J. Marot

Une propriété des anneaux universellement japonais

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A4_0>

UNE PROPRIETE DES ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS

par

J. MAROT

Dans E.G.A., IV, n° (7.4.8) [1], A. Grothendieck pose les questions suivantes :

Question 1.

Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Si A/$\mathfrak{J}$ est un P-anneau, en est-il de même de A ?

Question 2.

Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de A, distinct de A. Si A est un P-anneau, en est-il de même du séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique ?

Bien entendu, une réponse positive à la question 1 implique une réponse positive à la question 2. Dans le cas où A est semi local et où P est la propriété des fibres formelles d'être géométriquement réduites, d'après le théorème de Zariski-Nagata (E.G.A., IV, n° (7.6.4) [1]), la question 1 se ramène à la suivante :

Question 3.

Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Si l'anneau A/$\mathfrak{J}$ est universellement japonais, en est-il de même de A ?

Enfin, si A est semi local et universellement catenaire et P la propriété des fibres formelles d'être géométriquement régulières, la question 2 se ramène à la suivante :

Question 4.

Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de A, distinct de A.

Si l'anneau A est excellent, en est-il de même du séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique ?

Nous allons faire le point des résultats sur ces questions, puis donner un exemple, dû à C. Rotthaus [11], d'anneau local régulier de dimension 3 universellement japonais, et dont les fibres formelles ne sont pas toutes géométriquement normales. Le détail des démonstrations se trouve dans les articles cités en bibliographie.

1. P EST LA PROPRIETE "GEOMETRIQUEMENT REDUITE"

La question 3 admet une réponse positive. Plus précisément, nous avons le

Théorème (1.1) [8] et [9]

Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{I}$ un idéal de définition de A. Alors, si l'anneau $A/\mathfrak{I}$ est universellement japonais, l'anneau A est aussi universellement japonais.

Ce théorème est à rapprocher du lemme classique de Tate (E.G.A., 0_{IV}, n° (23.1.3) [1]), dont il peut être considéré comme une forme généralisation. Sa démonstration utilise de manière essentielle le théorème de Chevalley (E.G.A., 0_I n° (7.2.7) [2]) et le théorème suivant de Nishimura.

Théorème (1.2) [7]

Soit A un anneau de Krull tel que, pour tout idéal premier de hauteur 1 de A, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ soit noethérien. Alors l'anneau A est noethérien.

Dans les trois lemmes qui suivent, A est un anneau noethérien intègre de corps des fractions K, K' une extension finie de K, et A' la fermeture intégrale de A dans K'.

<u>Lemme (1.3)</u>

Soient $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A \in \operatorname{Spec} A$. Si l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, alors le $A/\mathfrak{p}$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est de type fini.

C'est immédiat.

<u>Lemme (1.4)</u>

Si, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(K/A)$, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, alors l'anneau A' est noethérien.

On utilise le fait que l'anneau A' est de Krull et on applique le théorème de Nishimura.

<u>Lemme (1.5)</u>

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A, distinct de A, tel que :

i) L'anneau A est complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique.

ii) L'anneau $A/\mathfrak{J}$ est universellement japonais.

iii) L'anneau A' est noethérien.

Alors, le A-module A' est de type fini.

La démonstration s'apparente à celle du lemme de Tate.
Désignons par r la racine de l'idéal $\mathfrak{J}A'$ de A'. Les hypothèses ii), iii) et le lemme (1.3) permettent de montrer que le A-module $\frac{A'}{r}$ est de type fini. On en déduit, d'après iii), que le A-module $\frac{r^n}{r^{n+1}}$ est de type fini, pour tout entier $n \geq 1$. La suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow \frac{r^n}{r^{n+1}} \longrightarrow \frac{A'}{r^{n+1}} \longrightarrow \frac{A'}{r^n} \longrightarrow 0$$

montre alors par récurrence que $\frac{A'}{r^n}$ est un A-module de type fini, pour tout entier $n \geq 1$: on en déduit que le A-module $\frac{A'}{\mathfrak{J}A'}$ est de type fini, et on conclut par le théorème de Chevalley.

Par un raisonnement de récurrence noethérienne, la démonstration du théorème (1.1) se ramène de suite à celle du lemme suivant.

<u>Lemme (1.6)</u>

Soient A un anneau noethérien intègre, $\mathfrak{J}$ un idéal de A distinct de A, tels que :

i) L'anneau A est complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique.

ii) L'anneau A/$\mathfrak{J}$ est universellement japonais.

iii) Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau A/$\mathfrak{J}$ est japonais.

Alors l'anneau A est japonais.

Ceci découle immédiatement des lemmes (1.4) et (1.5).

Comme conséquences du théorème (1.1), signalons entre autres les résultats suivants :

<u>Proposition (1.7)</u>

Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal de A, B le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Alors, si l'anneau A/$\mathfrak{J}$ est universellement japonais, il en est de même de B.

<u>Proposition (1.8)</u>

Soient A un anneau noethérien semi local, $\mathfrak{J}$ un idéal de A, B le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Alors, si les fibres formelles de A sont géométriquement réduites, il en est de même de celles de B.

<u>Proposition (1.9)</u>

Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Alors, si l'anneau A/$\mathfrak{J}$ est universellement japonais, il en est de même de tout anneau de séries formelles restreintes à un nombre fini d'indéterminées $A\{T_1,\dots,T_n\}$.

Proposition (1.10)

Soit A un anneau noethérien universellement japonais. Alors, tout anneau de séries formelles à un nombre fini d'indéterminées $A[[T_1,\dots T_n]]$ est aussi universellement japonais.

2. P EST LA PROPRIETE "GEOMETRIQUEMENT NORMALE OU REGULIERE"

Dans le cas où P est la propriété des fibres formelles d'être géométriquement régulières, signalons les deux résultats suivants de Seydi et Valabrega, qui répondent partiellement à la question 1 et à la question 4.

Théorème (2.1) [12]

Soient A un anneau local noethérien (contenant un corps) de caractéristique non nulle P, de corps résiduel k tel que $(k : k^p) < \infty$: et un idéal de A. On suppose que

i) A est séparé complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique.

ii) Les fibres formelles de $A/\mathfrak{J}$ sont géométriquement régulières.

Alors les fibres formelles de A sont géométriquement régulières.

Ce théorème découle de suite du théorème suivant de Seydi, soit par un calcul direct, soit en utilisant le théorème (1.2).

Théorème (2.2) [12]

Soit A un anneau local noethérien intègre de corps résiduel k : on suppose que k est de caractéristique non nulle P et que $(k : k^p) < \infty$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) Le A^p-module A est de type fini.

2) L'anneau A est universellement japonais.

3) Les fibres formelles de A sont géométriquement réduites.

4) Les fibres formelles de A sont géométriquement régulières.

<u>Théorème (2.3)</u> [13]

Soient A une algèbre de type fini sur un corps (quelconque) k, et $\mathfrak{J}$ un idéal de A. Alors le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique est excellent.

On se ramène à montrer que l'anneau

$$A = k\,[X_1,\ldots,X_n]\,[[Y_1,\ldots,Y_m]]$$

est excellent ; pour cela, on utilise essentiellement le théorème (1.2) sur les anneaux universellement japonais et le critère Jacobien de Nagata. Signalons que le théorème (2.3) a été auparavant démontré dans des cas particuliers par Seydi, Matsumura[4], et Nomura[5].

Le théorème (2.2) de Seydi suggère la question suivante : "soit A un anneau local noethérien universellement japonais. Ses fibres formelles sont-elles géométriquement régulières ?" Une réponse positive résoudrait une bonne partie de nos problèmes (!). En fait, il n'en est rien. C'est le propos du paragraphe qui suit.

3. ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS NON EXCELLENTS

Les résultats de ce paragraphe sont de F. Rotthans[11].

<u>Théorème (3.1)</u> [11]

Soit K un corps de caractéristique nulle. Il existe une K-algèbre R telle que :

i) R soit un anneau local régulier de dimension 3.

ii) R soit universellement japonais.

iii) R ne soit pas excellent.

Plus précisément, il existe un idéal premier principal r de R tel que l'anneau R/r (de dimension 2) soit normal, et que son complété (qui est réduit) ne soit pas normal. Il résulte d'alors d'E.G.A. IV, n° (7.6.1) [1] que la fibre formelle de R en r n'est pas géométriquement normale.

(3.1.1) Construction de R

Voici un aperçu de la construction de R, inspirée des exemples de Nagata [6]. Soient X,Y,Z trois indéterminées. Nous construisons R et un anneau local excellent A de dimension 3 (anneau intermédiaire essentiel pour le calcul) de façon que les injections canoniques :

$$K[X,Y,Z]_{(X,Y,Z)} \longrightarrow R \longrightarrow A \longrightarrow K[[X,Y,Z]] = \hat{R} = \hat{A}$$

soient des morphismes locaux d'anneaux locaux.

Soient F, G deux séries formelles en X, à coefficients dans K, algébriquement indépendantes sur K(X) (il en existe !) telles que,

$$F = \sum_{p=1}^{\infty} a_p X^p \quad , \quad G = \sum_{p=1}^{\infty} b_p X^p .$$

On pose

$$\begin{cases} F_o = 0 \ ; \text{ pour } n \geq 1, \quad F_n = \sum_{1}^{n} a_p X^p \ ; \text{ pour } n \geq 0, \quad f_n = \dfrac{F-F_n}{X^n} . \\ G_o = 0 \ ; \text{ pour } n \geq 1, \quad G_n = \sum_{1}^{n} b_p X^p \ ; \text{ pour } n \geq 0, \quad g_n = \dfrac{G-G_n}{X^n} . \end{cases}$$

L'anneau $A_1 = (K[X,f_n,g_m]_{n,m \in \mathbb{N}})_{(X)}$ est un anneau de valuation discrète, donc excellent (caractéristique zéro), de complété $K[[X]]$. L'anneau $A = A_1[Y,Z]_{(Y,Z)} = (K[X,Y,Z,f_n,g_m]_{n,m \in \mathbb{N}})_{(X,Y,Z)}$ est donc un anneau local régulier excellent de dimension 3 de complété $\hat{A} = K[[X,Y,Z]]$.

On pose maintenant

$$U = Y+F, \quad V = Z+G \in K[[X,Y,Z]],$$

$$W = W_o = UV \quad ; \quad \text{pour } n \geq 1, \quad W_n = \frac{UV-(Y+F_n)(Z+G_n)}{X^n} .$$

Un calcul simple montre que $W_n \in A$ pour tout $n \geq 0$. On définit alors R par $R = (K[X,Y,Z,W_n]_{n \in \mathbb{N}})_{(X,Y,Z)}$. Les injections canoniques

$$K[X,Y,Z]_{(X,Y,Z)} \longrightarrow R \longrightarrow A \longrightarrow \hat{A} = K[[X,Y,Z]]$$

sont des morphismes locaux d'anneaux locaux.

Les résultats suivants sont immédiats :

1) $\frac{R}{(X)} \xrightarrow{\sim} \frac{A}{(X)} \xrightarrow{\sim} K[Y,Z]_{(Y,Z)}$.

2) Soit S la partie multiplicative $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de R. L'anneau $S^{-1}A$ est un anneau de fractions de $K[X,Y,Z,U,V]$; l'anneau $S^{-1}R$ est un anneau de fractions de $K[X,Y,Z,UV]$; et le morphisme canonique $S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}A$ provient du morphisme injectif canonique $K[X,Y,Z,UV] \longrightarrow K[X,Y,Z,U,V]$.

(3.1.2) Démonstration de i)

Comme l'idéal maximal de R est engendré par X,Y,Z, il suffit de montrer que R est noethérien ; il en résultera que $\hat{R} = K[[X,Y,Z]]$, etc... On utilise le théorème de Cohen, soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Si $x \in \mathfrak{p}$, c'est réglé car $\frac{R}{(X)}$ est noethérien. Si $x \notin \mathfrak{p}$, il existe un idéal $\mathfrak{q}$ de R de type fini tel que $\mathfrak{p} S^{-1}R = \mathfrak{q} S^{-1}R$ et $\mathfrak{p} A = \mathfrak{q} A$, puisque $S^{-1}R$ et A sont noethériens. Pour montrer que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, on raisonne par limite inductive :

$$A = \varinjlim_n A_n \quad , \qquad A_n = K[X,Y,Z,f_n,g_n]_{L_n} \quad ,$$

$$R = \varinjlim_n R_n \quad , \qquad R_n = K[X,Y,Z,w_n]_{M_n} \quad ,$$

L_n est l'idéal maximal de $K[X,Y,Z,f_n,g_n]$ engendré par X,Y,Z,f_n,g_n ; M_n est l'idéal maximal de $K[X,Y,Z,w_n]$ engendré par X,Y,Z,w_n. Ce calcul, très long et assez ardu, utilise de manière essentielle que F et G sont algébriquement indépendantes sur K(X).

Enfin r = UVR est un idéal premier de R.

(3.1.3) Démonstration de ii)

Il faut montrer que, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, l'anneau $\frac{\hat{R}}{\mathfrak{p}\hat{R}}$ est réduit. Si $X \in \mathfrak{p}$, c'est réglé car $\frac{R}{(X)}$ est excellent. Si $x \notin \mathfrak{p}$, on se ramène à montrer que $\frac{A}{\mathfrak{p}A}$ est réduit car A est excellent et $\frac{\hat{R}}{\mathfrak{p}\hat{R}} = \frac{\hat{A}}{\mathfrak{p}\hat{A}}$. Ce calcul est assez facile.

(3.1.4) Démonstration de iii)

Il reste à montrer que $\frac{R}{r}$ est normal ($\frac{\hat{R}}{r\hat{R}}$ n'est pas intègre !). On introduit à cet effet les idéaux $\mathfrak{p} = U\hat{A} + V\hat{A}$, $\mathfrak{q} = UA + VA$; ces idéaux premiers, de plus $\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{q} \cap R = r$. Les morphismes canonique $\frac{R}{r} \longrightarrow \frac{A}{UA}$ et $\frac{R}{r} \longrightarrow \frac{A}{VA}$ sont alors injectifs. On conclut en utilisant ces morphismes et le fait que $\frac{A}{UA}$ et $\frac{A}{VA}$ sont normaux (réguliers !).

Remarque (3.1.5)

1) C. Rotthaus donne également un exemple de K-algèbre vérifiant i), ii), iii) en caractéristique non nulle p ; à partir de $K = F_p(X_n, Y_m)_{n,m \in \mathbb{N}}$, où F_p est le corps premier de caractéristique p, $(X_n, Y_m)_{n,m \in \mathbb{N}}$ une famille d'indéterminées deux à deux distinctes : on a $(K:K^p) = \infty$, évidemment (voir le théorème (2.2)).

2) L'exemple donné par C. Rotthaus est celui d'un anneau local universellement japonais, universellement catenaire non excellent. Pour des exemples (dans le cas global) d'anneaux universellement japonais, universellement caténaires non excellents, voir [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK E.G.A., IV, N° 20-24, P.U.F.

[2] A. GROTHENDIECK E.G.A. I, Springer Verlag.

[3] H. MATSUMURA Commutative Algebra, Benjamin, 1970.

[4] H. MATSUMURA Formal power series rings over polynomial rings I, Kinokuniya, Tokyo 1973, 511-520.

[5] M. NOMURA Formal power series rings over polynomial rings II, Kinokuniya, Tokyo 1973, 521-528.

[6] M. NAGATA Local rings, Interscience publishers.

[7] J. NISHIMURA Note on Krull domains, Journal of Mathematics of Kyoto University, Vol. 15, n° 2, 1975.

[8] J. MAROT Sur les anneaux universellement japonais Bull. S.M.F. 103, 1975, 103-111.

[9] J. MAROT Sur les anneaux universellement japonais Seminaire Dubreil, 1974/75, N° 24.

[10] J. MAROT Anneaux universellement japonais et anneaux excellents (à paraître).

[11] C. ROTTHAUS Universell japanische und nichtausgezeichnete ringe, Université de Munster (R.F.A.).

[12] H. SEYDI Sur la théorie des anneaux excellents en caractéristique p, Bull. Sc. Math., 2e série, 96, 1972, 193-198.

[13] P. VALABREGA On the excellent property for power series rings over polynomial rings, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torins, Vol. 32, (1973-74).

ECHU EO.