \lambda = \sum_{i=o}^{+\infty} a_i X^i \in K\,[[X]]$, $s(\lambda) = \sum_{i=o}^{+\infty} s(a_i)X^i$.
- $s(1) = 1$.
- $s(y) = y + X$.

Définissons un produit sur $K[[X]]$ en posant :

$$\forall \lambda \in K[[X]] \; ; \; X\lambda = s(\lambda)X.$$

Alors on peut montrer que $K[[X]]$ est un anneau local, non commutatif, séparé et complet pour la topologie de Krull, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est engendré par l'uniformisante X (qui n'est pas centrale) et $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ est un $K[[X]]$ - bimodule simple.

De plus l'automorphisme s_X associé à X, qui n'est autre que s, n'est pas un automorphisme intérieur ; et donc il n'existe pas d'uniformisante centrale pour un tel anneau.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>.

(1) M. ARTIN J. of Algebra 11, 1969 p. 532-563.

(2) C.W. CURTIS et I. REINER, Representation theory of finite groups and associative Pure and Applied Mathematics Vol XI.

(3) P. GABRIEL, Des catégories abéliennes (Bull. Soc. Math. Fr. 90. 1962).

(4) P. GABRIEL et M. ZISMAN, Calculus of fractions and homotopy theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete, 35,1967).

(5) J. LAMBEK, Lectures on rings and modules, 1966.

(6) J.P. SERRE, Corps locaux, Hermann, Paris 1962.

(7) R. VIDAL, Comptes rendus, 272, série A, 1971, P. 1293.

(8) R. VIDAL, Comptes rendus, 272, série A, 1971, p. 1638.

(9) R. VIDAL, Comptes rendus, 275, série A, 1972, p. 323.

(10) R. VIDAL, Comptes rendus, 282, série A, 1976, p. 87.

(11) R. VIDAL, Comptes rendus, 282, série A, 1976.

(12) R. VIDAL, Comptes rendus, série A, à paraître.

(13) R. VIDAL, Modules de type quasi-fini sur un anneau non commutatif. (Séminaire P. DUBREIL, Algèbre, N° 8, 1974/1975).

Colloque d'Algèbre Commutative de RENNES.
du 20 au 22 mai 1976.

R. VIDAL.
UNIVERSITE DE CLERMONT.
Département de Mathématiques Pures.
B.P. 45 63170 AUBIERE.