Publications mathématiques et informatiques de Rennes

Markus Brodmann

Une macaulayfication de certains anneaux locaux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 9, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A5_0>

UNE MACAULAYFICATION DE CERTAINS ANNEAUX LOCAUX.

Markus Brodmann

Soit A un anneau semilocal et noethérien de radical de Jocobson J et soit $\hat{A}$ son completé J-adique. A est dit strictement formellement équidimensionnel, s.f.e. en abrévation, si $P \in \mathrm{Ass}(\hat{A})$ implique que $\dim(\hat{A}/P) = \dim(A)$ [5,(7.2)]. Dans la terminologie de Nagata ces anneaux sont dits unmixed [7,pg. 82].

L'exemple standard des anneaux s.f.e. sont les quotients intègres d'un anneau local de Cohen-Macaulay (C.-M.) [6, Th. 2]. En analogie à la situation en géométire algébrique (éclater un quotient intègre d'un anneau local et régulier en un anneau régulier) on est donc interessé à éclater un anneau A s.f.e. en un anneau de C.-M., au moins si A est intègre. Pour faire ceci il suffit évidemment de resoudre le problème suivant:

Soit A intègre s.f.e. et tel que $\mathrm{gr}(J) < \dim(A)$. Alors on doit trouver une extension semilocal B de A, intègre et essentiellement de type fini et telle que pour son radical de Jacobson J' on ait $\mathrm{gr}(J') > \mathrm{gr}(J)$.

On aimerait choisir B aussi petit que possible, par exemple fini sur A. Mais en général ceci n'est pas possible par un exemple du à M. Hochster (non publié, 1974):

Un anneau local, complet normal et de dimension 3 qui ne possède aucun module de C.-M. de type fini.

D'ailleurs cet exemple est minimal au sens qu'on arrive à choisir B fini sur A si $\dim(A) = 2$ (v. Corollaire 5).

Pour B on aimerait quand-même avoir satisfaites quelques propriétés typiques pour les extensions finies:

(I) B domine A.

(II) $\dim(A) = \dim(B)$.

(III) l'espace J-adique A est un sousespace de l'espace J'-adique B.

Pour resoudre (P) il nous faut les notions suivantes:

<u>Défintion 1</u>: Soit M un A-module, $S = \mathrm{reg}_A(M)$ l'ensemble des éléments réguliers de A par rapport à M. Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble multiplicatif d'idéaux de A. Alors, nous introduisons le $\mathfrak{A}$-transformé de M comme étant:

$$T_A(\mathfrak{A}, M) = \bigcup_{I \in \mathfrak{A}} (M : I)_{S^{-1}M}.$$

<u>Définition 2</u>: M étant de type fini posons:

$$S_A(\mathfrak{A}, M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \,/\, \exists\, I \in \mathfrak{A},\ s \in S \ \text{ tq. } I \subseteq P \in \mathrm{Ass}_A(M/sM)\}.$$

Alors on a (cp [1, (2.3), (2.5)]):

<u>Lemme 3</u>: a) $T_A(\mathfrak{A}, T_A(\mathfrak{A}, M)) = T_A(\mathfrak{A}, M)$. Si de plus M est de type fini sur A on a:

b) Si $T_A(\mathfrak{A}, M)$ est de type fini $S_A(\mathfrak{A}, M)$ est fini.

c) $T_A(\mathfrak{A}, M) = M \Longleftrightarrow S_A(\mathfrak{A}, M) = \emptyset$.

<u>Dém</u>: a) est idnuit par le fait que chaque $I \in \mathfrak{A}$ soit de type fini.

b) Il suffit de voir que $S_h = \{P \in S_A(\mathfrak{A}, M)/\mathrm{ht}(P) = h\}$ soit fini pour tout h. $N = T_A(\{ I \in \mathfrak{A}/\mathrm{ht}(I) \geq h \}, M) \subseteq T_A(\mathfrak{A}, M)$ implique l'existence d'un $I \in \mathfrak{A}$ t.q. $\mathrm{ht}(I) \geq h$, $IN \subseteq M$. Pour $P \in S_h$ on trouve de plus $s \in S$ $m \in M$ t.q. $P = (sM:m)_A$, donc $P = (M:\frac{m}{s} A)_A \supseteq (M : N)_A \supseteq I$ démontre la finitude de S_h.

c) " $\Longrightarrow$ ". Dans la démonstration de b) on remplace "fini" par "vide", tout en regardent que $I = A$ si $T_A(\mathfrak{a}, M) = M$. " $\Longleftarrow$ ". Soit $m \in M$, $s \in S$ t.q. $\frac{m}{s} \in T_A(\mathfrak{a}, M) - M$. Alors on a $\frac{m}{s}I \subseteq M$, donc $mI \subseteq sM$ pour un $I \in \mathfrak{a}$. $m \notin sM$ implique alors que $I \subseteq \bigcup\{\mathrm{Ass}_A(M/sM)\}$.

Regardons encore la condition suivante sur A:
(C) $\forall m \in \mathrm{Max}(A)$: caractéristique $(A/m)1_A \in \mathrm{reg}(A) \cup \{o\}$.

Evidemment les anneaux intègres ont la propriété (C) et cette propriété se conserve sous le passage à une algèbre sans torsion.

<u>Lemme 4</u>: Soit A s.f.e. et de propriété (C). Supposons que $ht(I) > 1$ pour tout $I \in \mathfrak{a}$. Alors $T = T_A(\mathfrak{a}, A)$ est une A-extension finie et sans torsion. Par conséquent $S_A(\mathfrak{a}, A)$ est fini et $S_T(\{ IT / I \in \mathfrak{a} \}, T) = \emptyset$.

<u>Dém</u>: La A-platitude de $\hat{A}$ entraine que $T \otimes_A \hat{A} \subseteq T_{\hat{A}}(\{ I\hat{A}/I \in \mathfrak{a}\}, \hat{A})$, et l'on peut donc remplacer A par $\hat{A}$ par fidèle platitude. $\hat{A}$ étant décomposé on peut donc sans autre supposer que A soit local et complet. Mais alors (C) et le théorème de structure de Cohen permettent à écrire A comme extension finie d'un anneau local et régulier R. A étant strictement équidimensionnel on voit de plus par le premier théorème de Cohen-Seidenberg que cette extension est sans torsion. A peut donc être plongé dans un R-module libre F de rang fini. Soit encore $\mathfrak{a}'$ l'ensemble multiplicatif engendré par $\{I \cap R / I \in \mathfrak{a}\}$. Par le premier théorème de Cohen-Seidenberg on a alors que $ht(I') > 1$ pour chaque $I' \in \mathfrak{a}'$. R étant S_2 on a donc que $T_R(\mathfrak{a}', F) = F$, par c) du lemme 3. On conclût alors par $T \subseteq T_R(\mathfrak{a}', A) \subseteq T_R(\mathfrak{a}', F)$ et le lemme 3.

En posant $\mathfrak{A}=\{I/ht(I) > 1\}$ on voit donc que l'anneau A du lemme précédant est presque S_2 au sens que $\{P \in Spec(A)/ht(P) > 1$, prof $(A_p) \leq 1\}$ est fini.
Ce résultat a été trouvé par des méthodes différentes par L.J. Ratliff [8] . De plus on voit que alors T est la plus petite extension sans torsion de A qui est S_2. Dans la terminologie de [5,5.10] $T_A(\mathfrak{A}, A)$ est la $S_A(\mathfrak{A}, A)$-clôture de A et la finitude qu'on vient d'établir est en effet une généralisation de la cohérence de la cohomologie locale de degré comme elle est donnée à [5, 7. 24].

Appliquons le lemme 4 à notre problème (P):

<u>Corollaire 5</u>: Soit A comme au lemme 4 et de dimension > 1. Alors $B = T_A(\{J^n\}, A)$ est une A-extension finie telle que $gr(J') > 1$. En particulier si $gr(J) = 1$ B est une résolution de notre problème (P).

Nous pouvons donc dès maintenant supposer que $gr(J) > 1$. Choisissons donc $x,y \in J$ tels qu'ils forment une suite régulière. Alors pour $m \in Max(A)$ m et $\frac{x}{y}$ engendrent un idéal maximal de $A[\frac{x}{y}]$. En posant $A' = S^{-1}A[\frac{x}{y}]$ avec $S = A[\frac{x}{y}] - \{(m, \frac{x}{y})/m \in Max(A)\}$ on a alors un isomorphisme canonique $A/xA \cong A'/\frac{x}{y}A'$, nous apprenant que $\dim(A') = \dim(A)$ et que A est un sousespace dominé de A'. De plus A' est de nouveau s.f.e. (v.[6, Pr. 7]) et de propriété (C). Mais alors $ht(J) > 2$ implique que $B = T_A(\{J^n\}, A')$ est une extension finie de A' par le lemme 4 qui satisfait donc à (I), (II) et (III). Nous allons donc chercher x et y tels que $gr(J') > 2$, ce qui permettera de résoudre (P) si $gr(J) = 2$.

<u>Lemme 6</u>: Soit A s.f.e. de propriété (C) et tel que $gr(J) > 1$. Soit $z \in reg(A)$. Alors on trouve $x \in J \cap reg_A(A/zA)$ t.q. A/xA est s.f.e. et satisfait à (C).

Dém: Par le lemme 4 on trouve en effet $x \in \mathrm{reg}(A) \cap J$ tel que $x\hat{A}$ n'a aucune composante immergée et tel que $x \in \mathrm{reg}_A\,(A/\mathrm{car}\,(A/m)A)$ $(m \in \mathrm{Max}(A))$ et $x \in \mathrm{reg}(A/zA)$.

Lemme 7: Soient A, x comme au lemme 6, A étant de dimension > 2. Alors:

a) $U = T_A(\{J^n\}, A/xA)$ est une extension finie de A/xA

b) $J^n \cap \mathrm{reg}_A(A/xA) \neq \emptyset, (\forall n \in \mathbb{N})$ et de plus on trouve un $m \in \mathbb{N}$ t.q. $J^m\, U \subseteq A/xA$

c) $y \in J \cap \mathrm{reg}_A(A/xA)$ t.q. $y\, U \subseteq A/xA$ implique l'existence d'un isomorphisme canonique $U \cong B/\frac{x}{y}\,B$.

Dém: a) est une conséquence du lemme 4, b) de a) et de $\mathrm{gr}(J) > 1$. c) L'isomorphisme canonique $A'/\frac{x}{y}\,A' \cong A/xA$ permet de définir un homomorphisme canonique $g: A'[\frac{1}{y}] \longrightarrow (A/xA)[\frac{1}{y}]$. Pour la restriction de g à B on a évidemment $h = g: B \longrightarrow U$. $yU \subseteq A/xA$ implique que $u \in U$ s'écrit sous la forme $h(\frac{a}{y}) = u$, avec $a \in A$. $J^m u \in A/xA$ implique donc que $J^m\, \frac{a}{y} \subseteq A + xA\,[\frac{1}{y}]$, donc que $J^m a \subseteq y\,A + A \cap x\,A\,[\frac{1}{y}] = yA + xA$, donc que $J^m\, \frac{a}{y} \subseteq A + \frac{x}{y}A \subseteq A'$, ce qui entraîne que $\frac{a}{y} \in B$, et g est donc surjectif. Soit d'autre part $t \in \mathrm{Ker}\, g = \frac{x}{y}\, A'[\frac{1}{y}] \cap B$. Alors on écrit $t = \frac{x}{y}\,\frac{a'}{y^n}$ avec un $a' \in A'$ et l'on a que pour un $m \in \mathbb{N}$ $\frac{x}{y}\,\frac{a'}{y^n}\; J^m \subseteq A'$ donc que $\frac{x}{y}\, a' J^m \subseteq y^n A' \cap \frac{x}{y}\, A' = y^n\;\; \frac{x}{y}\, A'$, la dernière égalité étant due au fait que $\frac{x}{y}$, y est une suite régulière de A'. Mais alors $\frac{a'}{y^n}\, J^m \in A'$, donc $\frac{a'}{y^n} \in B$ et l'on voit que $t \in \frac{x}{y}\, B$.

Appliquons ce résultat au cas $\mathrm{gr}(J) = 2$:

Corollaire 8: Soit A s.f.e., de (C), tel que $\mathrm{gr}(J) > 1$ et tel que $\dim(A) > 2$. Soient x et y comme au lemme 7. Alors $\mathrm{gr}(J') > 2$. En particulier en cas $\mathrm{gr}(J) = 2$ B est une résolution de notre problème (P).

<u>Dém</u>: Par le corollaire 5 on a que $gr(J") > 1$, J" étant le radical de Jacobson de U. Mais alors c) du Lemme 7 et le fait que $\frac{x}{y} \in reg(B) \cap$ $\cap J'$ impliquent le résultat.

Par une application répetée des résultats 6 et 7 nous arrivons maintenant à complétement résoudre notre problème (P):

Soit $d = gr(J) \geq 2$ et soit $x_1, \ldots x_{d-1}$, y une suite régulière de J. Alors pour $\forall$ $m \in Max(A)$ $(m, \frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y})$ est un idéal maximal de $A[\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y}]$. Soit $S = A[\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y}] - \bigcup_{m \in Max(A)} (m, \frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y})$

$A' = S^{-1}A[\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y}]$. Alors A' est s.f.e. et satisfiat à (I), (II) et (III) [2,(3.10)] . $B = T_A(\{J^n\}, A')$ est donc une extension finie de A' par 4. Et l'on voit finalement que B est une extension essentiellement de type finie sur A qui satisfait à (I), (II) et (III). Le résultat suivant [2, (5.6), (5.7)] qui se démontre facilement par induction à partir de 6 et 7 nous démontre qu'on peut choisir $x_1, \ldots x_{d-1}$, y de sorte que $gr(J') > d =$ $= gr(J)$:

<u>Proposition 9</u>: Soit A s.f.e. et de propriété (C). Soit $d = gr(J) <$ $< dim(A)$, $z \in J \cap reg(A)$.

a) On trouve $x_1, \ldots, x_{d-1} \in J$ t.q. $x_1, \ldots, x_{d-1}, z$ soit une suite régulière telle que $A/\sum_{i=1}^{k} x_i A$ est s.f.e. et de propriété (C) pour tout $k < d$.

b) $x_1, \ldots x_{d-1}$ étant comme à a) on a $J^n \cap reg_A(A/\sum_{i=1}^{d-1} x_i A) \neq \emptyset$ pour chque $n \in N$ et l'on trouve un $m \in N$ t.q. $y \in J^m \cap$ $\cap reg_A(A/\sum_{i=1}^{d-1} x_i A)$ implique que $gr(J') > d$, ou J' est le radical de Jacobson de l'anneau B défini ci-dessus.

Nous avons donc trouvé une première solution du problème (P).

Notons que l'on peut trouver une solution de (P) qui marche même si A ne soit pas s.f.e. Pour en donner une idée démontrons:

<u>Lemme 10</u>: Soit A noethérien et soit $x \in A$ un diviseur de 0. Soit $P \in \mathrm{Ass}(A)$ tel que $x \in P$ et minimal parmi les premiers de Ass(A) avec cette propriété. Alors $P \in \mathrm{Ass}_A(A/xA)$.

<u>Dém</u>: En localisant en P on peut supposer (A,P) local. Si P est minimal en A le résultat est clair. Soit donc P non minimal. Soit $Q_1 \cap \ldots \cap Q_s \cap Q$ une décomposition primaire irretundante de (0) dans A, Q étant P-primaire, Q_i étant P_i-primaire ($i = 1,\ldots,s$). Alors nous avons $(Q_1 \cap \ldots \cap Q_s : x)_A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ car $x \notin P_i$ ($i = 1,\ldots,s$). Mais ceci entraine que $Q_1 \cap \ldots \cap Q_s \nsubseteq x A$ parce-que (A, P) est local. Mais alors $(Q_1 \cap \ldots \cap Q_s) P^n = (0) \subseteq xA$ pour n suffisamment grand implique que $P \in \mathrm{Ass}(A/xA)$.

<u>Corollaire 11</u>: Soit A noethérien et semilocal, $x_1,\ldots x_d, y \in J$ t.q. $y \in \mathrm{reg}_A(A/\sum_{i=1}^{d} x_i A)$ et tels que les images des x_i en A_y forment une suite régulière. Alors la suite $x_1,\ldots,x_d,y$ est une suite régulière de A.

<u>Dém</u>: Par induction par rapport à d on se restraint aisément au cas d = 1. Si $x = x_1$ serait un diviseur de 0 en A un trouverait un premier $P \in \mathrm{Ass}(A)$ t.q. $P \in \mathrm{Ass}_A(A/xA)$. x ayant son image en reg (A_y) on devrait alors avoir $y \in P$, et donc $y \notin \mathrm{reg}_A(A/xA)$.

Soit $d = \mathrm{gr}(J)$ et soit $x_1,\ldots,x_d \in J$ une suite régulière. Supposons que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) > d$ pour chaque $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)A$. Soient $P_1,\ldots,P_s$ les diviseurs premier hors Max(A) de $\sum_{i=1}^{d} x_i A$. Alors on trouve $y \in \mathfrak{J} - \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ t.q. $I = (\sum_{i=1}^{d} x_i A:y)_A = (\sum_{i=1}^{d} x_i A:y^n)_A$ ait comme diviseurs premiers exactement $P_1,\ldots,P_s$. En particulier on en déduit un isomorphisme canonique $A/I \overset{\sim}{=} A[\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y}] / / (\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y})$. On voit donc d'abord que $(\mathfrak{m}, \frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y})$ est un idéal maximal de $A[\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y}]$ pour $\mathfrak{m} \in$ Max(A). Soit S le complément de la réunion de ces idéaux maximaux, et posons $B = S^{-1}A[\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y}]$. Alors l'isomorphisme ci-dessus implique un isomorphisme canonique $A/I \overset{\sim}{=} B/(\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y})$ qui démontre que $y \in \mathrm{reg}(B/(\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y}))$. $(x_1,\ldots,x_d)$ étant régulier en A on déduit que $\frac{x_1}{y},\ldots,\frac{x_d}{y}$ est une suite régulière de $B[\frac{1}{y}] = S^{-1}A[\frac{1}{y}]$, et par le corollaire 11 $x_1,\ldots,x_d,y$ est une suite régulière de B dans J', son radical de Jacobson. En somme nous avons donc:

<u>Proposition 12</u>: Soit A semilocal, $gr(J) = d < \min\{ht(\mathfrak{m}) / \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)\}$. Soit $x_1,\ldots,x_d \in J$ une suite régulière, $P_1,\ldots,P_s$ les diviseurs premiers de $\sum_{i=1}^{d} x_i A$ hors de Max(A). Alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ t.q. pour chaque $y \in J^n - \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ on a $gr(J') > d$, J' étant défini comme ci-dessus.

Comparons maintenant les deux solutions ! On voit alors que la solution donnée par 9 est vraiment "plus petite" que celle donnée par 12: En fait, la "fibre" B/JB est de dimension d-1 si B est construit d'après 9. Pour calculer la dimension de B/JB au deuxième cas remarquons que $x_1,\ldots,x_d,y$ est partie d'un système de paramètres de J et que l'on trouve donc $z_1,\ldots,z_s \in J$ tels que $x_1,\ldots,x_d,y,z_1,\ldots,z_s$ est un système de paramètres de J. Alors $ht(J) = d + s + 1$ et l'on trouve un $n \in \mathbb{N}$ t.q. $J^n \subseteq (x_1,\ldots,x_d,y,z_1,\ldots,z_s)$, en supposant que $ht(J) = \dim(A)$.

Mais $x_1,\ldots,x_d,y \in y\,B$ entraine donc que $J^n B \subseteq yB + \sum_{i=1}^{s} z_i\, B$,
donc $ht(JB) \leqslant 1 + s = ht(J) - d$ ce qui donne $\dim(B/JB) = d$ si A est s.f.e.

Remarquons que les "macaulayfications" de A peuvent servir à étudier $Mac(A) = \{P \in Spec(A)/A_P$ de C.-M. En effet si C est un anneau de C.M. qui s'écrit comme localisé de la A-algèbre $A[\frac{z_1}{z},\ldots,\frac{z_d}{z}] \subseteq A_z$ on a que l'image Y de Spec(C) en Spec(A) est contenue dans $Mac(A) \cup Spec(A_z)$. Alors, en construisant C avec la méthode donnée par 9, Y devient essentiellement plus grand que si C est construit d'après 12.

Notre construction pourrait donc être une approche à la:

<u>Conjecture 13</u>: Soit A intègre et s.f.e.. Alors Mac(A) contient un ouvert non vide.

On connaît déjà des résultats sur Mac(A):

(i) Sans que A soit s.f.e. cet ensemble est un ouvert de la V.-S. topologie de Spec(A)([4], Les V.-S.-ouverts sont les ensembles $U \subseteq Spec(A)$ avec $P \in U \Longrightarrow |\{Q \in Spec(A) - U \,/\, ht(Q/P) = 1\}| < \infty$)

(ii) Si A est anneau résiduel d'un anneau de C.-M. Mac(A) est ouvert pour la topologie de Zariski.[5,6.11.8]

(iii) A étant local mais pas nécessairement s.f.e. Mac(A) ne doit pas être ouvert. En effet, en [3] un exemple d'un tel anneau A est donné.

(iv) Si $\dim(A) \leqslant 3$ on a le réponse affirmative à 13, car alors $T = T_A(\{I/ht(I)>1\},A)$ est une extension fine de A qui soit S_2. (voir suite de lemme 4)

Remarquons encore que le comportement des extensions construites d'après 9 est favorable du point de vue des mulitplicités:

Proposition 14: Dans les notations et sous les hypothèses de 9, si $|A/m| = \infty$ pour $\forall m \in \mathrm{Max}(A)$ on arrive à choisir $x_1, \ldots, x_{d-1} \in J$ comme dans 9a) et encore tel que x_i soit superficiel par rapport à $J/\sum_{j<i} x_j A$, [7,pg.72]. Alors on a pour les multiliplicités l'inégalité suivante:

$$e_A(J) \geq e_B(J').$$

Dém: La choix énoncée des x_i se fait à l'aide de [7.(22.3)] et le lemme 6. Choisissons y comme dans 9,b) et posons $A' = S^{-1}A[\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y}]$, S étant le complément de la réunion des ideaux maximaux de la forme $(m, \frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{y})$ avec $m \in \mathrm{Max}(A)$. Soit J" le radical de Jacobson de A'. Alors par notre choix des x_i nous avons

$$e_A(J) = e_{(A/\sum_{i=1}^{d-1} x_i A)}(J/\sum_{i=1}^{d-1} x_i A),$$ [7,(24.2)], et par l'isomorphisme canonique $A/\sum_{i=1}^{d-1} x_i A \cong A'/\sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i}{y} A'$ on voit que $e_A(J) \geq e_{A'}(J'')$. B étant fini sur A on a alors $e_{A'}(J'') \geq e_B(J''B) \geq e_B(J')$.

Nos résultats restent aussi vraies sous la généralisation suivante: Pour A semilocal et noethérien posons:

$$\hat{\delta}(A) = \min\{\dim(\hat{A}/P) \mid P \in \mathrm{Ass}(\hat{A})\},$$

(v.[1]). Alors A est s.f.e.ssi $\hat{\delta}(A) = \dim(A)$. La proposition 9 reste alors vraie si $\hat{\delta}(A)$ remplace dim(A): Les résultats auxilières 4 et 6 restent valables sous cette généralisation [1,(4.7)]. De plus, par [1,(6.2)] on a que $\hat{\delta}(A') \geq \hat{\delta}(A)$, A' étant défini comme ci-dessus, ce qui fait marcher tous ce que nous avons traité ici au cas particulier $\hat{\delta}(A) = \dim(A)$. Cette généralisation permet de formuler nos résultats pour des anneaux locaux noethériens

quelconques et de pouvoir quitter la classe des anneaux s.f.e.. Evidemment en général, par la construction donnée par 9, on ne finit pas par un eclatement B qui soit de C.- M., mais on a seulement $gr(J') = \hat{\delta}(A)$, ce qui est le maximum qu'on puisse expecter aussi long qu'on exige (I), (II) et (III).
Ceci se voit en effet parce que on a évidemment $gr(J') \leq \hat{\delta}(B)$ et par le

Lemme 15: Soit B une extension semilocal essentiellement de type fini sur A dans l'anneau total de fractions Q de A. Supposons (I) et (III) satisfaitS. Alors $\hat{\delta}(A) \geq \hat{\delta}(B)$.

Dém: Soit $P \in Ass(\hat{A})$; $\hat{A} \subseteq \hat{B}$ implique qu'il existe un $P' \subseteq Ass(\hat{B})$ tel que $P' \supseteq P$. Il suffit donc de voir que $\dim(\hat{A}/P' \cap \hat{A}) \geq \dim(\hat{B}/P') =$ $= r$. B s'cérivant comme sousanneau d'un anneau de la forme $S^{-1}A[\frac{1}{y}]$ avec $y \in J \cap reg(A) \subseteq J' \cap reg(\hat{B})$ ou trouve $b_1, \ldots, b_{r-1} \in$ $\in B \cap A\ [\frac{1}{y}]$ tel que $b_1, \ldots, b_{r-1}$, $y = b_r$ forme un système de paramètres de $\hat{B} / P'$. Ce système donne lieu à une chaîne de premiers $P'_o = P' \subset \ldots \subset P'_i \subset \ldots \subset P'_r \in Max(\hat{B})$ t.q. $b_1, \ldots, b_i \in$ $\in P'_i \not\ni b_{i+1}, \ldots, b_r$'. D'autre part on trouve un $n \in N$ t.q. $y^n b_i \in \hat{A}$ $(i = 1, \ldots, r-1)$, ce qui démontre que la chaîne $P' \cap \hat{A} = P'_o \cap \hat{A} \subseteq P'_1 \cap \hat{A} \subset \ldots \subset P'_r \cap \hat{A}$ est strictement croissante.

BIBLIOGRAPHIE

1) BRODMANN, M., Uber die minimale Dimension der assosierten Primideale der Kompletion eines lokalen Integritätsbereiches, Comment. Math. Helvetici 50, 1975, 219-232.

2) BRODMANN, M. A Macaulayfication of unmixed domains, à paraître au J. of Algebra

3) FERRAND, M., RAYNAUD, M., Fibres formelles d'un anneau local Noethérien Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3, 1970, 295-312.

4) HOCHSTER, M., RATLIFF, L.J.jr Five theorems on Macaulay rings, Pac.J. Math. 44, 1973, 147-172.

5) GROTHENDIECK, A. EGA IV (Seconde partie), Inst. Hautes Et. Sci. Paris, 1964.

6) NAGATA, M., On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. J. 10, 1956, 51-64.

7) NAGATA, M., Local rings, Interscience Publishers, 1962.

8) RATLIFF L.J.jr. Three theorems on embedded prime divisors of principal ideals, Pacific J. of Math. 49, 1973, 199-210.