A. HOSVEPIAN

Sur un algorithme de calcul pour un estimateur de filtrage linéaire dans un Hilbert

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A4_0>

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - UNIVERSITÉ ET I.N.S.A. DE RENNES
INSTITUT de RECHERCHE en INFORMATIQUE et SYSTÈMES ALÉATOIRES
I.R.I.S.A.

Avenue du Général Leclerc - 35031 Rennes Cedex - B.P. 25 A Tel 36.48.15

Rapport N° 64

SUR UN ALGORITHME DE CALCUL *
POUR UN ESTIMATEUR DE FILTRAGE
LINEAIRE DANS UN HILBERT

par

A. HOVSEPIAN

Sommaire

Dans ce travail, on considère un processus, à valeurs dans un espace de Hilbert, solution d'une équation d'évolution stochastique (équation d'état) perturbée par un mouvement brownien.

A ce processus est associé un processus d'observation fini-dimensionnel, lui-même bruité par un brownien.

Cet article fournit une méthode de résolution approchée pour les équations de filtrage de l'état par rapport à l'observation.

Comme exemple d'application, on traite le cas de l'équation de la chaleur.

* *Pour toute correspondance ou demande de tirés à part, écrire à*
A. HOVSEPIAN Université de Rennes, B.P. 25 A 35031 RENNES CEDEX

SUR UN ALGORITHME DE CALCUL POUR UN ESTIMATEUR DE FILTRAGE LINEAIRE DANS UN HILBERT

-=-=-=-

par Armand HOVSEPIAN

INTRODUCTION

Dans un article récent, Curtain [3] a étudié la généralisation, à un espace de dimension infinie, du problème de filtrage linéaire de Kalman-Bucy, à savoir :

Un système stochastique à une infinité de dimension est représenté par l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} du(t,\omega) = Au(t,\omega)dt + B(t).dW(t,\omega) \\ u(0,\omega) = u_0(\omega) \end{cases}$$

où A est un opérateur non borné
B(t) est un opérateur borné
W(t,ω) est un brownien à valeurs dans un Hilbert infini

A ce système est associé un processus d'observation de dimension finie (à valeurs dans $\mathcal{K}$)

$$\begin{cases} dz(t,\omega) = a(t)\, u(t,\omega)dt + b(t).dV(t,\omega) \\ z(0,\omega) = 0 \end{cases}$$

avec : a(t) et b(t) opérateurs bornés
V(t,ω) brownien de dimension finie

Dans ces conditions, il existe un filtre optimal pour u(t,ω), basé sur l'observation z(t,ω). Ce filtre étant obtenu récursivement en résolvant une équation de Riccati à une infinité de dimension.

Le but de ce travail est de ramener ces systèmes de dimension infinie à des équations matricielles de dimension finie du type Bucy [2] qu'on sait résoudre numériquement.

Il est divisé en 4 parties :

1) Un préliminaire précisant les hypothèses et équations qui déterminent les opérateurs Λ(t,s) et K(t,s), où K(t,s) est un opérateur qui réalise le meilleur estimateur $\hat{u}(t)$ de u(t) sous la forme $\hat{u}(t) = \int_0^t K(t,s)dz(s)$.

2) L'opérateur de covariance Λ(t,s) intervient dans la résolution de K(t,s). On construit donc des suites doubles $\Lambda_n^m(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, où $\mathcal{H}_n$ est un espace de Hilbert de dimension n., qui convergent fortement (uniformément en t et s) vers $\Lambda(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

3) Les $\Lambda_n^m(t,s)$ déterminent une suite d'opérateurs $K_n^m(t,s)$ qui satisfont à une équation de Bucy de dimension finie. Cette partie montre que $K_n^m(t,s)$ converge vers K(t,s) dans L_2.

4) La quatrième partie est consacrée à un exemple d'application numérique sur une équation stochastique de la chaleur.

I - PRELIMINAIRES

On se donne deux espaces de Hilbert réels :
$\mathcal{H}$ de dimension infinie, muni de son produit scalaire <,>
$\mathcal{K}$ de dimension finie q, muni de son produit scalaire <,>
Un segment I = [0,T] et un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel est défini un brownien W_t, à valeurs dans $\mathcal{H}$, de la façon suivante [3] :

2 - Equation linéaire stochastique définissant l'état :

Soient :

a) A un opérateur linéaire fermé sur $\mathcal{H}$, non borné, qui engendre l'opérateur d'évolution G(t) :

$$G(0)=I=\text{identité}, \quad G(t-r)G(r-s)=G(t-s) \quad t\leq r\leq s$$

$$A = \lim_{t\to s} \frac{G(t-s)-I}{t-s} \quad \text{générateur infinitésimal de } G(t)$$

On suppose que $\|G\| = \sup_{t\in I} \|G(t)\| < +\infty$

b) $B(\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$

c) u_0 une variable aléatoire donnée, à valeurs dans $\mathcal{H}$, centrée, admettant une covariance $\Lambda_0 = E\{u_0 \otimes u_0\}$

Alors $u_t(\omega)$ sera le processus à valeurs dans $\mathcal{H}$, adapté à $\mathcal{F}_t$, tel que $\sup_{t\in I} E\{\|u_t\|^2\} < +\infty$ et :

$$(1) \qquad \begin{cases} du_t = Au_t dt + B_t dW_t \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Remarque :

(1) admet l'unique solution (faible) u_t à valeurs dans $\mathcal{H}$ [3] :

$$u_t = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)B(s)dW(s).$$

3 - Equation linéaire stochastique associée à l'espace des observations $\mathcal{K}$:

Elle se définit de façon classique, en se donnant :

a) $a(\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$

1 - Processus brownien sur $\mathcal{H}$:

W_t sera un processus brownien sur $\mathcal{H}$ si :

a) $E\{W(t)-W(s)\} = 0$ et $W(t)-W(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(W_p\ ;\ p\leq s)$ et $\mathcal{U} = \bigvee_s \mathcal{F}_s$ complété.

b) $t \to W(t,\cdot)$ est continue en t p.s.

c) $\forall h$ et $k \in \mathcal{H}$, on a :

$E\{\langle W_t-W_s, h\rangle\langle W_t-W_s, k\rangle\} = (t-s)\ \langle Wh,k\rangle \qquad W$ = opérateur de covariance de W_t

où W est un opérateur nucléaire [5], positif, admettant une base orthonormale, dénombrable, de vecteurs propres e_i qui engendrent $\mathcal{H}$, de valeurs propres correspondantes c_i.

> *On peut choisir et c'est ce qu'on fera, un rangement de la base $\{e_i\}$ tel que la suite des valeurs propres $\{c_i\}$ soit décroissante.*

d) $E\{\|W(t)-W(s)\|^2 < +\infty \quad \forall s$ et $t\in I$ et pour tout $t_1\leq t_2\leq t_3\leq t_4$ et tout vecteur propre e_i de W.

$$\langle W(t_2)-W(t_1), e_i\rangle \quad \text{et} \quad \langle W(t_4)-W(t_3), e_i\rangle$$

sont des v.a. gaussiennes indépendantes.

Remarque 1 :

Si u et $v \in \mathcal{H}$, on définit $u \otimes v \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par :

$$\forall h \in \mathcal{H} \qquad u \otimes v(h) = u\langle v,h\rangle$$

et la relation c) précédente s'écrit :

$$E\{(W_t-W_s) \otimes (W_t-W_s)\} = (t-s)W$$

Remarque 2 :

L'utilité d'ordonner les valeurs propres c_i apparaîtra dans la proposition 2, partie II, qui donne une évaluation de la convergence des opérateurs Λ_n^m.

b) $b(\cdot) \in L_\infty(I\,;\mathcal{L}(\mathcal{K}))$, inversible, tel que $b^{-1}(\cdot) \in L_\infty(I\,;\mathcal{L}(\mathcal{K}))$

c) un brownien $v_t(\omega)$ à valeurs dans $\mathcal{K}$ indépendant de W_t, d'opérateur de covariance associée V, où :

$$E\{(v_t-v_s) \otimes (v_t-v_s)\} = (t-s)V \quad \text{avec} \quad V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

Avec ces hypothèses, l'observation $z(t,\omega)$ est l'unique processus à valeurs dans $\mathcal{K}$ solution de l'équation stochastique :

$$(2) \qquad \begin{cases} dz_t = a(t)u(t)dt + b(t)dV_t \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

4 - *Commentaires* :

Supposons qu'on ait un phénomène dont l'évolution dans le temps soit régie par l'équation stochastique (1), et que l'observation apparente de ce phénomène ne puisse être appréhendée que par une équation du type (2).

Le problème est de trouver le meilleur estimateur $\hat{u}(t,\omega)$ de l'état $u(t,\omega)$, à partir de l'observation $z(s,\omega)$ $0 \leq s \leq t$, sous la forme intégrale :

$$\hat{u}(t,\omega) = \int_0^t K(t,s)dz(s,\omega)$$

où l'opérateur (déterministe) $K(t,\cdot) \in L_\infty(I\,;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}))$ est tel que $\hat{u}(t)$ minimise la forme quadratique

$$E\{\langle u_t-\hat{u}_t,\, h\rangle^2\} \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}$$

Avec les hypothèses et énoncés ci-dessus K(t,s) existe et satisfait à l'équation :

$$(3) \qquad \boxed{\int_0^t K(t,s)a(s)\Lambda(s,p)a^*(p)ds + K(t,p)b(p)V\,b^*(p) = \Lambda(t,p)a^*(p)}$$

où l'opérateur de covariance $\Lambda(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est donné par : (voir [3]).

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\Lambda(t,s) = E\{u_t \otimes u_s\} = G(t)\Lambda_0 G^*(s) + \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} G(t-x)B(x)WB^*(x)G^*(s-x)dx \\ &\text{avec } \Lambda_0 = \Lambda(0,0) = E\{u_0 \otimes u_0\} \text{ donné} \end{aligned}}$$

Remarque :

Une hypothèse utilisée pour établir les équations (3) et (4) est l'indépendance des browniens w_t et v_t. Ceci implique donc que les perturbations aléatoires de l'espace des états $\mathcal{H}$ n'ont aucune influence sur celles du système observé $\mathcal{K}$.

Plus précisément, un grand coup de pied dans l'appareil de mesure laisse l'état du système réel imperturbable.

5 - *Objet de ce travail* :

Les équations (3) et (4) sont des équations intégro-différentielles d'opérateurs sur des espaces de dimension infinie, qu'il n'est pas possible, en général, de calculer numériquement.

Le problème consistait donc à trouver une méthode permettant un calcul approché de K(t,s). On y parvient en remplaçant K(t,s) par une suite (double) d'opérateurs $K_n^m(t,s)$, de rang fini, et on y adjoint une évaluation de la vitesse de convergence de $K_n^m(t,s)$ vers K(t,s).

6 - *Définition des normes* :

. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ étant le produit scalaire dans $\mathcal{H}$, on définit la norme de $u(\cdot) \in L_\infty(I\,;L_2(\Omega,\mathcal{H}))$ par :

$$\|u\| = \sup_{t\in I} \sqrt{E\{\|u_t\|^2\}}$$

.. On note $\|a\| = \sup_{t\in I} \|a(t)\|$ la norme de l'opérateur $a(.) \in L_\infty(I\,;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$.

Dans les démonstrations de la 2e partie, on sera aussi amené à utiliser des opérateurs $Q \in \mathcal{L}(L_2(I\ ;\ \mathcal{K}))$, d'où l'introduction d'un produit scalaire $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ et d'une norme notée $|||\cdot|||$ dans $L_2(I\ ;\ \mathcal{K})$, déduits du produit scalaire dans $\mathcal{K}$, par :

$$\langle\langle f,g\rangle\rangle = \int_0^T \langle f(x),g(x)\rangle dx \Rightarrow |||f|||^2 = \int_0^T \|f(x)\|^2 dx$$

et la norme dans $\mathcal{L}(L_2(I\ ;\ \mathcal{K}))$ s'écrira :

$$|||Q||| = \operatorname*{Sup}_{|||f|||=1} |||Qf|||$$

II - CONSTRUCTION DE LA SUITE DOUBLE D'OPERATEURS $\Lambda_n^m(t,s)$

Comme l'opérateur de covariance $\Lambda(t,s)$ joue un rôle essentiel dans la résolution de $K(t,s)$, on est amené à considérer plusieurs normes sur $\Lambda(t,s)$ qui seront utilisées pour simplifier les démonstrations.

Normes de $\Lambda(t,s)$

Le lemme qui suit permettra de définir deux normes $\|\Lambda\|_1$ et $n(\Lambda)$ pour $\Lambda(t,s)$.

Lemme 1

a) La norme de Hilbert-Schmidt de $\Lambda(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\|\Lambda(t,s)\|_1 = \Big(\sum_{i,j} |\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle|^2\Big)^{1/2}$$

est majorée par $\sqrt{E\{\|u_t\|^2\}}\cdot\sqrt{E\{\|u_s\|^2\}}$.

b) L'opérateur Λ de $\mathcal{L}(L_2(I\ ;\mathcal{H}))$ associé à $\Lambda(t,s)$ par :

$$(\Lambda f)(t) = \int_0^t \Lambda(t,s)f(s)ds \quad \text{pour} \quad f(\cdot) \in L_2(I\ ;\mathcal{H})$$

est de Hilbert-Schmidt.

Démonstration

a) En appliquant l'inégalité de Scharwz à :

$$|\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle| = |E\{\langle u(t,\omega),\ e_i\rangle\langle u(s,\omega),\ e_j\rangle\}| = |E\{u_i(t,\omega).u_j(s,\omega)\}|$$

où u_i représente la i^e coordonnée de $u \in \mathcal{H}$, dans la base $\{e_i\}$, on obtient :

$$|\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle| \leq E\{|u_i(t,\omega)u_j(s,\omega)|\} \leq \sqrt{E\{u_i^2(t,\omega)\}}\cdot\sqrt{E\{u_j^2(s,\omega)\}}$$

d'où par sommation

$$\|\Lambda(t,s)\|_1^2 = \sum_{i,j} |\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle|^2 \leq \sum_i E\{u_i^2(t,\omega)\}\cdot\sum_j E\{u_j^2(s,\omega)\}$$

puis :

$$\|\Lambda(t,s)\|_1^2 \leq E\{\sum_i u_i^2(t,\omega)\}\cdot E\{\sum_j u_j^2(s,\omega)\} = E\{\|u_t\|^2\}\cdot E\{\|u_s\|^2\} \leq \|u\|^4.$$

b) L'application

$$(t,s) \to \|\Lambda(t,s)\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{\|h\|=1\\ h\in\mathcal{H}}} \|\Lambda(t,s)h\|$$

est mesurable. D'après le *a)* précédent elle est bornée, puisque :

$$\|\Lambda(t,s)\| \leq \|\Lambda(t,s)\|_1 \leq \|u\|^2$$

Elle est donc de carré intégrable sur $I \times I$ et l'opérateur intégral associé Λ est de Hilbert-Schmidt.

Normes de l'opérateur Λ

On prendra pour normes :

1° - $\|\Lambda\| = \operatorname*{Sup}_{t,s\in I} \|\Lambda(t,s)\|$ comme opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

2° - $\|\Lambda\|_1 = \operatorname*{Sup}_{t,s\in I} \|\Lambda(t,s)\|_1$ qui existe d'après le *a)* du lemme 1 et le § I-2.

3° - $n(\Lambda) = \left(\int_0^T\int_0^T \|\Lambda(t,s)\|^2 \, dt \, ds\right)^{1/2}$ comme norme d'opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{L}(L_2(I\,;\mathcal{H}))$.

Conséquences

Comme $\|\Lambda(t,s)\| \leqslant \|\Lambda(t,s)\|_1 \leqslant \|u\|^2$ on a :

$$\|\Lambda\| < \|\Lambda\|_1 \quad \text{et} \quad n(\Lambda) < T\|\Lambda\| < T\|\Lambda\|_1$$

(ce qui entraîne $\|a\Lambda a^*\| \leqslant \|a\|^2\|\Lambda\| \leqslant \|a\|^2\|\Lambda\|_1$, etc...).

Ceci étant établi, on définit $\mathcal{H}_n$ comme étant le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$ engendré par la base tronquée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

On note P_n la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_n$.

Comme $\Lambda(t,s) = E\{u_t \otimes u_s\}$ est un opérateur de covariance dans un espace de Hilbert infini, il est compact (voir [5]). Il s'ensuit qu'il est limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini, qu'on va construire explicitement (dans $\mathcal{H}_n$) en tenant compte de l'opérateur de covariance W qui intervient dans la détermination de $\Lambda(t,s)$ (voir équation (4)).

Définition 2

W^m sera l'opérateur déduit de W par :

$$W^m = WP_m \quad \text{et} \quad W^m \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

On note que rang $W^m = m$.

Lemme 2

W^m converge en norme vers W

Démonstration : Immédiat (mais on s'en sert plus loin).

$$\|W^m - W\| \leqslant \|W^m - W\|_1 = \sqrt{\sum_{i>m} c_i^2} \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

Définition 3

La suite $\Lambda^m(t,n)$ sera définie par l'équation :

$$\boxed{\Lambda^m(t,s) = G(t)\Lambda_0 G^*(s) + \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} G(t-p)B(p)W^m B^*(p)G^*(n-p)dp}$$

Lemme 3

$\Lambda^m(t,s)$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, uniformément en t et s, vers $\Lambda(t,s)$.

Démonstration

On écrit la différence

$$\Lambda^m(t,s) - \Lambda(t,s) = \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} G(t-p)B(p)[W-W^m]B^*(p)G^*(s-p)dp$$

puis en passant à la norme

$$\|\Lambda^m(t,s)-\Lambda(t,s)\| \leqslant T\|G\|^2\|B\|^2\|W^m-W\| \qquad s \text{ et } t \in I = [0,T]$$

En prenant alors le sup en s et t et en utilisant le lemme 2 :

$$\|\Lambda^m-\Lambda\| \leqslant T\|G\|^2\|B\|^2\|W^m-W\| \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

Définition 4

P_n étant toujours le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_n$, on définit la suite $\Lambda_n(t,s)$ par :

$$\Lambda_n(t,s) = P_n\Lambda(t,s)P_n \quad \text{et} \quad \Lambda_n(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

On note de même que rang $\Lambda_n = n$.

Lemme 4

$\Lambda_n(t,s)$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, uniformément en t et s, vers $\Lambda(t,s)$.

Démonstration

En posant $\Lambda_{ij} = <\Lambda e_i, e_j>$, on a :

$$[\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)]e_i = \sum_{j>n} <\Lambda(t,s)e_i,e_j>e_j = \sum_{j>n} \Lambda_{ij}(t,s)e_j$$

Or le carré de la norme de Hilbert-Schmidt :

$$\|\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)\|_1^2 = \sum_{i,j} |<[\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)]e_i,e_j>|^2 = \sum_{i>n}\sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2(t,s)$$

tend uniformément en t et s vers 0, puisque la série double $\sum_{i,j} \Lambda_{ij}^2(t,s)$ est convergente (lemme 1) et on a immédiatement :

$$\|\Lambda-\Lambda_n\| \leq \|\Lambda-\Lambda_n\|_1 \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad \underline{\text{unif. en t et s.}}$$

Définition de la suite double $\Lambda_n^m(t,s)$

On pose $\underline{\Lambda_n^m(t,s) = P_n\Lambda^m(t,s)P_n}$ donc $\Lambda_n^m(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

soit sous forme intégrale :

$$(5) \qquad \boxed{\Lambda_n^m(t,s) = P_nG(t)\Lambda_0G^*(s)P_n + \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} P_nG(t-p)B(p)W^mB^*(p)G^*(s-p)P_n d_p}$$

Remarque 1

a) $\Lambda_n^m(t,s)$ est de rang n et $\Lambda_n^m(t,s)_{/\mathcal{H}_n} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

b) Sous le signe intégral on a les transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_n \arrow[rr, "P_nGW^mB^*G^*/\mathcal{H}_n"] \arrow[dr, "W^mB^*G^*/\mathcal{H}_n"'] & & \mathcal{H}_n \\ & \mathcal{H}_m \arrow[ur, "P_nGB/\mathcal{H}_m"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 2

Comme W est diagonal sur la base $\{e_i\}_{i\in I}$ la définition de W^m entraîne :

$$W^m e_i = WP_me_i = P_mWe_i = P_mWP_me_i = \begin{cases} c_ie_i & \text{si } i\leq m \\ 0 & \text{si } i>m \end{cases}$$

et on pourra donc écrire l'équation (5) sous forme matricielle, en considérant les matrices finies associées aux opérateurs B, G, etc...

Si donc on pose :

$$d_{ik}(t,s) = <G(t)\Lambda_0G^*(s)e_i,e_k>$$

$$h_{ij}(t,p) = <G(t-p)B(p)e_i,e_j> = h^*_{ji}(t,p)$$

$$\Lambda^m_{ik}(t,s) = <\Lambda^m(t,s)e_i,e_k>$$

on a :

$$(6) \qquad \boxed{\underbrace{\Big(\Lambda^m_{ik}(t,s)\Big)}_{n\times n} = \underbrace{\Big(d_{ik}(t,s)\Big)}_{n\times n} + \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} \underbrace{\Big(h_{ij}(t,p)\Big)}_{n\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_m \end{pmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\Big(h^*_{jk}(s,p)\Big)}_{m\times n} dp}$$

Equation du type Kalman-Bucy (voir [2]).

Ou encore, par projection sur les axes :

$$(7) \qquad \boxed{\Lambda^m_{ik}(t,s) = d_{ik}(t,s) + \sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} h_{ij}(t,p)h^*_{jk}(s,p)dp \quad \begin{cases} i=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,n \end{cases}}$$

Lemme 5

La suite d'opérateurs Λ_n^m converge dans $L_\infty(I^2 ; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, uniformément en n, vers Λ_n quand $m \to +\infty$.

Démonstration

Comme $\begin{cases} \Lambda_n^m = P_n \Lambda^m P_n \\ \Lambda_n = P_n \Lambda P_n \end{cases}$ et que $\|P_n\| = 1 \quad \forall n \geq 1$

on a :

$$\|\Lambda_n^m - \Lambda_n\| = \|P_n(\Lambda^m - \Lambda)P_n\| \leq \|\Lambda^m - \Lambda\|.$$

Or d'après le lemme 3, $\|\Lambda^m - \Lambda\|$ tend vers 0 quand $m \to +\infty$, donc

$$\|\Lambda_n^m - \Lambda_n\| \leq \|\Lambda^m - \Lambda\| \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0 \text{ uniformément en } n.$$

Proposition 1

Avec les hypothèses de cette première partie : $\Lambda(t,s)$ est limite dans $L_\infty(I^2 ; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ des opérateurs $\Lambda_n^m(t,s)$ quand m et $n \to +\infty$.

Démonstration

On doit montrer que $\|\Lambda_n^m - \Lambda\| \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$

Or $\|\Lambda_n^m - \Lambda\| \leq \|\Lambda_n^m - \Lambda_n\| + \|\Lambda_n - \Lambda\|$

a) d'après le lemme 4

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

b) d'après le lemme 5

$$\|\Lambda_n^m - \Lambda_n\| \leq \|\Lambda^m - \Lambda\| \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

donc :

$$\|\Lambda_n^m - \Lambda\| \leq \|\Lambda^m - \Lambda\| + \|\Lambda_n - \Lambda\| \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$$

Proposition 2

a) Soit $\varepsilon_n^2(t,s) = \|\Lambda_n(t,s) - \Lambda(t,s)\|_1^2 = \sum_{i>n} \sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2(t,s)$.

Comme $\sum_{i>n} \sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2(t,s)$ tend vers 0, uniformément en t et s, quand $n \to +\infty$, on pose :

$$\varepsilon_n = \operatorname*{Sup}_{t,s \in I} \varepsilon_n(t,s) = \Big(\operatorname*{Sup}_{t,s \in I} \varepsilon_n^2(t,s)\Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

b) Soit $R(p) = \sum_{i>p} c_i$

c) On note $[\frac{p}{2}]$ la partie entière de $\frac{p}{2}$.

Alors une évaluation de l'approximation sera donnée par :

$$\boxed{\|\Lambda_n^m - \Lambda\| \leq T\|G\|^2\|B\|^2 \frac{2R([\frac{m+1}{2}])}{\sqrt{m+1}} + \varepsilon(n)}$$

Démonstration

On part de l'inégalité établie dans la proposition 1 :

$$\|\Lambda_n^m - \Lambda\| \leq \|\Lambda_n^m - \Lambda_n\| + \|\Lambda_n - \Lambda\| \leq \|\Lambda^m - \Lambda\| + \|\Lambda_n - \Lambda\|$$

a) D'après le lemme 4, on a :

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda\|_1 = \varepsilon(n)$$

b) Les valeurs propres C_n étant ordonnées par ordre décroissant, on a :

. $R(n) - R(2n) = c_{n+1} + \ldots + c_{2n} \geq n c_{2n}$

qui nous donne

$$c_{2n} \leq \frac{2\,R(n)}{2n}$$

. De même en écrivant :

$$R(n) - R(2n+1) = c_{n+1} + \ldots + c_{2n+1} \geq (n+1)\, c_{2n+1}$$

on obtient :

$$c_{2n+1} \leq \frac{2\,R(n)}{2n+2} \leq \frac{2\,R(n)}{2n+1}$$

En remarquant que $R(n) > R(n+1) \geq \ldots \geq R(n+p) > \ldots$, on a les majorations :

$$\sum_{k>m} c_k^2 \leq 4\, R^2([\tfrac{m+1}{2}]) \cdot \sum_{k>m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{4\, R^2([\frac{m+1}{2}])}{m+1}$$

la dernière égalité étant obtenue en majorant la série convergente $\sum\limits_{k>m} \frac{1}{k^2}$ par l'intégrale de Riemann.

En utilisant maintenant les résultats des lemmes 3 et 5, on a immédiatement le résultat.

III - DETERMINATION DE LA SUITE DOUBLE D'OPERATEURS $K_n^m(t,s)$ CONVERGEANT VERS $K(t,s)$

1 - *Opérateurs* $a_n(t)$, $a_n^*(t)$ *et matrices associées*

Définition

L'opérateur $a_n(\cdot) \in L_\infty(I\ ; \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$ (resp. $a_n^*(\cdot) \in L_\infty(I\ ; \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}))$) sera défini par $a_n(t) = a(t)P_n$ (resp. $a_n^*(t) = P_n a^*(t)$) où P_n est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_n$.

Si $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_q\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{K}$, les matrices associées à $a_n(t)$ et $a_n^*(t)$ s'écriront :

$$\begin{array}{cc} & \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ q\updownarrow & \begin{pmatrix} a_{ij}(t) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{avec } a_{ij}(t) = \begin{cases} <a(t)e_i, e'_j> & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ n\updownarrow & \begin{pmatrix} a_{ij}^*(t) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{avec } a_{ij}(t) = \begin{cases} <e_i, a\ (t)e'_j> & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

où $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est la base orthonormale définie dans la partie I.

2 - *Opérateur* $K_n^m(t,p)$

Définition

L'opérateur de rang fini $K_n^m(t,p)$ sera défini par l'équation intégrale

$$\boxed{K_n^m(t,p)b(p)Vb^*(p) + \int_0^t K_n^m(t,s)a_n(s)\Lambda_n^m(s,p)a_n^*(p)ds = \Lambda_n^m(t,p)a_n^*(p)} \qquad (8)$$

où $\Lambda_n^m(t,s)$ est donné par l'équation (5).

L'équation (8) est une équation de Bucy [2] qu'on sait résoudre [1] et [6]. En effet, $b(p)Vb^*(p)$ est inversible par hypothèse, (voir définition dans I-3), donc si on écrit

$$C(p) = [b(p)Vb^*(p)]^{-1} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} N_n^m(s,p) = a_n(s)\Lambda_n^m(s,p)a_n^*(p)C(p) \\ L_n^m(t,p) = \Lambda_n^m(t,p)a_n^*(p)C(p) \end{cases}$$

l'équation (8) se ramène à :

$$\boxed{K_n^m(t,p) + \int_0^t K_n^m(t,s)N_n^m(s,p)ds = L_n^m(t,p)} \qquad (9)$$

Soit encore sous forme matricielle, en posant :

$$K_{ik}^m(t,s) = <K_n^m(t,s)e'_i, e_k> \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} N_{ij}^m(s,p) = a_n(s)\ {}^m_n(s,p)a_n^*(p)C(p)e'_i, e'_j> \\ L_{ik}^m(t,p) = <\Lambda_n^m(t,p)a_n^*(p)C(p)e'_i, e_k> \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ n\updownarrow & \begin{pmatrix} K_{ik}^m(t,p) \end{pmatrix} \end{array} + \int_0^t \begin{array}{cc} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ n\updownarrow & \begin{pmatrix} K_{ij}^m(t,s) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ q\updownarrow & \begin{pmatrix} N_{jk}^m(s,p) \end{pmatrix} \end{array} dp = \begin{array}{cc} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ n\updownarrow & \begin{pmatrix} L_{ik}^m(t,p) \end{pmatrix} \end{array}} \qquad (10)$$

Théorème

En reprenant les hypothèses et notations de la partie II

1°) L'équation intégrale (8) a une solution unique $K_n^m(t,\cdot) \in L_\infty(I;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}_n))$ pour tout m et n fixés.

2°) De plus $K_n^m(\cdot,\cdot) \in L_2(I\times I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}_n))$ ($\Leftrightarrow$ de Hilbert-Schmidt)

3°) $K_n^m(t,p)$ tend vers $K(t,p)$ quand m et $n \to +\infty$, pour la norme $n(\cdot)$, une évaluation de la vitesse de convergence est donné par :

$$\boxed{\begin{gathered} n(K_n^m - K) \leqslant \frac{\|a\|}{d}\ \|b^{-1}\|^2 \left[1 + \frac{\|a\|^3}{d}\ \|b^{-1}\|^2 \cdot n(\Lambda)\right] \cdot n(\Lambda_n^m - \Lambda) \\ \text{où } d = \inf_{\|g\|=1} \langle\langle Vg,g \rangle\rangle \end{gathered}} \tag{11}$$

Remarque

Sous le signe intégral de l'équation (8), on a les transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "a^*_{n/\mathcal{H}_n}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "a_n\Lambda_n^m a_n^*"] & \mathcal{H}_n \arrow[d, "\Lambda^m_{n/\mathcal{H}_n}"] \\ \mathcal{K} & \mathcal{H}_n \arrow[l, "a_{n/\mathcal{H}_n}"'] \end{tikzcd}$$

et $\Lambda^m_{n/\mathcal{H}_n}$ est une suite d'opérateurs à valeurs dans $\mathcal{H}_n$ et une sous-suite double d'opérateurs à valeurs dans $\mathcal{C}$.

Démonstration du 1° et du 2°

1°) Pour t fixé, on pose :

$$F_n^m(p,t) = a_n(p)\Lambda_n^m(p,t) = a(p)P_n \cdot P_n\ \Lambda^m(p,t)P_n = a(p)P_n\Lambda^m(p,t)P_n = a(p)\Lambda_n^m(p,t)$$

- ESTIMATEUR DE FILTRAGE 9 -

D'après la partie II

a) $\lim F_n^m(p,t) = F(p,t) = a(p)\Lambda(p,t)$ existe (la limite est dans $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$)

et $F_n^m(\cdot,\cdot) \in L_\infty(I\times I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$.

b) Par suite, $F_n^m(p,t)$ est de Hilbert-Schmidt et $n(F_n^m) < +\infty$

Cette remarque est essentielle et va nous servir dans toute la suite.

2°) Soient Q_n^m et Q les opérateurs linéaires respectivement définis par :

$$f(\cdot) \in L_2(I\ ;\mathcal{K}) \begin{cases} Q_n^m f(q) = b(p)Vb^*(p)f(p) + \displaystyle\int_0^P a(p)\Lambda_n^m(p,s)a_n^* f(s)ds \\ Qf(p) = b(p)Vb^*(p)f(p) + \displaystyle\int_0^P a(p)\Lambda(p,s)a(s)f(s)ds \end{cases}$$

Comme $a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(s)$ et $a(p)\Lambda(p,s)a^*(s)$ sont de Hilbert-Schmidt, on en déduit que :

Q_n^m et $Q \in \mathcal{L}(L_2(I\ ;\mathcal{K}))$.

Remarque

On a :

$$\boxed{(Q_n^m \circ K_n^{m^*})(t,p) = F_n^m(p,t)}$$

Lemme 1

L'opérateur Q_n^m (resp. Q) est continu, inversible sur $L_2(I\ ;\mathcal{K})$ et

$$\|(Q_n^m)^{-1}\| < \frac{\|b^{-1}\|^2}{d} \qquad \left(\text{resp. } \|Q^{-1}\| < \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}\right)$$

avec :

$$d = \inf_{\|g\|=1} \langle\langle Vg,g \rangle\rangle$$

(donc $K_n^{m^*}(t,p) = (Q_n^m)^{-1} \circ F_n^m(p,t)$).

Démonstration

a) Q_n^m (resp. Q) est continu

Immédiat puisque $b(p)Vb^*(p)$ et $a_n(p)\Lambda_n^m(p,q)a_n^*(s)$ (resp. $a(p)\Lambda(p,s)a^*(s)$) sonr continus ($a_n(p)\Lambda_n^m(p,s)a_n^*(s)$ est construit de façon à ne pas altérer la continuité).

b) $(Q_n^m)^{-1}$ existe

Il suffit de montrer que Q_n^m est coercif pour le produit scalaire $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ dans $L_2(I;\mathcal{K})$ (lemme de Lax-Milgram) soit :

$$\langle\langle Q_n^m f,f\rangle\rangle = \int_0^T \langle b(p)Vb^*(p)f(p),f(p)\rangle dp + \int_0^T\langle\int_0^P a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(n)f(s)ds,f(p)\rangle dp$$

Or $\Lambda_n^m(p,s)$ déduit de l'opérateur $\Lambda(p,s)$ positif est positif puisque W^m est positif. Donc $\Lambda_n^m(p,s) = P_n\Lambda^m(p,s)P_n$ est positif et :

$$\int_0^T\langle\int_0^P a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(s)f(s)ds,f(p)\rangle dp = \int_0^T\langle\int_0^P \Lambda_n^m(p,s)a^*(s)f(s)ds,a^*(p)f(p)\rangle dp \geqslant 0$$

De plus, l'opérateur V est strictement positif, comme opérateur de covariance inversible dans K de dimension finie.

Il est donc licite de poser $d = \inf\limits_{\|g\|=1} \langle\langle Vg,g\rangle\rangle > 0$, qui est atteint sur la boule unité qui est compacte dans K, et on a pour tout $g \in L_2(I;\mathcal{K})$

$$d\|g\|^2 \leqslant \langle\langle Vg,g\rangle\rangle \quad \text{donc} \quad d\|g\| \leqslant \|Vg\| \quad \text{et}$$

$$(12) \quad \boxed{\int_0^T \langle b(p)Vb^*(p),f(p)\rangle dp = \int_0^T\langle Vb^*(p)f(p),b^*(p)f(p)\rangle dp \geqslant d\int_0^T \|b^*(p)f(p)\|^2 dp}$$

mais $b^*(p) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}^*)$ étant inversible, on a aussi :

$$1 = \|b^*(p)(b^*(p)^{-1}\| < \|b^*(p))^{-1}\| < \|b^*(p)\|.\|b^{-1}\|$$

puisque $\|b^{-1}\| = \|(b^{-1})^*\|$

d'où $\|b^*(p)\| > \dfrac{1}{\|b^{-1}\|}$

et l'inégalité (12) devient :

$$\int_0^T \langle b(p)Vb^*(p)f(p),f(p)\rangle dp \geqslant \frac{d}{\|b^{-1}\|^2}\int_0^T \|f(p)\|^2 dp = \frac{d}{\|b^{-1}\|^2}\|f\|^2$$

soit : $\langle\langle Q_n^m f,f\rangle\rangle \geqslant \dfrac{d}{\|b^{-1}\|^2}\|f\|^2$ $\quad \forall$ m et n

En particulier, le minorant $\dfrac{d}{\|b^{-1}\|^2}$ étant indépendant de m et n, on a aussi :

$$\langle\langle Qf,f\rangle\rangle \geqslant \frac{d}{\|b^{-1}\|^2}\|f\| \text{ pour tout } f \in L_2(I;\mathcal{K})$$

ce qui montre que Q_n^m est coercif, donc inversible et en appliquant le lemme de Max-Milgran, on a :

$$\|(Q_n^m)^{-1}\| \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d} \qquad (\text{resp. } \|Q^{-1}\| \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d})$$

Démonstration du 1°

Le lemme 1 assure l'existence et l'unicité de $K_n^m(t,p)$ et assure que $K_n^m(t,\cdot) \in L_\infty(I;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{X}))$.

Démonstration du 2°

On doit montrer que $n(K_n^m) < +\infty$.

D'après ce qui précède $K_n^{m*}(t,\cdot) \in L_2(I;\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{K}))$, $(Q_n^m)^{-1}$ agit sur la variable p et $\|(Q_n^m)^{-1}f\| \leqslant \|(Q_n^m)^{-1}\|\cdot\|f\|$. On a donc, en écrivant :

$$K_n^{m*}(t,p) = (Q_n^m)^{-1} \circ F_n^m(t,p)$$

$$\int_0^T \|K_n^{m*}(t,p)\|^2 dp = \int_0^T \|(Q_n^m)^{-1}\circ F_n^m(t,p)\|^2 dp \leqslant \|(Q_n^m)^{-1}\|^2\int_0^T\|F_n^m(t,p)\|^2 dp$$

pour tout t fixé.

Or l'application $t \to \|K_n^m(t,p)\| = \|(Q_n^m)^{-1}\circ F_n^m(t,p)\|$ est mesurable (puisque $(Q_n^m)^{-1}$ est continue et $t \to \|F_n^m(t,p)\|$ mesurable) et l'application

$$t \longrightarrow \left(\int_0^T \|F_n^m(t,p)\|^2 dp\right)^{1/2}$$

est de carré intégrable car F_n^m est de Hilbert-Schmidt.

Ce qui, avec l'inégalité du lemme 1 : $\|(Q_n^m)^{-1}\| \leq \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}$, nous donne :

$$\int_0^T\int_0^T \|K_n^{m*}(t,p)\|^2 dpdt \leq \frac{\|b^{-1}\|^4}{d}\int_0^T\int_0^T \|F_n^m(t,p)\|^2 dtdp = \frac{\|b^{-1}\|^4}{d}\, n(F_n^m)$$

soit puisque $\|K_n^{m*}(t,p)\| = \|K_n^m(t,p)\|$

$$(13) \qquad \boxed{n(K_n^m) = n[(Q_n^m)^{-1} \circ F_n^m] \leq \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}\, n(F_n^m) < +\infty}$$

La démonstration du 3°) nécessite un autre lemme :

Lemme 2

Quand m et n $\to +\infty$

a) Q est limite en norme de Q_n^m, dans $L_2(I\,;\mathcal{K})$, et :

$$\|Q-Q_n^m\| < \|a\|^2 . n(\Lambda_n^m-\Lambda)$$

b) Q^{-1} est limite en norme de $(Q_n^m)^{-1}$ dans $L_2(I\,;\mathcal{K})$ et :

$$\|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| < \|a\|^2 \frac{\|b^{-1}\|^4}{d^2}\cdot n(\Lambda_n^m-\Lambda)$$

Démonstration

a) Soit $f(\cdot) \in L_2(I\,;\mathcal{K})$, on a :

$$(Q_n^m-Q)f(p) = \int_0^p a(p)\,[\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)]\,a^*(s)ds$$

En prenant les normes

$$\|(Q_n^m-Q)f(p)\| \leq \|a\|^2\int_0^p \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|\cdot\|f(s)\|ds \leq \|a\|^2\int_0^T \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|\cdot\|f(s)\|ds$$

puis en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$\|(Q_n^m-Q)f(p)\|^2 \leq \|a\|^4 \int_0^T \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|^2 ds\cdot\int_0^T \|f(s)\|^2 ds$$

et en intégrant alors en p

$$\int_0^T \|(Q_n^m-Q)f(p)\|^2 dp \leq \|a\|^4 \int_0^T\int_0^T \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|^2 dpds\cdot\int_0^T \|f(s)\|^2 ds$$

on obtient :

$$\|(Q_n^m-Q)f\| \leq \|a\|^2 . n(\Lambda_n^m-\Lambda) . \|f\|$$

soit : $\quad \|Q_n^m-Q\| \leq \|a\|^2 . n(\Lambda_n^m-\Lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$

b) Considérons maintenant l'égalité

$$(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1} = (Q_n^m)^{-1}\cdot [Q-Q_n^m]\, Q^{-1}$$

qui nous donne immédiatement

$$\|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| \leq \|(Q_n^m)^{-1}\| . \|Q-Q_n^m\| . \|Q^{-1}\|$$

Or, en vertu du lemme 1

$$\|(Q_n^m)^{-1}\| \leq \frac{\|b^{-1}\|^2}{d} \qquad \text{et} \qquad \|Q^{-1}\| \leq \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}$$

et d'après le *a)* précédent $\|Q_n^m-Q\| \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$

donc : $\quad \|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| \leq \frac{\|b^{-1}\|^4}{d^2} . \|Q_n^m-Q\| \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$

Démonstration du 3°

Soit : $K_n^{m*}(t,p) - K^*(t,p) = (Q_n^m)^{-1} \circ F_n^m(t,p) - Q^{-1} \circ F(t,p)$

En posant $S_n^m = (Q_n^m)^{-1}$ et $S = Q^{-1}$, cette égalité s'écrit :

$$K_n^{m*}(t,p) - K^*(t,p) = S_n^m \circ [F_n^m(t,p)-F(t,p)] + [S_n^m-S] \circ F(t,p)$$

En utilisant alors le lemme 1, on obtient :

$$n(K_n^{m*}-K^*) \leq n[S_n^m(F_n^m-F)] + n[(S_n^m-S)F]$$

ce qui, avec les inégalités (13) précédemment établies, nous donne :

$$n(K_n^m-K) \leq \|S_n^m\| . n(F_n^m-F) + \|S_n^m-S\| . n(F)$$

Soit $n(K_n^m-K) \leq \frac{\|b^{-1}\|^2}{d} . n(F_n^m-F) + \|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| . n(F)$

ce qui avec le lemme 2 et $F(t,p) = a(t)\cdot\Lambda(t,p)$ nous donne :

$$n(K_n^m - K) \leq \frac{\|a\|}{d}\cdot\|b^{-1}\|^2 [1 + \frac{\|a\|^2}{d}\|b^{-1}\|^2\cdot n(\Lambda)]\cdot n(\Lambda_n^m - \Lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$$

et le c) est démontré.

Corollaire

Reprenons les hypothèses et notations de la proposition 2, partie II, et posons :

$$M = T\,\frac{\|a\|}{d}\,\|b^{-1}\|^2 [1 + \frac{\|a\|^2}{d}\,\|b^{-1}\|^2\, n(\Lambda)]$$

Une évaluation de l'approximation de K(t,p) sera donnée par :

$$\boxed{n(K_n^m - K) \leq MT\|G\|^2\|B\|^2\,\frac{2R([\frac{m+1}{2}])}{\sqrt{m+1}} + M.\varepsilon(n)}$$

IV - APPLICATION : EQUATION STOCHASTIQUE DE LA CHALEUR DANS LE CAS D'UNE TIGE DE LONGUEUR INFINIE

Cette quatrième partie est consacrée au calcul explicite des matrices associées aux opérateurs $N_n^m(t,p)$ et $L_n^m(t,p)$ (permettant de résoudre l'équation de Bucy [2]) déduits de l'application à une équation de chaleur stochastique, et comporte trois paragrahes :

A - Hypothèses et résultats.

B - Calcul des coefficients matriciels $\Lambda_{kl}^m(t,s)$, $N_{lj}^m(t,s)$ et $L_{ij}(t,p)$.

C - Evaluation des erreurs.

A - HYPOTHESES ET RESULTATS

On considère les équations :

$$(I)\quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)dt + dW(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

. $\frac{du}{dt}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ représente l'équation de propagation classique de la chaleur en fonction du temps t, au point x.

. On suppose que cette propagation est affectée d'une perturbation brownienne dépendant de x. Par exemple, si :
$s \longrightarrow W_s$ est un brownien à valeurs réelles
$(x,s) \longrightarrow f(x,s)$ est une fonction à valeurs réelles, de Hilbert-Schmidt en (x,s).
Alors $W(t,s) = \int_0^t f(x,s)dW_s$ est un brownien réel et $W(t,\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$.

. u(x,0) est la solution à l'origine, donnée.

. On prend $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ et on cherche la solution u_t de (I) telle que $u(\cdot,t) \in L_2(\mathbb{R})$.

On se ramène ainsi à la situation du §1, en assimilant la fonction u(x,t) et l'élément $u_t = u(\cdot,t)$ de $L_2(\mathbb{R})$.

. On modélisera la perturbation, par un mouvement brownien à valeurs dans $\mathcal{H}$, dont la covariance W admet pour vecteurs propres les fonctions d'Hermitte $f_n(x)$

$$f_n(x) = (\sqrt{\pi}\,2^n\,n!)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,P_n(x) \text{ où } P_n(x) = e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2}$$

et pour valeurs propres correspondantes : $c_n = \frac{1}{n^2}$.

Les $f_n(x)$ engendrent l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, muni de sa norme canonique et formant une base orthonormée dans cet espace.

L'équation (I) définit l'état réel du système. A cette équation est associée une équation d'observation (II).

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial z(x,t)}{dt}\,dt = a.u(x,t)dt + dV(t) & \text{où } z \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^q, \\ & \text{espace des observations.} \\ z(x,0) = 0 \text{ solution à l'origine} & \end{array}\right.$$

Par analogie avec le bruit blanc, on supposera que l'opérateur de covariance du brownien $v(t)$ (d'observation)

$V = I =$ identité dans $\mathbb{R}^q$

On prendra pour a un opérateur de discrétisation permettant de simplifier les calculs et observations, ici, par exemple :

$au(x,t) = (u(0,t), u(1,t), \ldots, u(q-1,t))$

Avec cette définition, l'intervalle de calcul sera $[0,q]$

. $\{e_i\}_{1<i<q}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^q$

. Il est bien connu que l'opérateur d'évolution $G(t)$ associé à l'opérateur $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans $L_2(\mathbb{R})$ est donné par :

$$(14)\qquad \boxed{[G(t)\cdot u_0](x) = \int_0^{+\infty} G(t,x-y)u_0(y)dy \quad \text{où} \quad G(t,x) = (\sqrt{4\pi t})^{-1}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

($G(t)$ est un opérateur de convolution en x).

Nous allons d'abord rappeler un lemme connu.

Lemme

Les fonctions d'Hermitte $f_n(x)$ sont solutions de l'équation intégrale linéaire :

$$i^n\sqrt{2\pi}\cdot f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(s)e^{isx}dx$$

<u>ou encore</u> : la transformée de Fourier de f_n est $i^n f_n$.

<u>Remarques</u>

1) $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$ donc $f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll}\text{paire} & \text{si } n=2p \\ \text{impaire} & \text{si } n=2p+1\end{array}\right.$

2) $G^*(t) = G(t)$

B - *CALCULS DES COEFFICIENTS MATRICIELS* $\Lambda^m_{kl}(t,s)$, $N^m_{lj}(t,s)$ *ET* $L_{ij}(t,p)$

a) Le calcul de $\Lambda^m_{kl}(t,s)$ nécessite préalablement le calcul de :

$d_{kl}(t,s) = \langle \Lambda \circ G(t)f_k, G(s)f_k \rangle$ et $h_{jk}(t,p) = \langle G(t-p)f_k, f_j \rangle$

(voir équation (7)).

. *Calcul de* $f_{kl}(t,s) = \langle \Lambda \circ G(t)f_k, f_l \rangle = E\{\langle u_0, G(t)f_k \rangle \langle u_0, G(s)f_l \rangle\}$

Pour tout ω fixé, considérons $\langle u_0, G(t)f_k \rangle = \langle G(t)u_0, f_k \rangle$, où u_0 est la solution à l'origine de l'équation I. Comme la transformée de Fourier préserve le produit scalaire dans $L_2(\mathbb{R})$ et que :

la transformée de Fourier $\tilde{u}_0$ de u_0 est $\tilde{u}_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)e^{ixy}dy$

" " " " $\widetilde{G(t)u_0}$ de $G(t)u_0$ est $[\widetilde{G(t)u_0}](x) = e^{-tx^2}\tilde{u}_0(x)$ (voir (14))

" " " " $\tilde{f}_k$ de f_k est $i^k f_k$ (cf. lemme précédent).

On a :

$$\langle G(t)u_0, f_k \rangle = \langle u_t, f_x \rangle = i^k \langle \tilde{u}_t, f_k \rangle$$

soit : $\quad \langle G(t)u_0, f_k \rangle = \quad i^k \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)e^{-tx^2}\,\tilde{u}_0(x)dx$

et : $\quad \langle G(t)u_0, f_k \rangle = \quad i^l \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_l(y)\, e^{-sy^2}\,\tilde{u}_0(y)dy$

d'où :

$$\boxed{d_{kl}(t,s) = i^{k+l}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)f_l(y)e^{-tx^2-sy^2}E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\}dxdy}$$

.. *Calcul de* $h_{jk}(t-p) = \langle G(t-p)f_k, f_j \rangle$

La transformée de Fourier $F_k(x,t-p)$ de $[G(t-p)\, f_k](x)$ étant :

$$F_k(x,t-p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(y) e^{-(t-p)y^2} e^{ixy} dy$$

on a :

$$h_{jk}(t-p) = \langle G(t-p)f_k, f_j \rangle = i^j \langle F_k(t-p), f_j \rangle = \frac{i^j}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(y) e^{-(t-p)y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x) e^{ixy} dx$$

qui nous donne, tous calculs faits :

$$\boxed{h_{kj}(t-p) = \begin{cases} 0 \text{ si } k+j \text{ impair} \\ (-1)^j \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) e^{-(t-p)x} dx \quad \text{si } k+j \text{ pair} \end{cases}}$$

ce qui nous permet d'exprimer $\Lambda_{kl}^m(t,s)$ (cf. équation (7)) :

$$\Lambda_{kl}^m(t,s) = i^{k+l} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) e^{-tx^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(y) e^{-ty^2} E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\} dy$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2} \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} dp \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f_j(x) f_j(y) f_l(y) e^{-(t-p)x^2-(s-p)y^2} dx dy$$

Si $t>s$ par exemple, le second membre se ramène à une forme plus simple et :

$$\Lambda_{kl}^m(t,s) = i^{k+l} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) e^{-tx} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(y) e^{-sy^2} E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\} dy$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f_l(y) f_j(x) f_j(y) \left[e^{-(t-s)x^2} - e^{-tx^2-sy^2}\right] \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

qui détermine Λ_{kl}^m pour tout m, k et l, et qu'on peut calculer (voir [4]).

b) L'expression précédente nous fournit immédiatement $N_{lj}^m(t,s)$ et $L_{ij}^m(t,p)$. En effet, comme $a_{kl} = \langle af_k, e_l \rangle_{\mathbb{R}^q} = f_k(l) = a_{lk}^*$, où $f_k(l)$ est la fonction d'Hermitte prise au point x=l, on a :

$$N_{lj}^m(t,s) = \langle a\Lambda_n^m(t,s)a^* e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^q} = \sum_{k,r=1}^{n} \Lambda_{rk}^m(t,s) f_k(j) f_r(l)$$

$$L_{ij}^m(t,p) = \langle \Lambda_n^m(t,p)a^* e_i, f_j \rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{jk}^m(t,p) f_k(i)$$

Ces expressions étant connues, la résolution de

$$K_{ij}^m(t,p) + \sum_{l=1}^{q} \int_0^t K_{il}^m(t,s) N_{lj}^m(s,p) ds = L_{ij}^m(t,p) \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right.$$

en découle.

C - EVALUATION DES ERREURS

Remarque

La fonction $E\{\tilde{u}_0(x)\cdot\tilde{u}_0(y)\}$ et les fonctions $f_n(x) = (\sqrt{\pi}2^n\, n!)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ étant connues, le calcul numérique des $\Lambda_{kl}^m(t,s)$ s'effectue par la méthode d'approximation quadratique de Gauss-Hermite [4] et cette partie est seulement consacrée à expliciter une évaluation de l'erreur sur $K_n^m(t,p)$.

On ne diminue pas la généralité en prenant $I = [0,1]$, donc $T=1$.

a) *calcul de* $M = \frac{\|a\|}{d} \|b^{-1}\|^2 [1 + \frac{\|a\|^2}{d} \|b^{-1}\|^2 . \|\Lambda\|]$

. Supposons pour simplifier les calculs que $E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\} = \mathrm{Cte} = E$. De laborieux calculs permettent alors de montrer les inégalités

$$1) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f_j(x) e^{-(t-p)x^2} dx \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } k+j \text{ impair} \\ \leq \left(\frac{t-p}{1+t-p}\right)^{\frac{k+j}{2}} \frac{\sqrt{k!\, j!}}{(k+j)^{\frac{k+j}{2}}} \leq e^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{j}{2}} & \text{si } k+j \text{ pair} \end{cases}$$

2) $$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) e^{-tx^2} dx\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2^{2p}(2p)!}} \left(\dfrac{2t-1}{2t+1}\right)^p \leq \dfrac{1}{2^p} & \text{si } n=2p \end{cases}$$

Dans ces conditions, une majoration de $\Lambda_{k,l}(t,s)$ s'écrit :

$$|\Lambda_{2k,2l}(t,s)| \leq \frac{E}{2^{k+1}} + \sum_{j\geq 1} \frac{e^{-k-l-2j}}{j^2} \leq \frac{E}{2^{k+1}} + \frac{e^{-k-l}}{e^2-1}$$

d'où :

$$|\Lambda_{2k,2l}(t,s)|^2 \leq \frac{2\,E^2}{2^{2k+2l}} + \frac{2}{(e^2-1)^2}\, e^{-2k-2l}$$

et :

$$n(\Lambda) \leq \sqrt{\frac{2E^2}{9} + \frac{2}{(e^2-1)^4}} \leq \sqrt{\frac{2}{9}\left(E^2 + \frac{1}{144}\right)}$$

Comme les $f_n(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, il existe aussi i_0 et j_0 tels que :

$$\|a\| = \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq k}} |a_{ij}| = \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}} |f_i(j)| = |f_{i_0}(j_0)|$$

et on a donc :

$$M \leq |f_{i_0}(j_0)| \left\{1 + |f_{i_0}(j_0)|^3 \left[\sqrt{\frac{2}{9}\left(E^2 + \frac{1}{144}\right)} + 1\right\}\right.$$

b) Majoration de $n(K_n^m - K)$

. Le reste $\varepsilon^2(n) = \sum_{i>n} \sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2$ se déduit de la majoration de $|\Lambda_{2k,2l}(t,s)|^2$, soit :

$$\varepsilon(n) \leq \sqrt{\frac{2}{9}\left(\frac{E^2}{2^n} + \frac{e^{-n}}{144}\right)}$$

.. Et enfin si $R([\frac{m+1}{2}])$ est le reste $\sum_{n\geq[\frac{m+1}{2}]} \frac{1}{k^2}$, en majorant par l'intégrale de Riemann, on a :

$$R\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right) \leq \frac{2}{m}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\boxed{n(K_n^m - K) \leq \frac{4M}{m\sqrt{m+1}} + M\sqrt{\frac{2}{9}\left(\frac{E^2}{2^n} + \frac{e^{-n}}{144}\right)}}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASTROM Karl Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press.

[2] BUCY Filtering for Stochastic Process with application to Guidance.

[3] CURTAIN a) Stochastic Differential Equation in Hilbert Space.
Journal of Differential Equation 1974

b) Infinite Dimensional Filtering
1975 - Maxwell Institute - University of Warwick.

[4] KRILOW Approximate Calculation of Integrals.

[5] NEVEU Processus Aléatoires Gaussiens. Cours 3e cycle 1966 Paris.

[6] YOSIDA Equations Différentielles et Intégrales. Dunod.

-=-=-=-=-