D. SCHAUB

Multiplicité et dépendance intégrale sur un idéal

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 2, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A1_0>

MULTIPLICITE ET DEPENDANCE INTEGRALE SUR UN IDEAL

par

D. SCHAUB

Introduction : Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux notions de dépendance intégrale sur un idéal et de multiplicité d'un idéal de définition dans un anneau local. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 1 : Si A est un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais, et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

D. REES a donné ([1]) une démonstration de ce théorème pour un anneau A de complété équidimensionnel. Pour notre part, compte tenu de l'extrême simplicité du résultat en dimension 1, nous avons naturellement cherché à fournir une démonstration nouvelle de ce théorème par récurrence sur la dimension de A en utilisant le gradué associé à $\mathfrak{a}$. Nous démontrons également l'équivalence de ce théorème et du résultat suivant :

Théorème 2 : Si A est un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A et X un élément de $\mathfrak{a}$ tel que sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est un paramètre, alors le noyau de la surjection canonique :

$$gr_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{X} \longrightarrow gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$$

est nilpotent.

Dans une troisième partie, nous démontrons, comme application du théorème 2, un théorème relatif à la connexité du gradué associé à un idéal de définition d'un anneau local vérifiant la condition (S_r) de Serre.

A) Généralités. A anneau local noethérien.

1. Définition 1 : On dira qu'un élément x de A est entier sur un idéal $\mathfrak{a}$ de A s'il existe un entier n et des éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ avec $\alpha_i \in \mathfrak{a}^i$ tels que :

$$X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Définition 2 : On dira qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est entier sur un idéal $\mathfrak{b}$ si $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ et si tout élément de $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

Donnons immédiatement quelques caractéristiques de cette notion :

Proposition 1 : Etant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

(ii) Il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$.

(iii) $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$ pour tout $n > 0$.

(iv) L'anneau gradué $\sum \mathfrak{a}^n$ est entier sur l'anneau $\sum \mathfrak{b}^n$.

(v) Il existe un entier positif k tel que $\mathfrak{a}^{k+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^k$.

(vi) Il existe un entier positif k tel que pour tout $n \geq k$
$\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}^{n-k}\, \mathfrak{a}^k$.

Définition 3 : Nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est intégralement clos si tout élément entier sur $\mathfrak{a}$ est dans $\mathfrak{a}$. Nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{b}$ est basique ([6]) s'il n'est entier sur aucun idéal strictement contenu dans $\mathfrak{b}$.

Remarque : L'ensemble des éléments entiers sur un idéal est un idéal intégralement clos.

Pour la suite de ce travail, nous serons amenés à traduire la notion "d'entier" en terme de gradué associé à un idéal :

Définition 4 : Etant donné un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau A, nous noterons $gr_{\mathfrak{a}}(A)$

l'ensemble gradué $\sum_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ muni de sa structure naturelle d'anneau gradué. Nous appellerons <u>forme dominante</u> d'un élément X de A (notée : $\overline{X}$) l'image canonique de X dans $\mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}$ où k est l'entier tel que $X \in \mathfrak{a}^k$ et $x \notin \mathfrak{a}^{k+1}$. Dans ce cas, $\overline{X}$ est un élément homogène de degré k de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.

<u>Remarque</u> : Si X = 0, nous poserons $\overline{X} = 0$, alors si X est un élément de A et $\overline{X}$ sa forme dominante, $\overline{X} = 0$ si et seulement si X = 0.

<u>Définition 5</u> : Si R est un anneau gradué $R = \sum_{n\geq} R_n$, nous dirons qu'un idéal gradué est <u>irrelevant</u> s'il contient une puissance de l'idéal gradué $\sum_{n>0} R_n$ ou encore s'il contient $\sum_{n\geq k} R_n$ pour un certain entier positif k.

L'un des deux outils essentiels qui vont permettre une nouvelle démonstration du théorème de REES est le résultat bien connu suivant :

<u>Proposition 2</u> : A étant un anneau local et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2$ engendre un idéal irrelevant de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.

<u>Démonstration</u> :

1) <u>Condition nécessaire</u> : Il suffit de montrer que $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $A/\mathfrak{a}\ [\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$ ([2], page 198), ou encore que tout élément homogène de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $A/\mathfrak{a}\ [\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$.

Or soit $\overline{Z} \in \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ un tel élément. Alors il existe Z dans $\mathfrak{a}^n$ tel que sa forme dominante soit $\overline{Z}$. Or, d'après la proposition 1, si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$, d'où Z est entier sur $\mathfrak{b}^n$. Autrement dit, Z satisfait à une équation de dépendance intégrale sur $\mathfrak{b}^n$ de degré q. Il est alors facile de voir que cette équation écrite dans $\mathfrak{a}^{nq}/\mathfrak{a}^{nq+1}$ est en fait une équation de dépendance intégrale de $\overline{Z}$ sur $A/\mathfrak{a}\ [\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$.

2) <u>Condition suffisante</u> : L'hypothèse implique que $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $A/\mathfrak{a}\ [\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$ ([2], page 198), ce qui signifie encore que $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est

un $(A/\mathfrak{a}\ [b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2])$-module gradué de type fini (gradué parce que $b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2$ est précisément de degré 1 dans gr (A)).

Soient alors $g_1,\ldots,g_m$ des générateurs homogènes de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, autrement dit :

$$gr_{\mathfrak{a}}(A) = A/\mathfrak{a}\ [b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]).g_1 + \ldots + (A/\mathfrak{a}\ [b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]).g_m$$

Soit μ le plus grand des degrés des g_i, alors :

$$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \subset \sum_{k=1}^{\mu} (A/\mathfrak{a}\ [b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2])\ .\ (\mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}) \quad \text{pour} \quad n \geq \mu$$

d'où en comparant les graduations :

$$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \subset \sum_{k=1}^{\mu} (b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2)^{n-k}.(\mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}) \quad \text{pour} \quad n \geq \mu$$

Or :

$$(b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2)^{n-k}.(\mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}) \subset (b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2)^{n-\mu}.(\mathfrak{a}^\mu/\mathfrak{a}^{\mu+1})$$

pour tout k = 1,2,..., .

Il devient donc clair que

$$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \subset (b+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2)^{n-\mu}.(\mathfrak{a}^\mu/\mathfrak{a}^{\mu+1})$$

et l'inclusion inverse étant toujours vérifiée, on en déduit que :

$$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} = \left(\frac{b\mathfrak{a}^{n-\mu-1}+\mathfrak{a}^{n-\mu+1}}{\mathfrak{a}^{n-\ +1}}\right)\ .\quad (\mathfrak{a}^\mu/\mathfrak{a}^{\mu+1})$$

$$= \frac{b\mathfrak{a}^{n-1}+\mathfrak{a}^{n+1}}{\mathfrak{a}^{n+1}} \quad \text{pour tout} \quad n \geq \mu.$$

D'où $\mathfrak{a}^n = b\mathfrak{a}^{n-1} + \mathfrak{a}^{n+1}$, ce qui implique que $\mathfrak{a}^n = b\mathfrak{a}^{n-1}$, autrement dit que $\mathfrak{a}$ est entier sur b.

C.Q.F.D.

Remarques :

a) Une conséquence de cette proposition est en particulier qu'un système de paramètre est basique.

b) Autre conséquence : si $\mathfrak{a}$ et b sont deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq b$, alors $\mathfrak{a}$ est entier sur b si et seulement si il existe des éléments $X_1,\dots,X_d$ de $\mathfrak{b}$ formant un système de paramètres de A tels que leurs formes dominantes dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ forment un système de paramètres (les $\overline{X}_i$ sont alors de degré 1).

2. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A et M un A-module de type fini, alors la longueur du A-module $M/\mathfrak{a}^n M$ est pour n assez grand un polynôme en n de degré k = dim M, dont le terme de plus haut degré est de la forme :

$$e_{\mathfrak{a}}(M) \frac{n^k}{k!} \quad \text{où} \quad e_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathbb{N}^*.$$

<u>Définition 6</u> : $e_{\mathfrak{a}}(M)$ sera appelé <u>multiplicité de M</u> pour l'idéal $\mathfrak{a}$ (s'agissant de $e_{\mathfrak{a}}(A)$, nous dirons multiplicité de $\mathfrak{a}$).

<u>Remarque</u> : Il est immédiat de voir que :

a) Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, alors pour tout A-module M, $e_{\mathfrak{a}}(M) \leq e_{\mathfrak{b}}(M)$.

b) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A et M un A-module de dimension k, alors $e_{\mathfrak{a}^n}(M) = n^k . e_{\mathfrak{a}}(M)$.

Rappelons encore le théorème de SAMUEL sur l'additivité de la multiplicité : étant donné une suite exacte de A-modules de type fini de mêmes dimensions :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0 ,$$

alors $e_{\mathfrak{a}}(M) = e_{\mathfrak{a}}(N) + e_{\mathfrak{a}}(P)$.

Nous en arrivons ainsi au deuxième outil essentiel dans ce travail :

<u>Proposition 3</u> : Soient A un anneau local de dimension d, $\mathfrak{a}$ un idéal de définition et X dans $\mathfrak{a}$ un paramètre de A. Alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/X)$ si et seulement si la forme dominante $\overline{X}$ de X est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, et si la dimension de l'annulateur de X est inférieure ou égale à d-2.

<u>Démonstration</u> :

1) <u>Condition suffisante</u> : Soit X dans A tel que X soit paramètre de

degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$. Alors, pour n assez grand, $\ell(\mathfrak{a}^{n-1}/\mathfrak{a}^n)$ et $\ell(A/\mathfrak{a}^n+X)$ sont des polynômes en n de degré d-1 dont les coefficients des termes de plus haut degré sont respectivement

$$\frac{e_{\mathfrak{a}}(A)}{(d-1)!} \quad \text{et} \quad \frac{e_{\mathfrak{a}}(A/x)}{(d-1)!} .$$

Par conséquent, pour montrer que $e_{\mathfrak{a}}(A/x)$ est égal à $e_{\mathfrak{a}}(A)$, il suffit de voir que le polynôme :

$$\ell(A/\mathfrak{a}^n+X) - \ell(\mathfrak{a}^{n-1}/\mathfrak{a}^n)$$

est de degré inférieur ou égal à d-2. Or :

$$(1) \qquad \ell(A/\mathfrak{a}^n+X) - \ell(\mathfrak{a}^{n-1}/\mathfrak{a}^n) = \ell(\mathfrak{a}^n:X/\mathfrak{a}^{n-1}) \quad ,$$

il suffit donc de montrer que $\ell(\mathfrak{a}^n:X/\mathfrak{a}^{n-1})$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d-2.

Or, du lemme d'ARTIN-REES, on déduit facilement que il existe $k > 0$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$\mathfrak{a}^n : X = \mathfrak{a}^{n-k} (\mathfrak{a}^k : X) + (0 : X).$$

Mais par ailleurs :

$$\ell(\mathfrak{a}^n:X/_{\mathfrak{a}^{n-1}}) = \ell((\mathfrak{a}^n:X) \quad \mathfrak{a}^{n-k}/_{\mathfrak{a}^{n-1}}) + \ell(\mathfrak{a}^n:X/_{(\mathfrak{a}^n:X) \quad \mathfrak{a}^{n-k}}).$$

Majorons séparément les deux termes de cette somme :

- D'une part, on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$(\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k} \supset (\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+1} \supset \dots \supset (\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}$$
$$\supset (\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j+1} \supset \dots \supset (\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-2} \supset \mathfrak{a}^{n-1}.$$

Evaluons la longueur du module suivant :

$$\frac{(\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}}{(\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j+1}} \simeq \frac{(\mathfrak{a}^n:X) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j} + \mathfrak{a}^{n-k+j+1}}{\mathfrak{a}^{n-k+j+1}}$$

Or $\mathfrak{a}^n:X \subset \mathfrak{a}^{n-k+j+2}:X$ pour $j \leq k-2$

et $\quad a^{n-k+j+1} \subset (a^{n-k+j+2}:X) \cap a^{n-k+j}$,

par conséquent :

$$(a^n:X) \cap a^{n-k+j} + a^{n-k+j+1} \subset (a^{n-k+j+2}:X) \cap a^{n-k+j}$$

d'où :

$$\ell\left(\frac{(a^n:X) \quad a^{n-k+j}}{(a^n:X) \quad a^{n-k+j+1}}\right) \leq \ell\left(\frac{(a^{n-k+j+2}:X) \quad a^{n-k+j}}{a^{n-k+j+1}}\right)$$

cette dernière longueur n'étant autre que $\ell((0:\overline{X})_{n-k+j})$ pour $j \leq k-2$.

Or, puisque $\overline{X}$ est paramètre de $gr_a(A)$, la dimension de son annulateur $(0:\overline{X})$ est inférieure ou égale à d-1, et par conséquent la longueur $\ell((0:\overline{X})_{n-k+j})$ est pour n assez grand un polynôme de degré inférieur ou égal à d-2, qu'on notera P(n-k+j).

- D'autre part :

$$\ell(a^n:X/_{(a^n:X) \quad a^{n-k}}) = \ell(a^n:X+a^{n-k}/_{a^{n-k}}),$$

et comme $a^n:X \subset a^{n-k}+(0:X)$, on en déduit que :

$$\ell(a^n:X/_{(a^n:X) \quad a^{n-k}}) \leq \ell((0:X)+a^{n-k}/_{a^{n-k}})$$

$$= \ell((0:X)/_{(0:X) \cap a^{n-k}}).$$

Cette dernière longueur étant évidemment inférieure ou égale à $\ell((0:X)/_{(0:X)a^{n-k}})$ qui est, pour n assez grand, un polynôme en n, noté Q(n), de degré inférieur ou égal à d-2, puisqu'on a pris soin de choisir X tel que $\dim(0:X) \leq d-2$.

De ces deux majorations, on déduira donc que, pour n assez grand, $\ell(a^n:X/_{a^{n-1}})$ est un polynôme en n inférieur ou égal au polynôme en n,

$$Q(n) + \sum_{j=0}^{k-2} P(n-k+j)$$

qui est lui-même de degré inférieur ou égal à d-2.

Conclusion : $e_a(A) = e_a(A/x)$.

2) <u>Condition nécessaire</u> : Soit X un paramètre de A tel que $e_{\mathfrak{a}}(A)=e_{\mathfrak{a}}(A/X)$.

a) On déduit immédiatement, de l'égalité (1) et de ce que X est paramètre, que $\ell(\mathfrak{a}^{n+1}:X/_{\mathfrak{a}}n)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d-2.

Comme $\ell((0:\overline{X})_{n-1}) = \ell\left(\frac{(\mathfrak{a}^{n+1}:X) \quad \mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right)$, on en déduit que c'est évidemment, pour n assez grand, un polynôme de degré inférieur ou égal à d-2, ce qui signifie que la dimension de $(0:\overline{X})$ est inférieure ou égale à d-1, c'est-à-dire que $\overline{X}$ est paramètre de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.

b) D'autre part, X est dans $\mathfrak{a}$ et X n'est pas dans $\mathfrak{a}^2$, sinon $\mathfrak{a}^{n+1}:X \supset \mathfrak{a}^{n-1}$ et alors

$$\ell(\mathfrak{a}^{n+1}:X/_{\mathfrak{a}}n) = \ell(\mathfrak{a}^{n+1}:X/_{\mathfrak{a}}n-1) + \ell(\mathfrak{a}^{n-1}/_{\mathfrak{a}}n)$$

serait un polynôme de degré d-1 puisque $\ell(\mathfrak{a}^{n-1}/_{\mathfrak{a}}n)$ est un polynôme de degré d-1, pour n assez grand.

c) De plus, en appliquant le lemme d'ARTIN-REES à (0:X), on en déduit qu'il existe k > 0 tel que :

$$(0:X) \cap \mathfrak{a}^{n-1} = [(0:X) \cap \mathfrak{a}^k]\ \mathfrak{a}^{n-k-1},$$

d'où :

$$\ell((0:X)/_{(0:X)\cap\mathfrak{a}^{n-1}}) = \ell((0:X)/_{(0:X)\cap\mathfrak{a}^{k}})$$
$$+ \ell((0:X)\cap\mathfrak{a}^k/_{[(0:X)\cap\mathfrak{a}^k]\ \mathfrak{a}^{n-k-1}}).$$

Comme $(0:X)/_{(0:X)\cap\mathfrak{a}^{n-1}}$ est isomorphe à $(0:X)+\mathfrak{a}^{n-1}/_{\mathfrak{a}}n-1$ qui est lui-même clairement inclus à $\mathfrak{a}^n:X/_{\mathfrak{a}}n-1$, on a :

$$\ell((0:X)/_{(0:X)\cap\mathfrak{a}^{n-1}}) \leq \ell(\mathfrak{a}^n:X/_{\mathfrak{a}}n-1)$$

et par conséquent

$$\ell((0:X)\cap\mathfrak{a}^k/_{[(0:X)\cap\mathfrak{a}^k]\ \mathfrak{a}^{n-k-1}})$$

est un polynôme en n de degré inférieur ou égal à d-2, ce qui signifie que la dimension de $[(0:X) \cap \mathfrak{a}^k]$ est inférieure ou égale à d-2 et a fortiori que la dimension de (0:X) est inférieure ou égale à d-2. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Dans la formule (1), on s'aperçoit que nécessairement si $X \quad \mathfrak{a}$ est un paramètre de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/X) \geq e_{\mathfrak{a}}(A)$. D'autre part, si X n'est pas paramètre de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/X) = e_{\mathfrak{a}}(A)$ si et seulement si $\dim(XA) < \dim A$.

Rappelons aussi que : étant donné un idéal de définition $\mathfrak{a}$ d'un anneau A de dimension $d \geq 2$, il existe X dans $\mathfrak{a}$ tel que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/X)$. Ce résultat, déjà démontré par ZARISKI-SAMUEL ([2], page 286), peut être retrouvé comme conséquence de la proposition 3 (celle-ci démontre, en effet, que si X est un élément de A et $\overline{X}$ sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, alors $\dim(0:X) \leq \dim(0:\overline{X})$).

Par ailleurs, la proposition 3 admet les généralisation suivantes :

<u>Corollaire 1</u> : Si A est un anneau local de dimension d et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A, et si X, un paramètre de A, est dans $\mathfrak{a}^n$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/X) = n\, e_{\mathfrak{a}}(A)$ si et seulement si $\overline{X}$ est un paramètre de degré n de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et $\dim(0:X) \leq d-2$.

La démonstration utilise la bijection entre les spectres gradués de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et $gr_{\mathfrak{a}^n}(A)$, et se fait en considérant $\overline{X}$ comme élément de $gr_{\mathfrak{a}^n}(A)$.

<u>Corollaire 2</u> : Avec les mêmes notations, si $X_1,\dots,X_s$ sont des éléments de A, $s \leq d$, tels que $\overline{X}_i$ est paramètre de degré n_i de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X_1,\dots,X_{i-1})$ et

$$\dim \left[\frac{(X_1,\dots,X_{i-1}):X_i}{(X_1,\dots,X_{i-1})}\right] \leq d-i-1$$

alors $e_{\mathfrak{a}}(A/X_1,\dots,X_s) = n_1\dots n_s\, e_{\mathfrak{a}}(A)$.

La démonstration est immédiate à partir de ce qui précède. La réciproque de ce corollaire n'étant pas vraie : en effet, $e_{\mathfrak{a}}(A/(x,y)) = m\, e_{\mathfrak{a}}(A)$ m'implique pas, en général, que $e_{\mathfrak{a}}(A/X)$ ou $e_{\mathfrak{a}}(A/y)$ soit un multiple de $e_{\mathfrak{a}}(A)$. Cette réciproque existe cependant partiellement :

Corollaire 3 : Si $(X_1,\ldots,X_s) \subset \mathfrak{a}$ se prolonge en un système de paramètres de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/X_1,\ldots,X_s) = e_{\mathfrak{a}}(A)$ si et seulement si $\overline{X}_i$ est paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X_1,\ldots,X_{i-1})$ et

$$\dim \left[\frac{(X_1,\ldots,X_{i-1}):X_i}{(X_1,\ldots,X_{i-1})}\right] \leq d-i-1.$$

B) Les théorèmes 1 et 2.

On remarquera tout d'abord que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux de définition d'un anneau local A, si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ (en effet : si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\mathfrak{a}^{k+n} \subseteq \mathfrak{b}^{n+1} \subseteq \mathfrak{a}^{n+1}$, ce qui signifie que $e_{\mathfrak{a}^{k+n}}(A) \geq e_{\mathfrak{b}^{n+1}}(A) \geq e_{\mathfrak{a}^{n+1}}(A)$ ou encore :

$$1 \leq \frac{e_{\mathfrak{b}}(A)}{e_{\mathfrak{a}}(A)} \leq \frac{(n+k)^d}{(n+1)^d} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \ ;$$

d'où $e_{\mathfrak{b}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A)$).

Sachant cela, on s'intéresse évidemment à la possibilité d'une réciproque. (Remarque : on peut démontrer d'ailleurs que l'existence d'une telle réciproque implique nécessairement que l'anneau A soit être équidimensionnel).

Supposons donc A équidimensionnel, et nous verrons qu'il conviendra pour les besoins de notre démonstration de supposer que A est également universellement caténaire (i.e. : quels que soient deux idéaux premiers $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$, dans n'importe quelle algèbre de type fini sur A, toutes les chaînes d'idéaux premiers entre $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ ont même longueur) et universellement japonais (i.e. : la clôture intégrale de toute A-algèbre de type fini B est finie sur B).

Cela posé, il est clair, en raison des propositions suivantes, que nous pourrons supposer A intègre et intégralement claos pour la démonstration du théorème 1 :

. $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ est entier sur $\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$.

. d étant la dimension de A et $p_1,\ldots,p_s$ étant les idéaux premiers minimaux tels que dim $(A/p_i) = d$, a et b étant des idéaux de définition tels que $a \supseteq b$, alors $e_a(A) = e_b(A)$ si et seulement si $e_a(A+p_i/p_i) = e_b(A+p_i/p_i)$ pour tout $i = 1,\ldots,s$.

. A étant japonais et $\bar{A}$ sa clôture intégrale (donc finie sur A), a et b étant des idéaux de définition de A, alors a est entier sur b si et seulement si $a\bar{A}$ est entier sur $b\bar{A}$.

. Dans les mêmes conditions, $e_{a\bar{A}}(\bar{A}) = e_a(A)$.

On remarquera enfin que lorsque la dimension de A est 1 (A intègre), cette réciproque est évidente.

Pour la démonstration des théorèmes 1 et 2, nous procéderons ainsi démonstration d'un théorème 2 partiel, puis du théorème 1, enfin du théorème 2 général.

1) Démonstrons le théorème 2 dans le cas où A est intègre et intégralement clos et a un idéal de définition intégralement clos ainsi que toutes ses puissances. Nous utiliserons pour cela deux lemmes :

<u>Lemme 1</u> : Si A est intègre et universellement caténaire, a un idéal de définition, alors $gr_a(A)$ est équidimensionnel.

La démonstration de ce lemme est visée sachant que si $S = \sum_{n \geq 0} a^n = A[a_1T,\ldots,a_nT]$ où $a = a_1A+\ldots+a_nA$ et p un idéal premier gradué relevant de $gr_a(A)$, alors $(gr_a(A)) = S_p/T^{-1}S_p$.

<u>Lemme 2</u> : Si a est un idéal de définition de A (intégralement clos), $\overline{a^n}$ la clôture intégrale de a^n pour tout $n > 0$ et $\bar{S}$ la clôture intégrale de $S = \sum_{n \geq 0} a^n$, alors $\bar{S} = \sum \overline{a^n}$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$ est entier sur $\sum \mathfrak{a}^n$. Il faut donc montrer que $\overline{S} \subset \sum \overline{\mathfrak{a}^n}$. Pour cela, il suffit de montrer que tout élément homogène de $\overline{S}$ est dans $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$.

Mais A étant intégralement clos, l'anneau de polynômes $A[T]$ est intégralement clos, donc $\overline{S} \subset A[T]$.

Soit donc Z un élément homogène de degré k de $A[T]$, Z s'écrit donc αT^k avec $\alpha \in A$. Ecrivons que Z satisfait à une équation de dépendance intégrale homogène sur S :

(1) $$Z^q + \alpha_1 Z^{q-1} + \ldots + \alpha_i Z^{q-i} + \ldots + \alpha_q = 0$$

les α_i étant des éléments homogènes de degré ik de S, autrement dit :

$$\alpha_i = \beta_i T^{ik} \quad \text{avec} \quad \beta_i \in \mathfrak{a}^{ik}.$$

Par conséquent (1) s'écrit encore sous la forme :

(2) $$\alpha^q T^{qk} + \beta_1 T^k \alpha^{q-1} T^{k(q-1)} + \ldots + \beta_i T^{ik} \alpha^{q-i} T^{(q-i)k} + \ldots + \beta_q T^{qk} = 0$$

ou encore, en simplifiant par T^{qk}, (2) devient une relation dans A :

(3) $$\alpha^q + \beta_1 \alpha^{q-1} + \ldots + \beta_i \alpha^{q-i} + \ldots + \beta_q = 0.$$

Et (3) n'est rien d'autre qu'une équation de dépendance intégrale de α sur $\mathfrak{a}^k$, donc α est dans $\overline{\mathfrak{a}^k}$, et par conséquent $Z = \alpha T^k$ est dans $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$.

C.Q.F.D.

Par conséquent, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition tel que $\mathfrak{a}^n = \overline{\mathfrak{a}^n}$ pour tout $n \geq 1$, l'algèbre de REES $S = \sum \mathfrak{a}^n$ est intégralement close, d'où d'après le critère de Normalité de SERRE ([3], théorème 39, page 125), S vérifie la condition (S_2) de SERRE ([3], page 125). Ce qui signifie encore (cf. lemme 1) que pour tout idéal premier gradué relevant de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$,

$$(gr_{\mathfrak{a}}(A))_p = S_p / T^{-1} S_p$$

vérifie la condition (S_1) de SERRE.

Par conséquent, les idéaux premiers associés d'un anneau gradué étant gradués, les seuls idéaux premiers pouvant être associés à $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ sont les minimaux et éventuellement l'idéal maximal irrelevant M.

Soit maintenant $\bar{X}$ un paramètre de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$. Puisque pour tout idéal premier p distinct de M, $\bar{X}$ n'est contenu dans aucun idéal premier associé à $(gr_{\mathfrak{a}}(A))_p$, son annulateur $(0:\bar{X})$ est soit nul, soit à support réduit à M.

Notons $\tilde{\mathfrak{a}} = \sum_{n\geq 1} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$, alors on a clairement :

$e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A)) = e\ (A)$ et $e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A/X)) = e_{\mathfrak{a}}(A/X)$.

Le théorème étant évident lorsque $d = \dim A = 1$, on peut supposer $d \geq 2$. Dans ce cas, comme $\dim(0:\bar{X}) \leq d-2$, si n est le degré de $\bar{X}$, on a :

- en vertu du corollaire 1 appliqué à l'anneau $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et à l'idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$: $e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X}) = n\ e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A)) = n\ e_{\mathfrak{a}}(A)$;
- en vertu du même corollaire 1 appliqué à l'anneau A et à l'idéal $\mathfrak{a}$:

$$e_{\mathfrak{a}}(A/X) = n\ e_{\mathfrak{a}}(A).$$

Par conséquent : $e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X}) = e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(gr_{\mathfrak{a}}(A/X))$.

Ce qui signifie, d'après le théorème de SAMUEL sur l'additivité de la multiplicité, que le noyau de la surjection $gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X} \longrightarrow gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$ est de dimension inférieure ou égale à d-2. Or d'après le lemme 1, $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est caténaire et équidimensionnel, donc également $gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X}$, par conséquent un idéal de dimension strictement inférieure à $\dim(gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X}) = d-1$ est nilpotent.

<u>Remarque</u> : On remarquera que dans ce cas particulier, tenant compte à la fois du fait que $(0:\bar{X})_k = 0$ lorsque k est suffisamment grand et du fait que : $\mathfrak{a}^n:X = \mathfrak{a}^{n-\ell}(\mathfrak{a}^\ell:X)$, on peut en déduire que le noyau de

$$(gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X} \longrightarrow gr_{\mathfrak{a}}(A/X))$$

est non seulement nilpotent, mais nul en graduations assez grandes, autrement dit dans ce cas il y a un isomorphisme entre les schémas projectifs Proj $(gr_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{X})$ et Proj $(gr_{\mathfrak{a}}(A/X))$.

2) Démontrons à présent le théorème de REES :

On a vu qu'on pouvait clairement supposer A intègre et intégralement clos et que lorsque dim A = 1, le théorème est vrai. L'idée qui se présente est donc de faire une récurrence sur la dimension de A, et pour ce faire, d'utiliser le théorème 2 dans le cas particulier où nous l'avons déjà démontré. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 3</u> : Soit A un anneau intègre, intégralement clos et universellement japonais, alors, étant donné un idéal de définition $\mathfrak{a}$, il existe un entier positif k tel que $(\overline{\mathfrak{a}^k})^n = \overline{\mathfrak{a}^{kn}}$ pour tout $n \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 2, l'anneau $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$ est la clôture intégrale de $\sum \mathfrak{a}^n$, qui par hypothèse est japonais, cette clôture intégrale est donc finie sur $\sum \mathfrak{a}^n$. Par conséquent, il existe $k > 0$ tel que $\overline{\mathfrak{a}^{k+1}} = \mathfrak{a}.\overline{\mathfrak{a}^k}$, d'où a fortiori $\overline{\mathfrak{a}^{k+1}} = \overline{\mathfrak{a}}.\overline{\mathfrak{a}^k}$, d'où encore $\overline{\mathfrak{a}^{kn}} = (\overline{\mathfrak{a}^k})^n$. C.Q.F.D.

Soit maintenant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, tels que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$. Soit k tel que $(\overline{\mathfrak{a}^k})^n = \overline{\mathfrak{a}^{kn}}$ pour tout $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{a}^k \supseteq \mathfrak{b}^k$ et $e_{\mathfrak{a}^k}(A) = e_{\mathfrak{b}^k}(A)$; de plus, $\overline{\mathfrak{a}^k}$ est entier sur $\mathfrak{a}^k$, donc $e_{\mathfrak{a}^k}(A) = e_{\mathfrak{a}^k}(A) = e_{\mathfrak{b}^k}(A)$. Si on montre alors que cela implique que $\overline{\mathfrak{a}^k}$ est entier sur $\mathfrak{b}^k$, donc a fortiori que $\mathfrak{a}^k$ est entier sur $\mathfrak{b}^k$, on aura démontré, d'après la proposition 1, que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$. On peut donc bien se ramener à démontrer le théorème de REES dans le cas particulier où A est intègre, intégralement, universellement caténaire et universellement japonais, et où $\mathfrak{a}$ est intégralement clos ainsi que toutes ses puissances.

Dans ce cas, soit $X \in \mathfrak{b}$ tel que $\overline{X}$ soit paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{b}}(A)$, alors

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A/X) \geq e_{\mathfrak{a}}(A/X) \geq e_{\mathfrak{a}}(A),$$

d'où $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/X)$, et par conséquent $\overline{X}$ est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.

Du fait que $e_{\mathfrak{a}}(A/X) = e_{\mathfrak{b}}(A/X)$, on déduit par hypothèse de récurrence que $\mathfrak{a}/X$ est entier sur $\mathfrak{b}/X$, autrement dit, il est possible de trouver des éléments $X_1,\ldots,X_{d-1}$ de $\mathfrak{b}$ tels que $\overline{X_1},\ldots,\overline{X}_{d-1}$ forment un système de paramètres de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$; mais d'après le théorème 2 partiel, celui-ci se relève en un système de paramètres $(\overline{X_1},\ldots,\overline{X}_{d-1})$ de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{X}$; par conséquent $(\overline{X},\overline{X_1},\ldots,\overline{X}_{d-1})$ est un système de paramètres de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, ce qui signifie (proposition 2) que $\mathfrak{a}$ est entier sur $(X,X_1,\ldots,X_{d-1})$ d'où a fortiori que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

Remarque : On a aussi montré ainsi que le théorème 2 implique le théorème 1.

3) Montrons à présent que le théorème de REES implique le théorème 2 en toute généralité. Pour cela, montrons d'abord la proposition suivante :

Proposition 4 : Soit A un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais. Si X est un élément régulier de A tel que sa forme dominante $\overline{X}$ soit un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, alors, pour tout y de A tel que sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$ est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$, sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ se prolonge avec $\overline{X}$ en un système de paramètres de gr (A).

Démonstration : Comme $\overline{X}$ est paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et que X est régulier, on déduit de la proposition 3 que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/X)$.

Si maintenant $\overline{y}$ est paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$, cela signifie qu'il existe des éléments $\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{d-2}$ de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$, homogènes de degré 1, tels que $(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{d-2},\overline{y})$ forme un système de paramètres de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/X)$, ce qui signifie, d'après la proposition 2, que $\mathfrak{a}/X$ est entier sur l'idéal $(X_1,\ldots,X_{d-2},y)$ de A/X, d'où que $e_{\mathfrak{a}}(A/X) = e_{(X_1,\ldots,X_{d-2},y)}(A/X)$.

Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal $(X_1,\ldots,X_{d-2},y,X) \subseteq \mathfrak{a}$, on a alors :
$e_{\mathfrak{a}}(A) \leq e_{\mathfrak{q}}(A) \leq e_{\mathfrak{q}}(A/X) = e_{\mathfrak{a}}(A/X) = e_{\mathfrak{a}}(A)$, et par conséquent $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{q}}(A)$.

On déduit alors du théorème de REES que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{q}$ et par conséquent (proposition 2) que $(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{d-2},\overline{y},\overline{X})$ forme un système homogène de paramètres de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

C.Q.F.D.

Il est facile de voir, en se plaçant dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}nm(A)$, que cette proposition se généralise au cas où $\overline{X}$ est de degré n et $\overline{y}$ de degré m ; et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A_{red})/\overline{X} \arrow[r] & \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A_{red}/X) \arrow[r] & 0 \\ \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{X} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/X) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

(où A_{red} est l'anneau réduit de A) que l'on peut se passer de l'hypothèse "X régulier".

<u>Remarques</u> :

1) Comme on peut supposer A complet pour la démonstration du théorème de REES([1]), et qu'un anneau complet est universellement caténaire et universellement japonais, notre démonstration inclus le cas considéré par REES, à savoir : A de complété équidimensionnel.

2) Les deux hypothèses en question (universellement caténaire et japonais) ne sont pas réellement restrictives, dans la mesure où les anneaux de la géométrie algébrique ont ces propriétés.

3) Un des intérêts du théorème de REES est la possibilité de "passer à la limite". Par exemple, étant donnés deux idéaux définition $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, tels que $\mathfrak{b}^n \supset \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ pour tout n, il semble, a priori, difficile de montrer que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$; par contre, il est très facile, en passant à la limite sur n, de montrer que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$, donc que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

C) Application à la connexité du gradué associé :

Définition 7 : Nous dirons qu'un anneau local A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de dimension d, est s-connexe, où $0 \leq s \leq d-2$, si pour toute partie $X_1,\dots,X_s$ d'un système de paramètres de A, le schéma Spec $(A/(X_1,\dots,X_s)) - \{\mathfrak{m}\}$ est connexe.

Définition 8 : Nous dirons qu'un anneau gradué S, de dimension d, est s-connexe, où $0 \leq s \leq d-2$, si pour toute partie $X_1,\dots,X_s$ d'un système homogène de paramètres le schéma $\mathrm{Proj}(S/(X_1,\dots,X_s))$ est connexe.

Propriétés immédiates :

1) Si un anneau R (local ou gradué) est s-connexe, alors R est i-connexe pour tout $i \leq s$.

2) Si R/X est s-connexe pour tout X paramètre (homogène dans le cas gradué) de R, alors R est (s+1)-connexe.

Rappelons également le résultat suivant :

Proposition 5 : Si A est un anneau local ayant la propriété (S_r) de SERRE, alors A est (r-2)-connexe ([4]).

La démonstration se faisant en utilisant la cohomologie à support appliquée au point fermé $Y = \{\mathfrak{m}\}$

Ce que nous allons démontrer ici, c'est que si A vérifie la condition (S_r), alors non seulement A, mais également $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ (où $\mathfrak{a}$ est n'importe quel idéal de définition de A) est (r-2)-connexe. Plus précisément :

Théorème 3 : Soient A un anneau local, universellement caténaire et universellement japonais, et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A, alors si A vérifie la condition (S_r) de SERRE, $r \geq 2$, le gradué associé $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est (r-2)-connexe.

La démonstration de ce théorème se fera par récurrence sur r, en démontrant d'abord le cas r=2 et même plus précisément dans ce cas :

Proposition 6 : Soient A un anneau local de profondeur supérieure ou égale à 2 et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A, alors $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est O-connexe.

Cette proposition est comme nous allons le voir un cas particulier du théorème de connexion de ZARISKI ([5], 4.3.2) :

Théorème 4 : Soient Y un préschéma localement noethérien et f : X ⟶ Y un morphisme propre, alors si $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, les fibres $f^{-1}(y)$ de f sont connexes et non vides pour tout $y \in Y$.

Démonstration de la proposition 6 : Appliquons le théorème 4 au cas de l'éclatement d'un idéal de définition $\mathfrak{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ d'un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire lorsque $X = \mathrm{Proj}\ (\sum \mathfrak{a}^n)$ et Y = Spec A et où f : X ⟶ Y est le morphisme canonique. Comme $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition, pour montrer que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, il suffira de montrer que $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à A.

Sous les hypothèses de la proposition 6, on pourra supposer que les générateurs $a_1,\ldots,a_n$ de A sont tous réguliers.

X étant obtenu par recollement des ouverts $\mathcal{U}_i = \mathrm{Spec}(A\ \frac{a_1}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i})$, on en déduit que :

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(\mathcal{U}_i,\mathcal{O}_X)$$

dans l'anneau total des fractions de A.

Pour tout i, $A[\frac{a_1}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i}]$ est inclus dans A_{a_i} et par conséquent :

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \bigcap_{i=1}^{n} A\left[\frac{a_1}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i}\right] \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{a_i}.$$

Or les a_i engendrant un idéal de définition de A, l'ouvert $\mathcal{U} = \mathrm{SecpA}-\{\mathfrak{m}\}$

est réunion des ouverts $D(a_i)$ et par conséquent $\Gamma(\mathcal{U},\tilde{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} A_{a_i}$, d'où $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ s'injecte dans $\Gamma(\mathcal{U},\tilde{A})$.

Mais on sait ([5]) que si $\mathrm{prof}(A) \geq 2$, $\Gamma(\mathcal{U},\tilde{A})$ est isomorphe à A. Comme clairement $A \subset \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, on en déduit que $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à A.

On peut donc appliquer le théorème de connexion et en déduire que les fibres $f^{-1}(y)$ de f sont connexes pour tout $y \in Y = \mathrm{Spec}\ A$. En particulier, si $y = \{\mathfrak{m}\}$, la fibre $f^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$ est connexe. Or cette fibre est par définition $X \underset{Y}{\times} \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$, c'est-à-dire que :

$$f^{-1}(\{\mathfrak{m}\}) = \mathrm{Proj}(\sum a^n \otimes_A A/\mathfrak{m}A) = \mathrm{Proj}(\sum a^n/_{\mathfrak{m}a^n}),$$

et il est immédiat de voir que $\mathrm{Proj}\ (\sum a^n/_{\mathfrak{m}a^n})$ et $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}_a(A))$ ont même espace topologique sous-jacent. Par conséquent, $\mathrm{gr}_a(A)$ est 0-connexe.

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 3 : Procédons par récurrence sur r, le cas $r = 2$ venant d'être démontré.

Soit donc A vérifiant la condition (S_r) de SERRE, alors A/X vérifie la condition (S_{r-1}) pour tout X paramètre de A, et en particulier pour tout X tel que $\bar{X}$ soit paramètre de $\mathrm{gr}_a(A)$.

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{gr}_a(A/X)$ est (r-3)-connexe pour tout X tel que $\bar{X}$ soit paramètre de $\mathrm{gr}_a(A)$. Or A étant (S_r), $r \geq 2$, A est équidimensionnel, donc vérifie le théorème 2, c'est-à-dire que $\mathrm{gr}_a(A/X)$ et $\mathrm{gr}_a(A)/\bar{X}$ ont même espace topologique sous-jacent, et donc $\mathrm{gr}_a(A)/\bar{X}$ est (r-3)-connexe, pour tout paramètre homogène $\bar{X}$ de $\mathrm{gr}_a(A)$, ce qui signifie précisément, d'après la deuxième des propriétés immédiates, que $\mathrm{gr}_a(A)$ est (r-2)-connexe.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. REES $\mathfrak{a}$-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals.
Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961) p. 8-17.

[2] O. ZARISKI and P.SAMUEL Commutative Algebra - Vol. 2 Ed. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[3] H. MATSUMURA Commutative Algebra Ed. W.A. BENJAMIN Inc. New York 1970.

[4] R. HARTSHORNE Complete intersections and connectedness
Am. J. Math. 84 (1962), p. 497-508.

[5] A. GROTHENDIECK E.G.A. III - Publications de l'I.H.E.S. n° 11 (1961).

[6] D.G. NORTHOCOTT and D. REES Reductions of ideals in local rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), P. 145-158.