PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. MÉTIVIER
J. PELLAUMAIL

Notions de base sur l'intégrale stochastique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 1, p. 1-41
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A1_0>

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - UNIVERSITÉ ET I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT de RECHERCHE en INFORMATIQUE et SYSTÈMES ALÉATOIRES

I.R.I.S.A.

Avenue du Général Leclerc - 35031 Rennes Cedex - B.P. 25 A - Tél. 36.48.15

Rapport N° 61

* NOTIONS DE BASE SUR L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

par

M. METIVIER et J. PELLAUMAIL

Sommaire

Ce rapport constitue un cours de base approfondi sur l'intégrale stochastique. Il peut être lu sans aucune connaissance préalable en théorie des processus. On y prouve la plupart des théorèmes fondamentaux "difficiles" dans ce domaine : construction de l'intégrale stochastique, formule de Ito pour un processus non continu à valeurs hilbertiennes, existence de modification "cadlag", conditions pour avoir une mesure de Doléans, existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques (cas continu "avec mémoire"), décomposition de Doob-Meyer, inégalités de Burkholder, construction vectorielle de l'intégrale stochastique. Les divers paragraphes peuvent souvent être lus indépendamment les uns des autres. Ils sont tous, dans des mesures diverses, originaux, soit par les méthodes de démonstrations proposées, soit par la généralité du cadre considéré. En particulier, la méthode de construction de l'intégrale stochastique, et les démonstrations des propriétés (y compris celles des inégalités pour les martingales) sont très différentes de celles de Meyer-Probabilité X.

* *Pour toute correspondance ou demande de tirés à part, écrire à :*

M. METIVIER Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, Route de Saclay 91130 PALAISEAU

ou J. PELLAUMAIL I.N.S.A. B.P. 14 A 35031 RENNES CEDEX

INTRODUCTION

-:-

Ce cours sur l'intégrale stochastique peut être lu sans aucune connaissance préalable dans ce domaine et, sauf au paragraphe H, n'utilise aucun résultat non prouvé auparavant : le lecteur a seulement besoin de connaître les résultats classiques de la théorie de la mesure et de l'intégration, notamment les propriétés des espaces L_2 , des espérances conditionnelles $E(X|\mathcal{G})$ (cf. par exemple le chapitre IV de [Met-1]), et divers résultats liés aux familles équi-intégrables de variables aléatoires (cf. le chapitre VI de [Met-1]). Toutefois, la compréhension du lecteur sera facilitée si celui-ci est déjà un peu familiarisé avec la notion de processus (cf. le chapitre VII de [Met-1]).

Nous avons choisi une présentation qui permet, dans une large mesure, de lire les divers paragraphes de ce cours indépendamment les uns des autres. Ceci conduit à quelques répétitions de détails. Plus précisément l'organigramme est le suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r] & C \arrow[r] & E \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & D \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & F \\
 & H & & G
\end{tikzcd}
$$

c'est-à-dire que, par exemple, pour lire le paragraphe F, il suffit d'avoir lu le paragraphe A et une partie du paragraphe D auparavant.

Une table des matières détaillée est donnée à la fin du cours (avant la bibliographie).

Ce cours, assez dense, ne traite que certains théorèmes fondamentaux et "difficiles" : de nombreux résultats classiques devraient donc être traités en exercice : propriétés du mouvement brownien, formule d'intégration par parties, théorème de Girsanov, etc... Bien entendu, les résultats associés ne sont pas utilisés dans le présent cours.

Le paragraphe A donne quelques notions élémentaires de théorie générale des processus (base de processus, temps d'arrêt, tribu des prévisibles etc...).

L'intégrale stochastique est construite, dans un cadre très général, au paragraphe B.

La formule de Ito est prouvée au paragraphe C dans le cas hilbertien non continu et est explicitée sous la forme usuelle pour un processus à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Les notions de martingales et de mesures de Doléans sont définies et étudiées au paragraphe D.

Au paragraphe E, on montre l'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques, dans le cas lipschitzien, par la méthode des approximations successives, les coefficients dépendant de tout le passé du processus.

Au paragraphe F, on montre l'existence d'un processus prévisible ("naturel" au sens de Meyer) associé à une mesure de Doléans. On en déduit que toute martingale est la somme d'un processus à variation bornée et d'une martingale de carré intégrable. On étudie aussi l'intégrale stochastique d'un processus optionnel par rapport à un processus continu.

Au paragraphe G, on prouve trois inégalités pour une martingale réelle ; deux de ces inégalités sont dues à Burkholder ; la troisième semble originale.

Enfin, la "construction vectorielle" de l'intégrale stochastique est expliquée au paragraphe H.

A - NOTIONS ELEMENTAIRES DE THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

-:-

A.1 - BASE DE PROCESSUS

Etant donné une partie T de $\mathbb{R}$ *(l'axe des réels) on dira que* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *(resp.* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}))$ *est une base de processus (resp. une base probabilisée de processus) si :*

$(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace probabilisable (resp.* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un espace probabilisé) et*

$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

Dans la suite, T sera toujours soit l'intervalle fermé $[0,1]$, soit l'ensemble $\bar{N}$ des entiers naturels auquel on a rajouté le point à l'infini, soit l'intervalle fermé $[0,\infty]$.

On posera $T' = T\setminus\{0\}$ et $\Omega' = \Omega \times T'$.

Dans la pratique, Ω est l'espace de toutes les réalisations possibles du hasard (avec évolution au cours du temps T), et $\mathcal{F}_t$ représente la tribu des évènements antérieurs à l'instant t.

Dans toute la suite de ce paragraphe A, on suppose qu'on s'est donné une telle base probabilisée de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$.

On dira que la *base* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *est complète* si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est complet et si chaque tribu $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{F}$.

Pour tout élément t de T, on pose $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ et on dit que la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout élément t de T.

Si H est un espace de Banach (muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{H}$), on notera $L_0^H(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ l'adhérence de l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-étagées à valeurs dans H pour la distance de la convergence en probabilité.

A.2 - TEMPS D'ARRET ET NOTATION $\mathcal{F}_u$

Soit u une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$*, à valeurs dans T (muni de la tribu des boréliens). On dit que u est un temps d'arrêt (ou temps optionnel) si on a : pour tout élément t de T, l'ensemble* $\{\omega : u(\omega) \leq t\}$ *appartient à la tribu* $\mathcal{F}_t$.

On vérifie facilement que la borne supérieure et la borne inférieure de deux temps d'arrêt est encore un temps d'arrêt.

Si u est un temps d'arrêt, on notera $\mathcal{F}_u$ *la tribu définie par :*

$$\mathcal{F}_u = \{ A : A \in \mathcal{F} \text{ et, } \forall t \in T,\ (A \cap [u \leq t]) \in \mathcal{F}_t \}$$

Si s appartient à T et si u = s (pour tout ω) on note que $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_s$ (il n'y a donc pas d'ambiguïté dans les notations).

A.3 - INTERVALLE STOCHASTIQUE

Etant donné deux temps d'arrêt u et v, on notera $]u,v]$ *l'ensemble des éléments* (ω,t) *de* $\Omega \times T$ *tels que* $u(\omega) < t \leq v(\omega)$ *; on définit de même* $[u,v[$*, etc... ; de tels ensembles sont appelés intervalles stochastiques.*

Nous effectuons ainsi un abus de notation qui ne nous semble pas présenter d'inconvénients pour le lecteur averti ; il faut donc bien noter que, si u = s et v = t sont deux temps d'arrêt constants, l'ensemble $]u,v] =]s,t]$ peut, suivant les cas, indiquer une partie de $\Omega \times T$ (intervalle stochastique) ou une partie de T.

A.4 - PROCESSUS

L'usage a attribué au mot processus plusieurs sens mathématiques différents.

Si $(H, \mathcal{H})$ *est un espace mesurable, nous dirons que X est un processus à valeurs dans H si X est une application définie sur* $\Omega \times T$*, à valeurs dans H. Par contre, on dira que X est un processus défini à une modification près à valeurs dans H si* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une application de T dans* $L_0^H(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Si X et X' sont deux processus, on dit que X' est une modification de X si, pour tout élément t de T, $X_t = X'_t$ P-p.s.

Si H est un espace topologique, on dira qu'un processus réel X à valeurs dans H est *cadlag* (resp. *caglad*) si, pour tout élément ω de Ω, l'application $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ est une fonction <u>c</u>ontinue <u>à</u> <u>d</u>roite (resp. <u>c</u>ontinue <u>à</u> <u>g</u>auche) (en tant que fonction définie sur T et à valeurs dans H) qui admet en tout point une <u>l</u>imite <u>à</u> <u>g</u>auche (resp. <u>à</u> <u>d</u>roite). Si X est cadlag, on note $(X_{t-})_{t\in T} = (Y_t)_{t\in T}$ le processus caglad tel que, pour tout rationnel s, $X_s = Y_s$ P-p.s.

On dira aussi que X est continu (resp. cadlag, etc...) *par trajectoires* si, pour tout élément ω de Ω, l'application $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ est continue (resp. cadlag, etc...)

On dit que deux processus X et X' sont *indistinguables* si $P(\{\omega : \exists t, X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)\}) = 0$. En fait, pour l'essentiel, les processus considérés dans la suite le seront à une indistinguabilité près.

A.5 - TRIBU DES PREVISIBLES ; NOTATIONS $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$

On notera $\mathcal{R}$ la famille des parties A de $\Omega' = \Omega \times T'$ de la forme $A = F \times]s,t]$ où F appartient à $\mathcal{F}_s$. On notera $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{R}$. On notera $\mathcal{P}$ la tribu engendrée par $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{A}$) ; cette tribu est appelée la *tribu des prévisibles*. On dira qu'un processus à valeurs dans l'espace mesurable $(H, \mathcal{H})$ est *prévisible* si ce processus est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles (en tant qu'application de Ω' dans H).

A.6 - DECOMPOSITION D'UN ELEMENT DE $\mathcal{A}$ (lemme)

Si A appartient à $\mathcal{A}$, il existe une famille finie $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ qui constitue une partition de A.

Preuve

Considérons a priori la famille $\mathcal{A}'$ des parties de Ω' satisfaisant à la condition du lemme, c'est-à-dire qui admettent une partition finie constituée d'éléments de $\mathcal{R}$. Pour prouver que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, il suffit de prouver que $\mathcal{A}'$ constitue une algèbre. Pour celà, il suffit de vérifier que, si A et B appartiennent à $\mathcal{A}'$, il en est de même de $A \setminus B$. Supposons donc que $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ où $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{R}$. Définissons C_i par récurrence en posant $C_1 = A$ et $C_{i+1} = C_i \setminus B_i$. On a $C_{n+1} = A \setminus B$. Pour prouver que C_{n+1} appartient à $\mathcal{A}'$ on raisonne alors par récurrence sur i ; il suffit donc de démontrer que, si D est un élément de $\mathcal{A}'$, alors $D \setminus B_i$ est aussi un élément de $\mathcal{A}'$; or, il suffit de vérifier ceci si D est un élément de $\mathcal{R}$ ce qui est immédiat en considérant les différents cas de figures.

A.7 - LEMME

L'algèbre $\mathcal{A}$ est identique à l'algèbre $\mathcal{A}'$ engendrée par les intervalles stochastiques $]o,u]$ quand u parcourt l'ensemble des temps d'arrêt étagés (c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs).

Preuve

1°/ Prouvons d'abord que $\mathcal{A}$ est contenue dans $\mathcal{A}'$. Pour celà, il suffit de prouver que, si $B = (F \times]s,t])$ appartient à $\mathcal{R}$, alors B appartient aussi à $\mathcal{A}'$; mais ceci se déduit de ce que $B = (]o,v]) \setminus (]o,u])$ si $v(\omega) = t$ $(\forall \omega)$ et $u(\omega) = t$ pour $\omega \in (\Omega \setminus F)$ et $u(\omega) = s$ pour $\omega \in F$.

2°/ Réciproquement, prouvons que $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{A}'$. Soit u un temps d'arrêt étagé. On a alors une suite croissante $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de T et une suite associée $(F(k))_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telles que :

a) pour tout k, F(k) appartient à $\mathcal{F}_{t_k}$

b) $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de Ω

c) $u = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot 1_{F(k)}$

Si on pose $B_k = (F(k) \times]t(k),1])$, pour tout k, B_k appartient à $\mathcal{R}$ et $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de $]u,1]$ ce qui prouve que $]u,1]$, et donc aussi $]o,u]$, appartient à $\mathcal{A}$, c.q.f.d.

A.8 - PROCESSUS ADAPTE

On dit qu'un processus X (resp. un processus X défini à une modification près) est *adapté* si, pour tout élément t de T, la variable aléatoire $X_t(.)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Soit u une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans T (muni de sa tribu des boréliens) ; on vérifie immédiatement, à partir des définitions, que *u est un temps d'arrêt si et seulement si le processus $X = 1_{[o,u[}$ est adapté.*

A.9 - EXEMPLE DE TEMPS D'ARRET (proposition)

Soit X un processus, à valeurs dans l'espace de Banach H, adapté continu à droite ou continu à gauche par trajectoires. Soient u un temps d'arrêt et a une constante. Pour tout élément ω de Ω, on pose :

$$v(\omega) = \inf.\left\{ t \ : \ t \in T, t \geq u(\omega), \|X_t(\omega) - X_{u(\omega)}(\omega)\| > a \right\}$$

Alors v est un temps d'arrêt relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$.

Preuve

Il suffit d'étudier le cas $T = [0,1]$. Dans ce cas, soient Q' l'ensemble des rationnels contenus dans T et $(S(n))_{n>o}$ une suite de parties finies de Q' croissant vers Q'. On pose :

$v'(\omega)=\inf.\{t\in Q', t \geq u(\omega), ||X_t(\omega)-X_{u(\omega)}(\omega)|| > a\}$

$v_n(\omega)=\inf.\{t\in S(n), t \geq u(\omega), ||X_t(\omega)-X_{u(\omega)}(\omega)|| > a\}$

(avec, évidemment, la convention $v'(\omega)= 1$ ou $v_n(\omega) = 1$ si les ensembles ci-dessus sont vides).

On vérifie immédiatement que, pour tout élément ω de Ω, $v'(\omega) = v(\omega)$ et $v'(\omega) = \inf. v_n(\omega)$

Or, on vérifie immédiatement que v_n est un temps d'arrêt. Il reste donc à prouver que la limite v d'une suite décroissante $(v(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt est un temps d'arrêt pour la famille de tribus $\mathcal{F}_{t+}$.

Soit t un élément de T ; on pose
$A = \{\omega: v(\omega) > t\}$ et $A(n,k) = \{\omega: v_n(\omega) > t + \frac{1}{k}\}$.
D'une part, $A = \bigcup_{k>o} [\bigcap_{n>o} A(n,k)]$. D'autre part, $\bigcap_{n>o} A(n,k)$ appartient à $\mathcal{F}_{t+1/k}$ donc A appartient à $\mathcal{F}_{t+1/k}$ quel que soit k, donc A appartient à $\mathcal{F}_{t+}$ ce qui prouve que v est un temps d'arrêt relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$.

A.10 - <u>PROCESSUS ARRETE ET LOCALISATION</u> (définition)

Soit u une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et à valeurs dans T. Si X est un processus, soit Z le processus défini par :

$Z_t(\omega) = X_t(\omega)$ si $u(\omega) \geq t$

$Z_t(\omega) = X_{u(\omega)}(\omega)$ si $u(\omega) \leq t$

On dit que le processus Z est le processus X arrêté à la variable aléatoire u.

Si u est un temps d'arrêt et si X est adapté, on vérifie facilement que Z est aussi adapté. Etant donné un processus X, on introduit souvent une suite croissante $(u(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt telle que

$\lim_{n\to\infty}. P[u(n) < 1] = 0$ et on considère la suite des processus X arrêtés à $u(n)$. *Cette technique est appelée localisation.* Dans ce cas, si, pour tout n, le processus X arrêté à $u(n)$ satisfait à une propriété (de continuité, de bornitude, etc...) on dit que X satisfait *localement* à cette propriété.

A.11 - <u>TRIBU DES PREVISIBLES ASSOCIEE A $(\mathcal{F}_{t+})$</u> (proposition)

La tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles associée à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est la même que la tribu des prévisibles $\mathcal{P}^+$ associée à la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$.

<u>Preuve</u>

On a évidemment $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}^+$; réciproquement, si $H \in \mathcal{F}_{s+}$, $H\times]s,t] = \bigcup_{k>o} H\times]s+\frac{1}{k}, t]$ avec $(H\times]s+\frac{1}{k}, t])$ élément de $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}^+\subset\mathcal{P}$.

A.12 - <u>CONTINUITE A GAUCHE ET PREVISIBILITE</u> (Théorème)

Soit H un espace de Banach ; soit X un processus à valeurs dans H adapté et caglad ; X est alors prévisible. Notamment, si u est un temps d'arrêt, le processus réel $1_{]o,u]}$ est prévisible.

<u>Preuve</u>

1°/ Compte-tenu de A.11, on peut remplacer la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ par la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$, c'est-à-dire supposer la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ continue à droite, ce que nous ferons désormais. De plus, on va supposer $T = [0,1]$.

2°/ Considérons d'abord le cas où X est de la forme $X = Y.1_{]u,v]}$ où u et v sont deux temps d'arrêt et où Y est $\mathcal{F}_{u+}$-mesurable. Pour tout $n>o$, on pose :

$$u(n) = \sum_{k>o} (k+2).2^{-n}.\ 1_{[k.2^{-n}\leq u<(k+1).2^{-n}]}$$

et $$v(n) = \sum_{k>o} (k+2).2^{-n}.\ 1_{[k.2^{-n}\leq v<(k+1).2^{-n}]}$$

Puisque $u(n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} u$ et $v(n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} v$, on a :

$$X = \lim_{n\to\infty} Y.1_{]u(n),v(n)]}$$ mais, pour tout n,

$Y.1_{]u(n),v(n)]}$ est prévisible (ceci se vérifie comme en A.7) donc X est prévisible.

3°/ Considérons le cas général. Pour tout $n > o$, soit $(u(n,k))_{k>o}$ la suite croissante de temps d'arrêt définie par récurrence par : $u(n,o) = 0$.
$u(n,k+1) = \inf.\left\{t:t\geq u(n,k), ||X_t-X_{u(n,k)+}|| > \frac{1}{n}\right\}$
et on pose

$$X^n = \sum_{k>o} X_{u(n,k)+}\ 1_{]u(n,k),u(n,k+1)]}$$

D'une part, X^n est un processus bien défini puisque $\lim_{k\to\infty}. u(n,k)(\omega) = 1$ (puisque X est caglad). D'autre part X^n est prévisible d'après le 2°).

Enfin, la suite $(X^n)_{n>o}$ converge uniformément vers X donc X est prévisible.

B - INTEGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS REGIONAL

-:-

B.1 - LE PROBLEME DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Dans tout ce paragraphe B, on se donne une base probabilisée de processus $(\Omega, \mathcal{G}, P, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ et trois espaces de Banach H, J et K et une application bilinéaire de $H \times J$ dans K qui, à (y,x) élément de $H \times J$, associe $y.x$ élément de K. Les normes dans H, J et K seront notées $||.||_H$, $||.||_J$ et $||.||_K$ respectivement.

Etant donné un processus Y (en général prévisible), à valeurs dans H et un processus X défini à une modification près et à valeurs dans J, le problème est :

1°/ *de définir, pour tout élément t de T, la variable aléatoire*

$$Z_t = \int_0^t Y_s.dX_s = \int 1_{]0,t]}(s).Y_s.dX_s$$

2°/ *d'étudier le processus $(Z_t)_{t \in T}$ ainsi défini à une modification près.*

En fait, on considère essentiellement des processus qui admettent une modification cadlag (définie à l'indistinguabilité près) que l'on va encore noter X. Une idée naturelle est, alors, de définir l'intégrale stochastique "par trajectoires", c'est-à-dire de poser, pour tout élément ω de Ω,

$$Z_t(\omega) = \int_0^t Y_t(\omega).dX_t(\omega)$$

Malheureusement, pour une classe indispensable de processus, dont le mouvement brownien réel, $dX_t(\omega)$ ne définit pas une mesure (la fonction $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ n'est pas à variation bornée). On est donc obligé de construire l'intégrale stochastique d'une façon plus globale.

B.2 - CAS DES PROCESSUS $\mathcal{A}$-ETAGES ; NOTATION $\mathcal{E}(H)$

On notera $\mathcal{E}(H)$ l'ensemble des processus $\mathcal{A}$-étages à valeurs dans H, c'est-à-dire l'ensemble des processus Y tels que $Y = \sum_{i \in I} a_i.1_{A(i)}$ où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de H et où $(A(i))_{i \in I}$ est une famille finie associée d'éléments de $\mathcal{A}$.

Compte-tenu de A.6, on peut supposer, dans l'écriture précédente, que les ensembles $(A(i))_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et appartiennent à $\mathcal{R}$.

Dans ce cas, l'intégrale stochastique peut être définie "par trajectoires" , le processus $(Z_t)_{t \in T}$ défini par $Z_t = \int_0^t Y.dX$ étant défini à une modification près, s'il en est de même de X.

L'intégrale stochastique $\int_0^1 Y.dX$ est alors l'application linéaire définie sur $\mathcal{E}(H)$, à valeurs dans $L_0^K(\Omega, \mathcal{G}, P)$, telle que, pour tout élément $A = F \times]s,t]$ de $\mathcal{R}$ et tout élément a de H, si $Y = a.1_A$ on a :

$$\int Y.dX = \int a.1_A.dX = 1_F.a.(X_t - X_s)$$

Le problème est d'étendre cette intégrale à une classe plus vaste que la classe des processus $\mathcal{A}$-étagés.

Pour alléger les notations, on posera

$$\int Y\ dX = \int_{\Omega'} Y.dX\ .$$

De même, si Y est un processus prévisible et si a est une mesure définie sur la tribu des prévisibles on notera $\int Y.da$ au lieu de $\int_{\Omega'} Y.da$.

B.3 - UNE PREMIERE EXTENSION

Considérons un processus X à valeurs dans J, défini à une modification près satisfaisant à la condition suivante :

(i) il existe une mesure positive a telle que, pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans H, on ait :

$$E\left(\left|\left|\int Y.dX\right|\right|_K^2\right) \leq \int ||Y||_H^2\ da$$

Dans ce cas, l'application $Y \rightsquigarrow \int Y\ dX$ définie sur $\mathcal{E}(H)$ et à valeurs dans $L_2^K(\Omega, \mathcal{G}, P)$ est continue si on considère $\mathcal{E}(H)$ comme un sous-espace de $L_2^H(\Omega', \mathcal{P}, a)$; cette application se prolonge donc, de façon unique, en une application linéaire continue définie sur $L_2^H(\Omega', \mathcal{P}, a)$ et à valeurs dans $L_2^K(\Omega, \mathcal{G}, P)$. L'image, par cette application, de Y sera notée $\int Y\ dX$ et sera appelée l'intégrale stochastique de Y par rapport à X.

B.4 - PROCESSUS REGIONAL

On dira qu'un processus X à valeurs dans J, défini à une modification près, est un processus H-J-K-régional si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément F de $\mathcal{G}$ tel que $P(F) \geq 1-\varepsilon$ et il existe une mesure positive a définie et finie sur la tribu des prévisibles tels que, pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans H, on ait :

$$E(1_F.\int ||Y.dX||_K^2) = (||1_F.\int Y.dX||_{L_2^K(\Omega,\mathcal{G},P)})^2 \leq \int_{\Omega'} ||Y||_H^2.da$$

Notons que, pour la construction de l'intégrale stochastique donnée ci-après, il suffit de supposer que les mesures positives a sont σ-finies. Dans ce cas, on dira que X est σ-régional. Notons aussi que, si X est régional relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, il est régional relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$ (cf. A.11)

B.5 - PROPOSITION

Un processus X à valeurs dans J et défini à une modification près est un processus H-J-K-régional si et seulement si il existe une mesure positive a, une suite croissante de constantes $(C_n)_{n>o}$ et une suite croissante $(F(n))_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que :

(i) pour tout n, $P[F(n)] \geq 1-2^{-n}$

(ii) pour tout n et pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans H,

$$E(1_{F(n)}.\,||\int Y.dX||_K^2\,) \leq C_n \int_{\Omega'} ||Y||_H^2\,.da$$

Preuve

Les conditions ci-dessus impliquent évidemment les conditions données en B.4. Réciproquement, soit X un processus régional au sens indiqué en B.4. Pour tout n, soient a_n une mesure positive et G(n) un élément de $\mathcal{F}$ tels que $P[G(n)] \geq 1-2^{-(n+1)}$ et, pour tout élément Y de $\mathcal{E}$(H), on ait :

$$E(1_{G(n)}.\,||\int Y.dX||_K^2\,) \leq \int||Y||_H^2.\,da_n$$

Soient $F(n) = \bigcap_{k\geq n} G(k)$, $C_n = 2^n.\,a_n(\Omega')$ et a la mesure positive définie par

$$a(.) = \sum_{n>o} 2^{-n}\,.\,\frac{1}{a_n(\Omega')}\,.\,a_n(.)$$

On vérifie immédiatement que a, $(F(n))_{n>o}$ et $(C_n)_{n>o}$ satisfont aux conditions B.5 (i) et (ii).

B.6 - REMARQUE (régionalisation)

La proposition B.5 revient à dire que le processus X est régional si, pour tout n, le processus X "arrêté" à la variable aléatoire $u(n) = 1_{F(n)}$ (qui, en général, n'est pas un temps d'arrêt) satisfait à la condition B.3 (i) (pour la mesure $C_n.a(.)$).

On introduit ainsi une technique consistant à "arrêter" par une variable aléatoire 1_F (avec P(F) aussi voisin de 1 que l'on veut) que l'on appellera "régionalisation" ; cette technique est évidemment plus générale que celle de localisation (cf. A.10).

B.7 - CONSTRUCTION DE LA VARIABLE ALEATOIRE $\int Y.dX$

Soit X un processus satisfaisant aux conditions B.5 (i) et (ii) (c'est-à-dire un processus H-J-K-régional). Soit Y un processus qui appartient à $L_2^H(\Omega',\mathcal{P},a)$. Pour tout n, on définit la variable aléatoire $Z_n = 1_{F(n)}.\int Y.dX$ comme au paragraphe B.3 ; Pour $m \geq n$, on a $1_{F(n)}.Z_m \underset{P\text{-p.s.}}{=} 1_{F(n)}.Z_n \underset{P\text{-p.s.}}{=} Z_n$

(ceci est vrai pour $Y = h.1_A$ avec $A \in \mathcal{R}$ et $h \in H$, donc ceci est vrai pour tout élément Y de $L_2^H(\Omega',\mathcal{P},a)$ par linéarité et densité). La variable aléatoire $Z = \int Y.dX$ est alors définie comme la variable aléatoire, unique P-p.s., telle que, pour tout n, $Z_n \underset{P\text{-p.s.}}{=} Z.1_{F(n)}$. Cette variable aléatoire Z ne dépend pas du triplet $(a,(F(n))_{n>o}\,,\,(K_n)_{n>o})$ (ceci est vrai pour $X = h.1_A$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $h \in H$ et donc dans le cas général par linéarité et densité). Cette variable aléatoire, qui ne dépend donc que de X et de Y est appelée l'intégrale stochastique de Y par rapport à X et sera notée $\int Y.dX$.

B.8 - PROCESSUS INTEGRALE STOCHASTIQUE

Soit X un processus qui satisfait aux conditions B.5 (i) et (ii). Soit Y un processus qui appartient à $L^2(\Omega',\mathcal{P},a)$. Pour tout élément t de T, on peut poser

$$Z_t = \int Y.1_{(\Omega\times]o,t])}.dX$$

Le processus $Z = (Z_t)_{t\in T}$ est un processus défini à une modification près qui est le processus intégrale stochastique de Y par rapport à X.

Notons que Z est $\mathbb{R}$-K-K régional.

B.9 - THEOREME DE CONVERGENCE DOMINEE

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses et des notations indiquées en B.7 ci-dessus. Supposons, de plus, que la base $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ est complète, que X possède une modification cadlag adaptée que l'on notera encore X ; soit $(Y_n)_{n>o}$ une suite de processus $\mathcal{A}$-étagés telle que, pour tout n,

$$\int||Y-Y_n||_H^2\,.\,da \leq 8^{-n}.\,(C_n)^{-1}$$

Pour tout n, soit Z^n le processus cadlag défini par $Z^n(t) = \int Y_n.1_{(\Omega\times]o,t])}.dX$ (Z^n peut être choisi cadlag puisque Y_n est $\mathcal{A}$-étagé). Pour tout entier n soit u(n) le temps d'arrêt défini par :

$$u(n) = \inf.\left\{t\;:\;||Z^n(t) - Z^{n+1}(t)||_K > 2^{-n}\right\}$$

(avec la convention, $u(n)(\omega) = 1$ si l'ensemble ci-dessus est vide, et si $T = [0,1]$).

Soit $G(n) = \{\omega : [u(n)](\omega) < 1\}$

Pour tout temps d'arrêt étagé v, on a :

$$E\left[1_{F(n)}.||Z_v^n - Z_v^{n+1}||_K^2\right] = E\left[1_{F(n)}.||\int 1_{]o,v]}.(Y^n - Y^{n+1}).dX||^2\right]$$

$$\leqslant C_n . \int 1_{]o,v]} . ||Y^n - Y^{n+1}||_H^2 . da$$

$$\leqslant 8^{-n}$$

On vérifie que la même propriété subsiste si v est un temps d'arrêt quelconque (puisqu'un tel temps d'arrêt est limite d'une suite décroissante de temps d'arrêt étagés) et donc, notamment, si $v = u(n)$; dans ce cas, on a :

$$P[G(n)] \leqslant P[\Omega \setminus F(n)] + P[F(n) \cap G(n)]$$

$$\leqslant 2^{-n} + P\left(\left[||Z_v^n - Z_v^{n+1}|| > 2^{-n}\right] \cap F(n)\right)$$

$$\leqslant 2^{-n} + 4^n . E\left[||Z_v^n - Z_v^{n+1}||^2 . 1_{F(n)}\right]$$

$$\leqslant 2 . 2^{-n}$$

Si on pose $G = \bigcap_{n>o} \{\bigcup_{j\geqslant n} G(j)\}$, on a donc $P(G) = 0$ et, si $\omega \notin G$, la suite de fonctions réelles $t \rightsquigarrow Z_t^n(\omega)$ est uniformément de Cauchy, donc elle converge vers une fonction $\hat{Z}_t(\omega)$.

Le processus $\hat{Z}$ ainsi défini à l'indistinguabilité près est une modification cadlag du processus Z. On a donc montré que :

Si X possède une modification cadlag, adaptée, il en est de même de Z.

En fait, on a beaucoup plus que cela ; soit X un processus cadlag qui satisfait aux conditions B.5 (i) et (ii) ; soit $(Y_n)_{n>o}$ est une suite de processus prévisibles réels qui converge vers Y au sens de la convergence dominée ; quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que l'on a, pour tout n,

$$\int ||Y - Y_n||_H^2 . da \leqslant \frac{1}{2} \; 8^{-n} . (C_n)^{-1} .$$

Pour tout n, soit Z_n une modification cadlag du processus intégrale stochastique $\int Y_n.dX$; le même raisonnement que ci-dessus montre que :

la suite de processus $(Z_n)_{n>o}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers une modification cadlag du processus $Z = \int Y.dX$.

On voit donc que l'intégrale stochastique $Y \rightsquigarrow \int Y.dX$ satisfait à "un théorème de convergence dominée" et que, quitte à considérer une sous-suite on a alors une convergence uniforme par trajectoires P-p.s.

Ceci montre, par exemple, que si X admet une modification continue (resp. prévisible), il en est de même de Z. De même, si u est une variable aléatoire, ceci montre que le processus intégrale stochastique de Y par rapport au processus X arrêté à u est le processus Z arrêté à u où Z est le processus intégrale stochastique de Y par rapport à X. Toutes ces propriétés sont évidentes si Y est $\mathcal{A}$-étagé ; elles sont encore vraies dans le cas général compte-tenu du théorème de convergence dominée indiqué précédemment.

B.10 - CAS D'UN PROCESSUS A VARIATION BORNEE

Soient H, J, K trois espaces de Banach. Soit une application bilinéaire continue de $(H \times J)$ dans K qui, à (y,x) élément de $(H \times J)$ associe $y.x$ élément de K. Soit X un processus à valeurs dans H, continu à droite, à variation forte bornée par trajectoires. Alors X est H-J-K-régional.

Preuve

Soit (A) le processus réel croissant continu à droite variation totale de X : c'est-à-dire que, pour tout élément (t,ω) de $(T \times \Omega)$, on a :

$$A_t(\omega) = \text{Sup} \sum_{k=1}^{n-1} ||X_{t(k+1)} - X_{t(k)}||$$

cette borne supérieure étant prise pour toutes les familles finies croissantes $(t(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de T telles que $t(1) = 0$ et $t(n) = t$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n > o$ tel que, si $F = [A_1 \leqslant n]$, $P(F) \geqslant 1-\varepsilon$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$, on pose :

$$a(B) = \int_\Omega 1_F \{\int_T 1_B . dA\,(\omega)\} \quad P(d\omega)$$

Cette fonction a est finie (puisque A est bornée par n si ω appartient à F) et σ-additive (Fubini).

Soit Y un processus $\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans J. Si ω appartient à F, on a :

$$||(\int Y.dX)\;(\omega)||^2 \leqslant A_1(\omega) . \int ||Y_t||^2 . dA_t(\omega)$$

(inégalité de Schwarz)

on en déduit :

$$E(||1_F . (\int Y.dX)||^2) \leqslant n . \int ||Y||_J^2 . da$$

donc X est H-J-K-régional.

B.11 - PROPOSITION : changement de probabilité

On considère la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ (dans laquelle on ne suppose pas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ complet). Soit $(P_n)_{n>o}$ une suite de probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$, ($X$ est donc une fonction à valeurs dans J définie sur $\Omega \times T$), qui est H-J-K-régional à la fois pour la probabilité P et pour chaque probabilité P_n. Soit Y un processus prévisible à valeurs dans H, dont la norme est uniformément bornée et qui est stochastiquement intégrable par rapport à X à la fois pour P et pour chaque probabilité P_n. On pose $Q = \sum_{n>o} 2^{-n}. P_n$. Alors, il existe une variable aléatoire Z qui appartient à $L_o^K(\Omega, \mathcal{F}, P+Q)$ et qui est P-p.s. égale à $\int Y\, dX$ pour P et P_n-p.s. égale à $\int Y\, dX$ pour chaque probabilité P_n.

Preuve

Soient a une mesure positive finie sur $\mathcal{P}$, $(F(n))_{n>o}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ et $(C_n)_{n>o}$ une suite croissante de constantes positives telles que, pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé,

$$E[1_{F(n)} \cdot ||\int Y\, dX||_K^2] \leq C_n \int ||Y^2||_H \, da$$

et $P\,[F(n)] \geq 1-2^{-n}$.

Soient, de même, b_k, $F(n,k)_{n>o}$ et $(C(n,k)_{n>o}$ associées à X pour chaque probabilité P_k.

On pose $b = \sum_{n>o} 2^{-n} . b_n(.) \dfrac{1}{b_n(\Omega')}$

Considérons d'abord le cas où Y est uniformément borné par la constante d. Soit $(Y_n)_{n>o}$ une suite de processus $\mathcal{A}$-étagés uniformément bornés par d, suite qui converge (a+b)-p.s. vers Y. Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \int Y_n\, dX$. La suite $(Z_n)_{n>o}$ est de Cauchy dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, Q)$; elle est donc de Cauchy dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P+Q)$ d'où le résultat.

C - FORMULE DE ITO

-:-

C.1 - REMARQUES PRELIMINAIRES

Pour alléger la présentation, on va établir la formule de Ito pour un processus à valeurs dans un *espace de Hilbert séparable H.* Notons, toutefois, que la démonstration proposée reste valable pour un processus à valeurs dans un espace de Banach (cf. [Gr P]). Le lecteur pourra facilement se convaincre que le fait de supposer H de dimension finie n'aurait pas apporté de simplification notable dans les démonstrations. Le fait de supposer que H est séparable facilite l'exposition et ne constitue pas une restriction.

Dans toute la suite $(h_n)_{n>o}$ désignera une base orthonormale de H.

De plus, comme dans les paragraphes précédents, on se donne une base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$. Dans ce paragraphe, on supposera que cette base est complète et que $T = [0,1]$.

C.2 - PRODUIT TENSORIEL ET NORME DE HILBERT-SCHMIDT

On notera $H \otimes H$ le produit tensoriel de H par lui-même. Si x et y sont deux éléments de H, on notera $x \otimes y$ le produit tensoriel de x et de y. Si x = y, cet élément de $H \otimes H$ sera noté $x^{\otimes 2}$.

Soit $(x_i, y_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $H \times H$ et soit $z = \sum_{i\in I} x_i \otimes y_i$ l'élément de $H \otimes H$ associé. Soit $(h_n)_{n>o}$ une base orthonormale de H. Soient $x_i = \sum_{n>o} x_{i,n} . h_n$ et $y_i = \sum_{n>o} y_{i,n} . h_n$ les décompositions de x_i et y_i sur cette base. Considérons, de même, $z' = \sum_{i\in I} x'_i \otimes y'_i$, $x'_i = \sum_{n>o} x'_{i,n} . h_n$ et $y'_i = \sum_{n>o} y'_{i,n} . h_n$.

Si on pose :

$$\langle z,z'\rangle = \sum_{i\in I, j\in I} \left\{ \sum_{n>o} x_{i,n} . x'_{i,n} . y_{j,n} . y'_{j,n} \right\}$$

ceci définit un produit scalaire sur $H \otimes H$. On notera $H \hat{\otimes} H$ le complété de $H \otimes H$ pour la topologie associée à ce produit scalaire ; la norme sur $H \hat{\otimes} H$ associé à ce produit scalaire est appelée la norme de Hilbert-Schmidt et sera notée $||.||_{H.S.}$. Muni du produit scalaire prolongeant le produit scalaire défini plus haut, $H \hat{\otimes} H$ est un espace de Hilbert séparable. Notons enfin que, si x et y sont deux éléments de H, $||x \otimes y||_{H.S} \leq ||x||_H . ||y||_H$.

Toutes les propriétés qui précèdent sont classiques et faciles à vérifier. Rappelons enfin que, dans le cas où H est de dimension finie n, $H \otimes H$ est isomorphe à l'espace des matrices $n \times n$; pour la commodité du lecteur, nous expliciterons la formule de Ito, dans ce cas, en C.10.

C.3 - PROCESSUS PARFAITEMENT REGIONAL (Définition)

Soit X un processus à valeurs dans l'espace de Hilbert H. On dira que X est parfaitement régional si la condition suivante est réalisée : pour tout couple (J,K) d'espaces de Hilbert et pour toute application bilinéaire continue de $(J \times H)$ dans K, X est J-H-K-régional (cf. B.4).

L'ensemble des processus à valeurs dans H parfaitement régionaux constitue évidemment un espace vectoriel.

On a vu (B.10) qu'un processus à variation bornée est parfaitement régional. On verra ultérieurement qu'une martingale de carré intégrable (D.10) ou une martingale réelle (F.14) est un processus parfaitement régional.

C.4 - VARIATION QUADRATIQUE REGIONALEMENT FINIE

Soit X un processus cadlag à valeurs dans l'espace de Hilbert H. On dira que X admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne si, pour tout $\varepsilon > o$, il existe une constante $d(\varepsilon)$ et un élément $F(\varepsilon)$ de $\mathcal{F}$ tels que $P[F(\varepsilon)] \geq 1-\varepsilon$ et tels que, pour toute famille finie croissante $(t(k))_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de T, on a :

$$E(1_{F(\varepsilon)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} ||X_{t(k+1)} - X_{t(k)}||_H^2) \leq d(\varepsilon)$$

Notons que, dans [Gr P], l'hypothèse "X admet localement une variation quadratique finie en moyenne" peut évidemment être remplacée par l'hypothèse "X admet régionalement une variation quadratique finie en moyenne".

L'ensemble des processus cadlag à valeurs dans H qui satisfont à cette condition est un espace vectoriel puisque, pour tout couple de variables aléatoires f et g à valeurs dans H, on a :

$$E(||f+g||^2) \leq 2.E(||f||^2) + 2\,E(||g||^2)$$

On verra ultérieurement que, si X est une martingale de carré intégrable ou une martingale réelle, alors X satisfait à la condition ci-dessus. On a aussi le résultat suivant :

C.5 - VARIATION FORTE ET VARIATION QUADRATIQUE (Proposition)

Soit X un processus cadlag à variation forte bornée (par trajectoires), alors X admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne.

Preuve

Il suffit de noter que, par trajectoires, la variation quadratique est majorée par le carré de la variation totale.

C.6 - DIFFERENTIELLE (Conventions)

Soient H et K deux espaces de Hilbert. Soit f une fonction, définie sur H et à valeurs dans K, deux fois différentiable. On notera f' la différentielle première et f" la différentielle seconde de f : cette différentielle seconde sera considérée comme une application linéaire définie sur $H \hat{\otimes} H$ (à valeurs dans K) ; si x est un élément de H et y un élément de $H \otimes H$, on notera $[f''(x)]\,(y)$ la valeur de la différentielle seconde f" prise au point x et appliquée au vecteur y.

C.7 - FORMULE DE ITO (Enoncé)

Soit X un processus cadlag, adapté à la base complète $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ et à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable H. On suppose que X est parfaitement régional (C.3) et que X admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne (C.4).

Soit f une fonction deux fois différentiable, définie sur H et à valeurs dans l'espace de Hilbert K, dont la différentielle seconde f" est uniformément continue sur les parties bornées de H.

Soient S, Q, V, C, les processus définis par :

$$S(t) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})^{\otimes 2}$$

$$Q(t) = \sum_{s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})]$$

$$V(t) = X_t^{\otimes 2} - X_o^{\otimes 2} - \int_{]o,t]} (X_{s-} \otimes dX_s + dX_s \otimes X_{s-})$$

$$C(t) = V(t) - S(t)$$

où $\int_{]o,t]} (X_{s-} \times dX_s + dX_s \times X_{s-})$ est une intégrale stochastique et où S, V et C sont à valeurs dans $H \hat{\otimes} H$.

Alors les processus S, Q, V et C sont des processus bien définis, adaptés, cadlag , à variation *forte bornée par trajectoires et C est à trajectoires continues. ($H \hat{\otimes} H$ étant muni de la norme de Hilbert-Schmidt).*

De plus, on a :

$$f(X_t) - f(X_o) = Q(t) + \int_{]o,t]} f'(X_{s-}).dX_s$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{s \leq t} f''(X_{s-})(X_s - X_{s-})^{\otimes 2} + \frac{1}{2} \int_{]o,t]} f''(X_{s-}).dV_s$$

$$= Q(t) + \int_{]o,t]} f'(X_{s-}).dX_s + \frac{1}{2} \int_{]o,t]} f''(X_s).dS_s$$

Dans ces formules :

- *les sommations sont définies par trajectoires*
- *l'intégrale $\int_{]o,t]} f'(X_{s-}).dX_s$ est une intégrale stochastique*
- *les intégrales $\int_{]o,t]} f''(X_{s-}).dV_s$ et $\int_{]o,t]} f''(X_{s-}).dS_s$ peuvent être déterminées par trajectoires*
- *l'égalité est une égalité de processus définis à l'indistinguabilité près.*

Preuve

Nous allons décomposer la preuve en deux parties : d'une part l'étude des processus S, Q, V et C (C.8) ; d'autre part, la formule de Ito proprement dite (C.9). De plus (cf. A.11 et la remarque à la fin de B.4) on supposera la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ continue à droite.

C.8 - ETUDE DES PROCESSUS INTERVENANT DANS LA FORMULE DE ITO

On prouve la première partie de C.7.

1°/ Régionalisation

Etant donné une constante positive a, soit v le temps d'arrêt défini par :

$$v = \inf. \{ t : ||X_t|| > a \}$$

Si on pose $F_a = \{ \omega : v(\omega) = 1 \} \cap \{ \omega : ||X_1(\omega)|| \leq a \}$ on a $F_n \downarrow \emptyset$ (puisque X est cadlag), donc, par régionalisation, (en arrêtant le processus X à la variable aléatoire 1_F) on peut se ramener au cas où $||X||$ est uniformément bornée par a, ce que nous supposerons désormais.

De même, on peut supposer qu'il existe une constante b telle que, pour toute famille finie croissante $(t(k))_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de T, on ait :

$$E \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} ||X_{t(k+1)} - X_{t(k)}||^2 \right\} \leq b$$

2°/ S et Q sont bien définis

Pour tout n, soit :

$$D_n = \sum_{k=0}^{2^n - 1} ||X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}}||^2$$

Soit $D = \lim.\inf._{n \to \infty} D_n$; puisque $E(D_n) \leq b$, $E(D) \leq b$, donc D est finie-P-p.s. Or, on a : $\sum_{s \in T} ||X_s - X_{s-}||^2 \leq D$ (par trajectoires)

(rappelons que $||x^{\otimes 2}||_{H.S.} \leq ||x||_H^2$)

De plus, d'après la formule de Taylor, pour tout t et tout ω , on a :

$$f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-}).(X_t - X_{t-}) =$$

$$\left\{ \int_0^1 \frac{1-s}{2} f''\left[X_{t-} + s(X_t - X_{t-})\right] ds \right\} (X_t - X_{t-})^{\otimes 2}$$

Puisque f" est bornée sur le domaine $||x|| \leq a$, il existe une constante c telle que $||x|| \leq a$ implique $||f''(x)|| \leq c$; les membres de l'égalité ci-dessus sont donc majorés en norme par

$$\frac{1}{2} c. \ ||X_t - X_{t-}||^2$$

ce qui montre que Q est bien défini (par trajectoires).

Les processus S et Q sont évidemment, à variation forte bornée par trajectoires, cadlag et donc définis à l'indistinguabilité près.

3°/ Les processus S et Q sont adaptés

Nous ferons la démonstration pour S ; la démonstration pour Q est analogue. Soit t un élément fixé de T. Soit $(d(n))_{n>o}$ une suite décroissante de réels positifs avec $\lim_{n \to \infty} d(n) = 0$.

Pour tout n > o, soit u(n,k) la suite croissante de temps d'arrêt définis par récurrence par : u(n,1)=0

$$u(n,k+1) = \inf. \left\{ s : s \leq t, s \geq u(n,k), ||X_s - X_{u(n,k)}|| > \frac{1}{n} \right\}$$

(avec la convention s = t si l'ensemble considéré est vide). Puisque X est cadlag, pour tout n,

$$[u(n,k) < 1] \downarrow_{k \to \infty} \emptyset$$

Pour tout n, soit Z_n la variable aléatoire définie par :

$$Z_n = \sum_{k>o} (X_{u(n,k)} - X_{u(n,k)-})^{\otimes 2}$$

variable aléatoire bien définie comme au 2°/.

Le 2°/ montre que la suite $(Z_n)_{n>o}$ converge P-p.s. vers une variable aléatoire Z (telle que $||Z||\leq D$) ; ceci montre que Z est un élément de $L_o^{H\hat{\otimes}H}(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$. Or $Z = S(t)$ P-p.s. donc S est un processus adapté.

4°/ Le processus V est la "variation quadratique" du processus X

Soit $(d(n))_{n>o}$ une suite décroissante de réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} . d(n) = 0$.

Pour tout $n\geq o$, soit $(v(n,k))_{k>o}$ la suite de temps d'arrêt définis par récurrence par :

$v(n,o) = o$

$v(n,k+1) = \inf\{s : s\geq v(n,k), ||X_s - X_{v(n,k)}|| > d(n)\}$

(si l'ensemble ci-dessus est vide, on prend $v(n,k+1)=1$).

On a $\lim_{k\to\infty} P[v(n,k) < 1] = 0$

Pour tout n, soit V^n le processus cadlag défini, pour tout couple (t,ω) appartenant à $[v(n,k),v(n,k+1)[$, par :

$$V_t^n = \sum_{j=0}^{k-1} (X_{v(n,j+1)} - X_{v(n,j)})^{\otimes 2}$$

et $$V_1^n = \sum_{j=0}^{\infty} (X_{v(n,j+1)} - X_{v(n,j)})^{\otimes 2}$$

Notons d'abord que, si Y est un processus prévisible uniformément borné à valeurs dans H, l'intégrale stochastique $Y \int_{]o,t]} (Y_s \otimes dX_s + dX_s \otimes Y_s)$ est bien définie puisque X est fortement régional (donc V est bien défini à l'indistinguabilité près et cadlag) et satisfait au théorème de convergence indiquée à la fin de B.9.

On a :

$$V^n(1) = \sum_{k=o}^{\infty} (X_{v(n,k+1)}^{\otimes 2} - X_{v(n,k)}^{\otimes 2})$$
$$- \sum_{k=o}^{\infty} (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)}) \otimes X_{v(n,k)}$$
$$- \sum_{k=o}^{\infty} X_{v(n,k)} \otimes (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)})$$

(la première somme étant évidemment égale à $X_1^{\otimes 2} - X_o^{\otimes 2}$).

Soit $Z^n(t)$ le processus prévisible défini, pour tout couple (t,ω) appartenant à $]v(n,k),v(n,k+1)]$, par $Z^n(t) = X_{v(n,k)}$.

Posons :

$$\bar{V}^n(t) = X_t^{\otimes 2} - X_o^{\otimes 2} - \int_{]o,t]} [Z^n(u) \otimes dX_u + dX_u \otimes Z^n(u)]$$

On a $V^n(1) = \bar{V}^n(1)$ et, si $t \in [v(n,k),v(n,k+1)[$,

$$V^n(t) = \bar{V}^n(t) - (X_t - X_{v(n,k)})^{\otimes 2}$$

Si la suite de constantes $(d(n))_{n>o}$ décroît suffisamment vite vers zéro, la suite de processus $(\bar{V}^n)_{n>o}$ converge donc, sauf sur un ensemble de mesure nulle, uniformément par trajectoires vers le processus (cf. la fin de B.9) ; il en est donc de même de la suite $(V^n)_{n>o}$.

5°/ Le processus V est à variation forte bornée

D'après le 4°/, pour tout $\varepsilon > o$, il existe un élément F de tel que $P(F) \geq 1-\varepsilon$ et un entier n tels que, si $\omega \in F$, pour tout t et tout $i \geq n$, $||V_t^i(\omega) - V_t(\omega)|| \leq d(i)$. Il suffit de prouver que, en restriction à F, V est à variation forte bornée en moyenne pour montrer que V est à variation forte bornée par trajectoires.

Soit $\{t(j)\}_{1\leq j\leq k}$ une famille finie croissante d'éléments de T. On a, pour $i \geq n$:

$$E\left\{1_F . \sum_{j=1}^{k-1} ||V_{t(j+1)} - V_{t(j)}||\right\} \leq 2k.d(i) + E\left\{\sum_{j=1}^{k-1} ||V^i_{t(j+1)} - V^i_{t(j)}||\right\}$$

$$\leq 2k\ d(i) + b$$

(rappelons que, cf le 1°/, b est l'espérance de la variation quadratique de X).

Pour k fixé, d(i) étant aussi petit que l'on veut, on voit que, en restriction à F, l'espérance de la variation totale de V est majorée par b.

6°/ Le processus C est à trajectoires continues

On choisit la suite $(d(n))_{n>o}$ telle que, pour tout n, $d(n) \leq (\frac{1}{n})^2$ et on construit la famille de temps d'arrêt $v(n,k)$ comme au 4°/.

Pour tout couple d'entiers (n,k), soit :

$$A(n,k) = \left\{ \omega : ||X_{v(n,k)} - X_{v(n,k)-}|| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$B(n,k) = \Omega \setminus A(n,k)$$

$$E_{n,k} = X_{v(n,k)} . 1_{B(n,k)} + X_{v(n,k)-} . 1_{A(n,k)}$$

Pour tout $n>o$, soit $S^n(t)$ (resp. $W^n(t)$) le processus défini, pour $(t,)$ élément de $[v(n,k), v(n,k+1)[$, par :

$$S^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{v(n,j)} - E_{n,j})^{\otimes 2} = \sum_{j=1}^{k} (X_{v(n,j)} - X_{v(n,j)-})^{\otimes 2} \cdot 1_{A(n,j)}$$

$$W^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{v(n,j)} - X_{v(n,j-1)})^{\otimes 2} \cdot 1_{A(n,j)}$$

La variation totale du processus $(S-S^n)$ converge vers zéro (pour tout t et tout ω sauf sur un ensemble F appartenant à $\mathcal{G}$ et tel que $P(F) = O$).

De plus, sur $A(n,j)$,

$$\|X_{v(n,j-1)} - X_{v(n,j)}\| \leq (\tfrac{1}{n})^2 \quad \text{et}$$

$$\|X_{v(n,j)} - X_{v(n,j)-}\| \geq \frac{1}{n}$$

donc :

$$\|W^n(t) - S^n(t)\| \leq \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|X_{v(n,j)} - X_{v(n,j)-}\|^2 \cdot 1_{A(n,j)} \right\}$$

ce qui montre que la suite de processus $(W^n)_{n>o}$ converge vers le processus S, quand n tend vers l'infini, uniformément par trajectoires.

Pour tout n, soit C^n le processus défini, pour (t,ω) élément de $[v(n,k), v(n,k+1)[$, par :

$$C^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{v(n,j)} - X_{v(n,j-1)})^{\otimes 2} \cdot 1_{B(n,j)} = V^n(t) - W^n(t)$$

Si la suite $(d(n))_{n>o}$ converge suffisamment vite vers zéro, ce qui précède et le 4°/ montrent que, sur F, la suite C^n converge, uniformément par trajectoires, vers $V(t)-S(t) = C(t)$; or, les sauts de C^n sont d'amplitude inférieure à $\frac{1}{n}$; le processus limite C est donc à trajectoires continues.

C.9 - PREUVE DE LA FORMULE DE ITO

On va donc prouver la deuxième partie de C.7.

1°/ Toutes les intégrales et tous les processus considérés sont bien définis à l'indistinguabilité près ; de plus, ces processus sont cadlag donc, pour prouver le théorème, il suffit de prouver que les divers membres de chaque égalité sont égaux P-p.s. pour chaque valeur de t (t fixé). Il suffit de prouver cela pour $t = 1$. On se donne une suite décroissante $(d(n))_{n>o}$ de réels positifs qui converge "suffisamment vite" vers zéro (cette notion étant précisée par la suite).

On définit la famille de temps d'arrêt $v(n,k)$ comme en C.7.4°/ et les ensembles $A(n,k)$ et $B(n,k)$ comme en C.7.6°/

2°/ Pour tout n, on a :

$$f(X_1) - f(X_o) = \sum_{k>o} [f(X_{v(n,k+1)}) - f(X_{v(n,k)})] \cdot [1_{A(n,k+1)} + 1_{B(n,k+1)}]$$

D'après la formule de Taylor, pour tout n,k, et ω, il existe $R_{n,k}(\omega)$, cette quantité pouvent être majorée comme indiqué au 5°/ ci-après et étant telle que :

$$f(X_{v(n,k+1)}) - f(X_{v(n,k)}) = f'(X_{v(n,k)})[X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)}]$$

$$+ \frac{1}{2} f''(X_{v(n,k)}) (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)})^{\otimes 2}$$

$$+ R_{n,k}(\omega)$$

(en fait, l'identité qui précède ne sera utilisée que sur $B(n,k+1)$.

On a donc : $f(X_1) - f(X_o) = \sum_{k>o} \{ \sum_{i=1}^{5} a^i_{n,k} \}$ avec

$$a^1_{n,k} = f'(X_{v(n,k)}) \cdot (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)})$$

$$a^2_{n,k} = -\frac{1}{2} f'' X_{v(n,k)} \cdot (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)})^{\otimes 2} 1_{A(n,k+1)}$$

$$a^3_{n,k} = R_{n,k} \cdot 1_{B(n,k+1)}$$

$$a^4_{n,k} = [-f'(X_{v(n,k)})(X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)}) + f(X_{v(n,k+1)}) - f(X_{v(n,k)})] \cdot 1_{A(n,k+1)}$$

$$a^5_{n,k} = \frac{1}{2} f''(X_{v(n,k)}) \cdot (X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)})^{\otimes 2}$$

On se propose, maintenant, de montrer que $\sum_k a^i_{n,k}$ converge P-p.s. pour $1 \leq i \leq 5$, quand n tend vers l'infini.

3°/ On a $\sum_{k>o} a^1_{n,k} = \int_{]o,1]} f'[Z^n(t)] \, dX_t$ où Z^n est le processus défini à la fin de C.8.4°/

Si la suite $(d(n))_{n>o}$ converge suffisamment vite vers zéro,

$\int_{]o,1]} f'[Z^n(t)] \, dX_t$ converge P-p.s. vers

$$\int_{]o,1]} f'(X_t) \cdot dX_t$$

4°/ $\sum_{k\geq o} a^2_{n,k}$ converge P-p.s. vers

$$-\int_{]o,1]} f''(X_{t-}).dS_t$$

puisque f" est uniformément continue et compte-tenu de C.8.6°/ (la variation totale de $S-S^n$ converge P-p.s. vers zéro).

5°/ Puisque f" est uniformément continue sur les parties bornées de H, pour tout $\varepsilon > o$, et pour n assez grand, on a, si $\omega \in B(n,k+1)$:

$$||a^3_{n,k}|| \leq \varepsilon \,.\, ||X_{v(n,k+1)} - X_{v(n,k)}||^2$$

Or X admet une variation quadratique finie en moyenne, donc $\sum_{k\geq o} ||a^3_{n,k}||$ converge P-p.s. vers zéro, quand n tend vers l'infini.

6°/ $\sum_{k\geq o} a^4_{n,k}$ converge P-p.s. vers Q(1) (si la suite $(d(n))_{n>o}$ converge suffisamment vite vers zéro évidemment) compte-tenu de la preuve de C.8.2°/.

7°/ Enfin, on a $\sum_{k\geq o} a^5_{n,k} = \int_{]o,1]} f''(X_{t-}).dV^n_t$

(V^n étant défini comme en C.8.4°/).

On a donc :

$$\sum_{k\geq o} a^5_{n,k} - \int_{]o,1]} f''(X_{t-}).dV_t =$$

$$\int_{]o,1]} f''(X_{t-}).\left\{ [Z^n_t - X_{t-}] \otimes dX_t + dX_t \otimes [Z^n_t - X_{t-}] \right\}$$

si la suite $(d(n))_{n>o}$ converge suffisamment vite vers zéro, cette intégrale stochastique converge P-p.s. vers zéro quand n tend vers l'infini.

8°/ En conclusion, on a montré que, si la suite $(d(n))_{n>o}$ converge suffisamment vite vers zéro, chacune des variables aléatoires $\sum_{k\geq o} a^i_{n,k}$ converge P-p.s., pour $1\leq i\leq 5$, quand n tend vers l'infini, ce qui donne la formule de Ito annoncée.

C.10 - FORMULE DE ITO : Cas de dimension finie

On suppose que H est un espace vectoriel de dimension n et que $(h_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de H. Soit X un processus cadlag, adapté à la base de processus probabilisée complète $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ avec $T = [0,1]$, et à valeurs dans H. On suppose que X est parfaitement régional (C.3) et que X admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne (C.4). On notera X^j la j-ième coordonnée de X sur la base donnée, soit $X = \sum_{j=1}^{n} X^j.h_j$

Soit f une fonction réelle définie sur H deux fois continûment différentiable.

On considère les processus réels suivants, avec $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq n$:

$$S_{i,j}(t) = \sum_{s\leq t} (X^i_s - X^i_{s-})(X^j_s - X^j_{s-}) = S_{j,i}(t)$$

$$Q(t) = \sum_{s\leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_{s-}).(X^i_s - X^i_{s-}) \right]$$

$$V_{i,j}(t) = X^i_t.X^j_t - X^i_o.X^j_o - \int_{]o,t]} (X^i_{s-}.dX^j_s + X^j_{s-}.dX^i_s)$$

$$C_{i,j}(t) = V_{i,j}(t) - S_{i,j}(t)$$

Alors les processus $S_{i,j}$, Q, $V_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des processus réels, bien définis, cadlag, à variation forte bornée par trajectoires et $C_{i,j}$ est à trajectoires continues ; les processus $S_{i,i}$, $V_{i,i}$ et $C_{i,i}$ sont croissants.

De plus, on a :

$$f(X_t) - f(X_o) = Q(t) + \int_{]o,t]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_{s-}).dX^i_s$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{s\leq t} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(X_{s-})}{\partial x^i \, \partial x^j} (X^i_s - X^i_{s-})(X^j_s - X^j_{s-})$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{]o,t]} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(X_{s-})}{\partial x^i \, \partial x^j} \,.\, dV_{i,j}(s)$$

$$= Q(t) + \int_{]o,t]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X_{s-})}{\partial x^i} \,.\, dX^i_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{]o,t]} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(X_{s-})}{\partial x^i \, \partial x^j} \,.\, dS_{i,j}(s)$$

Preuve

Ce théorème C.10 est un cas particulier de C.7 qui a été explicité pour la commodité du lecteur; le seul point qui n'ait pas été prouvé est la croissance des processus $V_{i,i}$ et $C_{i,i}$: pour $V_{i,i}$, ceci se déduit immédiatement de la preuve de C.8.4°/ et, pour $C_{i,i}$, de la preuve de C.8.6°/ (ces processus étant des limites de processus croissants).

C.11 - VARIATION QUADRATIQUE DE $\int$ Y.dX

Soit X un processus cadlag, adapté à la base complète $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ et à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable J. On suppose que X est *parfaitement régional (C.3) et que X admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne (C.4). Soit Y un processus à valeurs dans l'espace de Hilbert H, uniformément borné. Soit une application bilinéaire continue de H × J dans l'espace de Hilbert K qui à (y,x) élément de H × J associe y.x élément de K. Soit Z le processus cadlag défini, à l'indistinguabilité près, par* $Z_t = \int 1_{]o,t]} Y.dX$.

Soit A (resp. B) la variation quadratique de X (resp. Z) c'est-à-dire le processus cadlag à valeurs dans $J \hat{\otimes} J$ *(resp.* $K \hat{\otimes} K$*) défini par :*

$$A_t = X_t^{\otimes 2} - X_o^{\otimes 2} - \int_{]o,t]} (X_{s-} \otimes dX_s + dX_s \otimes X_{s-})$$

$$(\text{resp. } B_t = Z_t^{\otimes 2} - Z_o^{\otimes 2} - \int_{]o,t]} (Z_s \otimes dZ_s + dZ_s \otimes Z_s))$$

Soit C le processus cadlag défini par :

$$C_t = \int_{]o,t]} (Y_s \otimes Y_s).dA_s$$

(cette intégrale pouvant être prise par trajectoires).

Les processus B et C sont alors indistinguables.

Preuve

On vérifie facilement, à partir des définitions, que Z est parfaitement régional et admet une variation quadratique régionalement finie en moyenne ; le processus B est donc bien défini. De même, le processus C est bien défini puisque A est à variation bornée par trajectoires.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des processus Y tels que les processus B_Y et C_Y associés sont indistinguables ; on vérifie facilement que Y appartient à $\mathcal{C}$ si Y est $\mathcal{A}$-étagé. De plus, $\mathcal{C}$ est stable pour les limites simples uniformément bornées (cf. B.9) donc contient tous les prévisibles uniformément bornés.

Notons qu'on aurait aussi pu utiliser l'approximation de A et B par des processus constants par morceaux comme en C.8.4°/.

C.12 - MOUVEMENT BROWNIEN (Définition)

On dit qu'un processus X réel est un mouvement brownien relativement à la base probabilisée de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ avec $T = [0,1]$, si X satisfait aux conditions suivantes :

(i) X est adapté, à trajectoires continues et, pour tout élément t de T, $E(X_t^2) < +\infty$.

(ii) X est une martingale (cf. D.2. ci-après) c'est-à-dire que pour tout couple (s,t) d'éléments de T avec s < t, $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ P-p.s.

(iii) le processus V, variation quadratique de X, défini par $V_t = X_t^2 - X_o^2 - 2 \int X_s.dX_s$ est indistinguable du processus $\bar{V}$ défini par $\bar{V}_t(\omega) = t$ pour tout élément ω de Ω.

D - MARTINGALE ET MESURE DE DOLEANS

-:-

Dans tout ce paragraphe D, on se donne une base probabilisée de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$.

D.1 - FONCTION DE DOLEANS (Lemme et définition)

Soit X un processus, à valeurs dans l'espace de Banach H, défini au sens strict ou à une modification près, et tel que, pour tout élément t de T, X_t est intégrable. Pour tout élément $A = F \times]s,t]$ de $\mathcal{R}$, on pose $x(A) = E[1_F.(X_t - X_s)]$

On vérifie facilement que x se prolonge, de façon unique, en une fonction définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$.

Nous noterons d(X) cette fonction définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans H, et nous l'appellerons fonction de Doléans associée au processus X.

En fait, on s'intéressera surtout au cas où X est adapté et où d(X) est σ-additive : on dira alors que *d(X) est la mesure de Doléans associée au processus X.*

D.2 - MARTINGALE (Définition et lemme)

Soit X un processus, au sens strict ou défini à une modification près, à valeurs dans l'espace de Banach H, et tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1^H(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. On dit que X est une martingale si la fonction de Doléans d(X) associée à X est identiquement nulle.

On vérifie immédiatement que ceci équivaut à écrire que, pour tout couple (s,t) d'éléments de T avec $s < t$, on a :

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \qquad \text{P-p.s.}$$

Plus généralement, si u est un temps d'arrêt étagé, on a $X_u = E(X_1 | \mathcal{F}_u)$ (cf. A.2 pour la définition de $\mathcal{F}_u$) (vérification facile : cf. A.7).

Si X est un processus réel, on dit que X est une sur-martingale (resp. une sous-martingale) si la fonction d(X) est négative (resp. positive).

D.3 - EXEMPLE DE SOUS-MARTINGALE (Proposition)

Soit M une martingale, définie à une modification près, à valeurs dans l'espace de Banach H. Soit f une fonction convexe réelle positive de variable réelle. Soit X le processus réel défini à une modification près par $X_t = f(||M_t||)$. Alors, X est une sous-martingale.

Preuve

En appliquant la définition d'une sous-martingale, on voit que ceci est l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles qui s'écrit :

Inégalité de Jensen

Soit Y un élément de $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$; soit f une fonction convexe réelle positive de variable réelle ; on a :

$$f[E(Y | \mathcal{G})] \leq E[f(Y) | \mathcal{G}]$$

Cette inégalité se vérifie immédiatement si f est une fonction affine $f(x) = ax + b$; on en déduit la même inégalité dans le cas général indiqué en utilisant le fait que f est enveloppe supérieure de fonctions affines.

D.4 - EXISTENCE DE MODIFICATION CADLAG (Théorème)

Soit X un processus, à valeurs dans un espace vectoriel H de dimension finie, défini à une modification près, et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_0^H(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$

(ii) pour tout élément s de T et pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{t \downarrow s} P[|X_t - X_s| > \varepsilon] = 0$.

(iii) l'ensemble $\{Z : Z = \int 1_A dX,\ A \in \mathcal{A}.\}$ (cette intégrale étant définie comme en B.2) est borné (au sens de Bourbaki) dans $L_0^H(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Alors il existe un processus (au sens strict) Y cadlag qui est une modification de X ; Y est unique à l'indistinguabilité près.

De plus, la condition (iii) est satisfaite si, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et si la fonction de Doléans d(X) associé à X est bornée (en ce sens qu'il existe une constante a telle que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $||[d(X)](A)|| \leq a$).

Preuve

Il suffit évidemment de considérer le cas où l'ensemble des temps est $T = [0,1]$. Il suffit aussi de considérer le cas où X est un processus réel (en considérant chaque application coordonnée relativement à une base de H). La condition (iii) signifie qu'il existe une fonction f positive décroissante définie sur R^+, telle que, si A appartient à $\mathcal{A}$ et pour $d>o$, $P\left[\left|\int 1_A . dX\right| > d\right] \leqslant f(d)$ et $\lim_{d\uparrow\infty} f(d) = 0$.

Soit Q' l'ensemble des rationnels appartenant à T. Soit $(Z_t)_{t\in Q'}$ la restriction de X à Q'.

On va d'abord prouver que le processus $(Z_t)_{t\in Q'}$ est laglad en utilisant une technique analogue à celle utilisée dans le théorème classique d'existence de modification laglad pour une martingale.

Soit (a,b) un couple de rationnels avec $a<b$.

Considérons d'abord une partie finie S de Q'; soit $\{t(k)\}_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ la famille ordonnée des éléments de S. Soit $(u(k))_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ la famille des temps d'arrêt étagés définie par récurrence par : $u(1)=0$.

$$u(2k+1) = \inf\{t : t\in S,\ t \geqslant u(2k),\ Z_t \geqslant b\}$$

$$u(2k) = \inf\{t : t\in S,\ t\geqslant u(2k-1),\ Z_t \leqslant a\}$$

(rappelons que si V est la partie vide de T, on pose $\inf\{t : t\in V\} = 1$).

Soit A_S^j le domaine où le processus $(Z_t)_{t\in S}$ effectue au moins j "montées de a à b" ; si $\omega\in\Omega$, on a :

- soit $\omega\in A_S^j$ ce qui implique

$$\sum_{k=1}^{j} \left(Z_{u(2k+1)} - Z_{u(2k)}\right) \geqslant j.(b-a)$$

- soit $\omega\notin A_S^j$ ce qui implique

$$\sum_{k=1}^{j} \left(Z_{u(2k+1)} - Z_{u(2k)}\right) \geqslant -(Z_1-a)^-$$

(on ne peut avoir $Z_{u(2k+1)} - Z_{u(2k)} < 0$ que si $Z_{u(2k)} < a$ et $Z_{u(2k+1)} = X_1$).

On en déduit :

$$P\left[\sum_{k=1}^{j} \left(Z_{u(2k+1)} - Z_{u(2k)}\right) \geqslant j(b-a)\right] \leqslant f\left[j(b-a)\right]$$

ce qui donne :

$$P(A_S^j) \leqslant C_j = f\left[j(b-a)\right] + P\left[(Z_1-a)^- \geqslant j(b-a)\right]$$

Si on considère maintenant une suite $(S(n))_{n>o}$ de parties finies de Q' dont la réunion est Q' et si $A_{Q'}^j$ désigne le domaine où le processus $(Z_t)_{t\in Q'}$ effectue au moins j "montées de a à b" on a $A_{S(n)}^j \uparrow A_{Q'}^j$ donc $P(A_{Q'}^j) \leqslant C_j$. On en déduit que, si $A_{Q'}$ désigne le domaine où le processus $(Z_t)_{t\in Q'}$ effectue une infinité de "montées de a à b", on a $P(A_{Q'}) = 0$. En considérant la famille dénombrable des couples de rationnels (a,b), on en déduit que le processus $(Z_t)_{t\in Q'}$ est laglad (c'est-à-dire, pour presque toute trajectoire, admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche).

On peut alors poser, pour tout élément t de T, $Y_t(\omega) = Z_{t+}(\omega)$.

Soit $t\in T$ et $(t(k))_{k>o}$ une suite d'éléments de Q' décroissant vers t ; la suite de variables aléatoires $(Y_{t(k)})_{k>o}$ converge P-p.s. vers Y_t (par définition de Y_t) et en probabilité vers X_t, donc Y est une modification de X.

D.5 - EQUI-INTEGRABILITE

Soit H un espace de Banach.

Soit $(A_n)_{n>o}$ une famille d'éléments de $L_1^H(\Omega,\mathcal{F},P)$. On dit que cette famille est équi-intégrable si, pour tout $\varepsilon > o$, il existe $\eta > o$ tel que $P(F) < \eta$ implique (quel que soit n)

$$E(1_F.\|A_n\|) \leqslant \varepsilon .$$

Un résultat classique (et facile à vérifier) dit que, si une famille équi-intégrable de variables aléatoires $(A_n)_{n>o}$ converge P-p.s. vers une variable aléatoire A, alors cette suite $(A_n)_{n>o}$ converge vers A dans $L_1^H(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Par ailleurs, soit A un élément de $L_1^H(\Omega,\mathcal{F},P)$; soit $(\mathcal{G}_n)_{n>o}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$; si on pose $A_n = E(A\setminus\mathcal{G}_n)$, la famille $(A_n)_{n>o}$ est équi-intégrable (facile à vérifier).

D.6 - THEOREME D'ARRET

Soit X un processus, à valeurs dans l'espace de Banach H, cadlag, tel que pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1^H(\Omega,\mathcal{F},P)$. On suppose que la fonction de Doléans de X est σ-additive. On suppose aussi que, pour toute famille décroissante $(u(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt étagés, la famille associée $(X_{u(n)})_{n>o}$ de variables aléatoires est équi-intégrable. Soit u un temps d'arrêt. Alors, la fonction de Doléans d(X') du processus X arrêté à u (soit $X'_t = X_{t\wedge u}$) est telle que pour tout élément B de

$$[d(X')]\ (B) = [d(X)]\ (B\cap]o,u]\ ).$$

Notamment, si X est une martingale cadlag et si u est un temps d'arrêt, le processus X arrêté à u est encore une martingale (cadlag) : on a donc, dans ce cas,

$$E\left[X_u|\mathcal{F}_t\right] . 1_{]o,u]} = E\left[X_1|\mathcal{F}_t\right] . 1_{]o,u]}$$

Preuve

1°/ Le théorème se vérifie facilement si u est un temps d'arrêt étagé.

2°/ On considère un temps d'arrêt u quelconque et un processus X satisfaisant aux conditions indiquées dans la première partie du théorème. Soit $(u(n))_{n>o}$ une suite de temps d'arrêt étagés qui décroît vers u (cf. le 2°/ de la preuve de A.12).

Soit $B = F\times]s,t]$ un élement de $\mathcal{R}$; on a :

$[d(X')]\ (B) = E\ [1_F.(X_{t\wedge u} - X_{s\wedge u})]$

$= \lim_{n\to\infty}\ E\ [1_F.(X_{t\wedge u(n)} - X_{s\wedge u(n)})]$

(puisque la famille de variables aléatoires $(X_{t\wedge u(n)})_{n>o}$ est équi-intégrable et converge P-p.s. vers la variable aléatoire $X_{t\wedge u}$).

$= \lim_{n\to\infty}.\ [d(X)](B\cap]o,u(n)])$

$= [d(X)]\ (B\cap]o,u])$

3°/ Considérons maintenant le cas où X est une martingale cadlag. Si $(u(n))_{n>o}$ est une suite de temps d'arrêt étagés, on a $X_{u(n)} = E(X_1\ |\mathcal{F}_{u(n)})$ (cf. D.2), donc la famille $(X_{u(n)})_{n>o}$ est équi-intégrable ; le processus X satisfait donc à toutes les conditions données au 2°/ ; si X' est le processus X arrêté à un temps d'arrêt u, on a donc d(X') identique à 0 donc X' est une martingale.

D.7 - LEMME (Condition suffisante pour avoir une mesure de Doléans)

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ une base de processus $T = [0,1]$. Soit m une fonction positive définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$. Alors m est σ-additive si et seulement si m satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) pour tout élément s de T, $\lim_{t\downarrow s}.m(\Omega\times]s,t]) = 0$

(ii) pour toute suite croissante $(u(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt étagés, telle que $[u(n)<1] \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset$, on a $\lim_{n\to\infty}.m(]u(n),1]) = 0$

Preuve

1°/ Les conditions (i) et (ii) sont évidemment nécessaires. Pour montrer la réciproque, nous allons d'abord montrer que la condition (ii) implique la condition (iii) qui suit :

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ décroissant vers $\emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{ \underbrace{\mathrm{Sup.}}_{B\in\mathcal{A},B\subset(A_n\times T')} m(B)\right\} = 0$$

On considère donc une suite $(A_n)_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ qui décroît vers $\emptyset$.

Pour tout n, pour alléger les notations, on pose : $a_n = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{B\in\mathcal{A},B\subset(A_n\times T')} m(B)$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty}.\ a_n$

La fonction m étant finie, pour tout n>o, on peut trouver $B_n \subset (A_n\times T')$, $B_n\in\mathcal{A}$ tel que

$m(B_n) \geqslant a_n - 2^{-n}.\varepsilon.$

Soit $C_n = \bigcap_{k\leqslant n} B_k$ et soit u(n) le temps d'arrêt étagé "début" de C_n, c'est-à-dire défini par :

$[u(n)]\ (\omega) = \inf.\{\ t\ :\ (t,\omega)\in C_n\}$

D'une part, la suite $(u(n))_{n>o}$ croît vers 1 (par trajectoires) puisque $C_n \subset (A_n\times T')$, donc $\lim_{n\to\infty}\ m(]u(n),1]) = 0$, donc, a fortiori, $\lim_{n\to\infty}.m(C_n) = 0$ (puisque $C_n \subset]u(n),1]$).

D'autre part $m(C_n) \geqslant m(B_n) - m\{\bigcup_{k<n} (B_n\setminus B_k)\}$

$$\geqslant a_n - \varepsilon.2^{-n} - \sum_{k<n} \varepsilon.2^{-k}$$

on a donc $a_n \leqslant 2\varepsilon + m(C_n)$, soit, à la limite,

$4\varepsilon = \lim_{n\to\infty}.a_n \leqslant 2\varepsilon$ donc $\varepsilon = 0$ ce qui prouve le 1°/.

2°/ Notons que les conditions (i) et (iii) sont évidemment nécessaires pour que m soit σ-additive. On va maintenant prouver que ces conditions (i) et (iii) entraînent la σ-additivité de m.

On veut prouver que si $(B_n)_{n>o}$ est une partition de B, les ensembles B et B_n (pour tout n) appartenant à $\mathcal{A}$, alors $m(B) = \sum_{n>o} m(B_n)$. D'après le lemme A.6, il suffit de prouver cette égalité pour $B\in\mathcal{R}$; quitte à changer de notation, on peut aussi supposer que chaque B_n appartient à $\mathcal{R}$. On a évidemment $m(B) \geqslant \sum_{n>o} m(B_n)$.

Soit $\varepsilon > o$. On se propose de prouver que

$$m(B) + 3\varepsilon \leqslant \sum_{n>o} m(B_n).$$

Soit $B = F \times]s,t]$ et, pour tout n, $B_n = F_n \times]s_n,t_n]$. La condition (i) permet de construire s' tel que $s<s'<t$ et $m(F\times]s,s'])\leq \varepsilon$; de même, pour tout n, on peut trouver t'_n tel que $t_n < t'_n$ et $m(F_n\times]t_n,t'_n]) \leq \varepsilon . 2^{-n}$.

Pour tout élément ω de F, soit $a(\omega)$ l'ensemble des entiers positifs k tels que $\omega \in F_k$. Ensuite pour tout n>o, soit C_n l'ensemble des éléments ω de Ω tels que

$$[s',t] \subset \left\{ \bigcup_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\in a(\omega)}}]s_k,t'_k[\right\}$$

D'une part, C_n appartient à $\mathcal{F}$. D'autre part, si on fixe ω, on a :

$$[s',t] \subset]s,t] \underset{\downarrow}{\subset} \left\{ \bigcup_{\substack{k>o \\ k\in a(\omega)}}]s_k,t_k] \right\} \subset \left\{ \bigcup_{\substack{k>o \\ k\in a(\omega)}}]s_k,t'_k[\right\}$$

(puisque $(B_n)_{n>o}$ est une partition de B)

Ceci signifie que la famille d'ouverts $\{]s_k,t'_k[\}_{k>o, k\in a(\omega)}$ recouvre le compact $[s',t]$ donc on peut en extraire un recouvrement fini, ce qui signifie qu'il existe un n>o tel que ω appartient à C_n ; autrement dit, si on pose $A_n = \Omega \setminus C_n$, la suite $(A_n)_{n>o}$ (qui est évidemment décroissante) tend vers $\emptyset$. On peut alors lui appliquer la condition (iii) ; il existe donc un entier q tel que :

$$\overbrace{\underset{B\in\mathcal{A}, B\subset(A_q\times T')}{\text{Sup.}}} \quad m(B) \leq \varepsilon.$$

Or, si on pose $D_q = \bigcup_{1\leq k\leq q} (F_k\times]s_k,t'_k])$ et $B' = (F\times]s',t])$, on a :

$(B'\setminus D_q) \subset (A_q\times T')$ donc $m(B'_{B'}\setminus D_q) \leq \varepsilon$.

donc :

$$m(B) \leq \varepsilon + m(B') \leq 2\varepsilon + m(D_q) \leq 2\varepsilon + \sum_{k>o} m(F_k\times]s_k,t'_k])$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{k>o} .2^{-k} + \sum_{k>o} m(B_k) \text{ c.q.f.d.}$$

D.8 - MESURE DE DOLEANS D'UNE SOUS-MARTINGALE

Soit X un processus réel positif défini à une modification près et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(ii) $(X_t)_{t\in T}$ est une sous-martingale

(iii) X est continu à droite en moyenne, c'est-à-dire que, pour tout élément s de T, $\lim_{t\downarrow s} E(X_t - X_s) = 0$

Alors la fonction de Doléans x de X est σ-additive.

Preuve

On suppose $T = [0,1]$.

Notons d'abord que si X est un processus croissant, X est aussi une sous-martingale. Par ailleurs, l'hypothèse (ii) signifie que x est positive. L'hypothèse (iii) implique la condition D.7.(i). Etudions la condition D.7.(ii) ; soit $(u(n))_{n>o}$ une suite croissante de temps d'arrêt étagés telle que la famille des ensembles $(A(n) = [u(n)<1])_{n>o}$ décroisse vers l'ensemble vide ; on a :

$$[d(X)] (]u(n),1]) = E[X_1 - X_{u(n)}]$$
$$\leq E[(X_1 - X_{u(n)})^+] \leq E(X_1 . 1_{A(n)})$$

donc $\lim_{n\to\infty} d(X)(]u(n),1]) = 0$

D.9 - LEMME

Soient s et t deux éléments de T avec s<t. Soit H un espace de Hilbert. Soit X_s (resp. X_t) un élément de $L_2^H(\Omega,\mathcal{F}_s, P)$ (resp. $L_2^H(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$). On suppose que $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ P-p.s.

Soit Z un élément de $L_2^H(\Omega,\mathcal{F}_s,P)$. On a alors :

1°/ Les variables aléatoires Z et $(X_t - X_s)$ sont orthogonales

2°/ $E(||X_t - X_s||_H^2) = E(||X_t||_H^2 - ||X_s||_H^2)$

Preuve

On note $<.,.>$ le produit scalaire dans H.

1°/ $E[<Z,X_t - X_s>] = E(<Z,E[(X_t - X_s) \mid \mathcal{F}_s]>)$

car Z est $\mathcal{F}_s$-mesurable

$= 0$

2°/ $b = E(||X_t-X_s||_H^2) = E(<X_t-X_s, X_t - X_s>)$

$= E(<X_t,X_t>) - 2 E(<X_s,X_t>) + E(<X_s, X_s>)$

mais $E(<X_s, X_t>) = E(<X_s,E(X_t \mid \mathcal{F}_s)>)$

car X_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable donc

$E(<X_s,X_t>) = E(<X_s, X_s>)$ soit

$$b = E(<X_t,X_t>) - E(<X_s,X_s>)$$
$$= E(||X_t||^2) - E(||X_s||^2) .$$

D.10 - MARTINGALE DE CARRE INTEGRABLE

Soit H un espace de Hilbert. Soit M une martingale à valeurs dans H, définie à une modification près, de carre intégrable, c'est-à-dire que, pour tout élément t de T, $E(||M_t||^2) < +\infty$.
On suppose que M est continue à droite en moyenne quadratique (c'est-à-dire que, pour tout élément s de T, $\lim_{t\downarrow s} E(||M_t - M_s||^2) = 0$).

Soit v la fonction de Doléans associée au processus réel N défini à une modification près par $N_t = ||M_t||^2$. *On a :*

1°/ v est positive et σ-additive

2°/ M est un processus parfaitement régional (cf. C.3)

3°/ L'application qui, à $Y \in L_2^{\mathbb{R}}(\Omega',\mathcal{P},v)$, *associe la variable aléatoire intégrale stochastique* $\int Y.dM$ *est une isométrie de* $L_2^{\mathbb{R}}(\Omega',\mathcal{P},v)$ *dans* $L_2^H(\Omega,\mathcal{F},P)$.

4°/ M admet une variation quadratique finie en moyenne.

Preuve

1°/ N est une sous-martingale (cf. D.3). De plus, si s appartient à T et si t décroît vers s, $\lim_{t\downarrow s} E(N_t - N_s) = 0$ (cf. D.9.2°/). On peut donc appliquer D.8, ce qui prouve le 1°/.

2°/ (cf. le paragraphe B). Soient J et K deux espaces de Hilbert et une application bilinéaire continue de J × H dans K qui, à (y,x) élément de (J × H) associe y.x élément de K. On peut supposer $||y.x||_K \leq ||y||_J . ||x||_H$.

Soit $Y = \sum_{i\in I} a_i . 1_{A(i)}$ un processus $\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans J ; on peut supposer que, pour tout élément i de l'ensemble fini I, a_i appartient à J et $A(i) = F(i) \times]s(i), t(i)]$ appartient à $\mathcal{R}$; enfin, les ensembles A(i) peuvent être supposés deux à deux disjoints. On vérifie facilement (en considérant les différents cas de figures et en utilisant la martingalité de M : cf. D.9.1°/) que les variables aléatoires

$$\int a_i . 1_{A(i)} . dX = 1_{F(i)} . a_i . (X_{t(i)} - X_{s(i)})$$

sont deux à deux orthogonales, quand i parcourt I, dans $L_2^K(\Omega,\mathcal{F},P)$.

On a donc :

$$E(||\int Y.dX||_K^2) = \sum_{i\in I} E(||a_i . 1_{A(i)} . dX||_K^2)$$
$$\leq \sum_{i\in I} ||a_i||^2 . E\left[1_{F(i)} . ||X_{t(i)} - X_{s(i)}||^2\right]$$
$$\leq \sum_{i\in I} ||a_i||^2 . E\left[1_{F(i)} . (||X_{t(i)}||^2 - ||X_{s(i)}||^2)\right]$$

(cf. D.9.2°/)

$$\leq \int ||Y||_J^2 . dv$$

ce qui montre que X est H-J-K-régional.

3°/ Si $||x.y||_K = ||x||_H . ||y||_J$, l'inégalité ci-dessus devient une égalité, ce qui prouve l'isométrie.

4°/ Soit $(t(k))_{1\leq k\leq n}$ une famille finie croissante d'éléments de T avec t(1) = 0 et t(n) = 1 ; on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(||X_{t(k+1)} - X_{t(k)}||^2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} E(||X_{t(k+1)}||^2 - ||X_{t(k)}||^2)$$

(cf. D.9)

$$= E(||X_1||^2 - ||X_0||^2)$$

ce qui prouve le 4°/.

D.11 - UNE INEGALITE DUE A DOOB (Proposition)

Soient p et q deux réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1<p<+\infty)$, *c'est-à-dire des exposants conjugués. Soit* $(X_t)_{t\in[0,1]}$ *une sous-martingale (réelle) positive continue à droite (par trajectoires) et telle que* $E(X_1^p) < +\infty$. *On pose :* $Y(\omega) = \sup_{t\in T} X_t(\omega)$. *Alors la variable aléatoire Y appartient à* $L_p(\Omega,\mathcal{F},P)$ *et* $E(Y^p) \leq q^p . E(X_1^p)$.

Preuve

Notons d'abord que, si Q' désigne l'ensemble des rationnels contenus dans $T = [0,1]$, on a $Y = \sup_{t\in Q'} X_t$ P-p.s., donc Y est bien $\mathcal{F}$-mesurable.
Soit d un réel avec d > 1 (d fixé). Pour tout entier relatif n, soit v(n) le temps d'arrêt défini par $v(n) = \inf.\{t : X_t > d^n\}$ avec la convention v(n) = 1 si l'ensemble ci-dessus est vide. On pose, pour tout entier relatif n, $A(n) = [Y \geq d^n]$ et $a_n = P[A(n)]$. On a :

$$E(X_1) \geq E(X_{v(n)}) \geq d^n . a_n + \int_{\Omega\setminus A(n)} X_1 . dP$$

donc $a_n \leq d^{-n} . \int_{A(n)} X_1 . dP$

Par ailleurs : $E(Y^p) \leq d^p . \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n - a_{n+1}).d^{np}$

$$\leq d^p . \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n . (d^{np} - d^{(n-1)p})$$

la majoration obtenue plus haut pour a_n donne alors :

$$E(Y^p) \leq d^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} . d^{-n}.(\int_{A(n)} X_1.dP) \quad (d^{np} - d^{(n-1)p})$$

Si on pose $B(n) = A(n) \setminus A(n+1)$, on a :

$$E(Y^p) \leq d^p . \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geq n} (\int_{B(k)} X_1 dP) d^{-n}(d^{np} - d^{(n-1)p})$$

$$\leq d^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\int_{B(k)} X_1 dP.) \sum_{n\leq k} d^{-n} (d^{np} - d^{(n-1)p})$$

Or, $\sum_{n\leq k} d^{-n}(d^{np} - d^{(n-1)p}) \leq \int_0^{d^{kp}} x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1} d^{k(p-1)}$

donc $E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} d^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{B(k)} d^{k(p-1)} X_1.dP$

Or, sur $B(k)$, $d^k \leq Y$ donc

$$E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} . d^p . \int_\Omega Y^{p-1} X_1 dP$$

Ceci étant vrai quel que soit $d > 1$, on a aussi :

$$E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} \int_\Omega Y^{p-1}. X_1. dP$$

L'inégalité de Holder donne alors :

$$E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} [E(X_1^p)]^{1/p} [E(Y^{q(p-1)})]^{1/q}$$

or $q(p-1) = p$ donc

$$E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} [E(X_1^p)]^{1/p} . [E(Y^p)]^{1/q}$$

Supposons d'abord $E(Y^p) < +\infty$; ce qui précède implique $[E(Y^p)]^{1-1/q} \leq \frac{p}{p-1} [E(X_1)^p]^{1/p}$

Or, $1 - \frac{1}{q} = 1/p$ donc $E(Y^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p E(X_1)^p$

Si, maintenant, on ne suppose plus $E(Y^p) < +\infty$, on va se ramener à ce cas ; pour cela, on considère la martingale $X(n)$ cadlag définie par $X(n) = E((X_1 \wedge n) | \mathcal{F}_{t+})$ et on pose $Y(n) = \sup_{t\in T} X_t(n)$; le raisonnement qui précède montre que

$$E[(Y_{(n)})^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[(X_1 \wedge n)^p]$$

Or, $Y \leq \sup_{n>o} Y(n)$, donc (théorème de Lebesgue),

$$E(Y^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p . E(X_1)^p .$$

Exceptionnellement, dans les deux propositions qui suivent, on suppose que l'ensemble T des temps est ouvert à droite.

D.12 - CONVERGENCE D'UNE SOUS-MARTINGALE (Proposition)

Soit $(X_t)_{t\in[0,1[}$ une sous-martingale définie à une modification près et telle que $\sup_{t\in[0,1[} E(|X_t|) = K < +\infty$. Alors il existe une modification cadlag $(Y_t)_{t\in[0,1[}$ du processus X et une variable aléatoire Z telles que $Z = \lim_{t\uparrow 1} Y_t$. De plus, si la sous-martingale X est négative, pour tout élément t de T, $E(Z|\mathcal{F}_t) \geq X_t$. P-p.s.

Preuve

On pose $X_1 = 0$; soit x la fonction de Doléans du processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$; soit A un élément de $\mathcal{A}$; il existe une partition (B,C) de A et un élément t de T, $t < 1$, tels que $B \subset]0,t]$ et $C = (H \times]t,1])$ avec $H \in \mathcal{F}_t$ (considérer le dernier instant t, $t < 1$, où il existe un élément ω de Ω tel que $1_A(\omega)$ change de valeur). D'une part $0 \leq x(B) \leq x(]0,t]) \leq K$; d'autre part, $x(C) = E[1_H.(X_1 - X_t)] = -E(1_H.X_t)$ donc $|x(C)| \leq K$; la fonction de Doléans x de X est donc bornée et on peut appliquer le théorème D-4 au processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$; il existe donc une modification cadlag Y du processus X c'est-à-dire, notamment, qu'il existe une variable aléatoire Z telle que $Z = \lim_{t\uparrow 1} Y_t$. Supposons, de plus, que la sous-martingale X est négative. Considérons, alors, un élément t (fixé) de T ; posons $Y_n = Y_{1-1/n}$. On a : $E(Z|\mathcal{F}_t) \geq E(Y_n|\mathcal{F}_t) \geq X_t$ pour $1 - \frac{1}{n} \geq t$. Or, $\{E(Y_n|\mathcal{F}_t)\}_{n>o}$ constitue une famille croissante de variables aléatoires, donc (pour $1 - \frac{1}{n} \geq t$)

(lemme de Fatou) : $E(Z|\mathcal{F}_t) \geq E(Y_n|\mathcal{F}_t) \geq X_t$

D.13 - CONVERGENCE D'UNE MARTINGALE (Proposition)

Soit $(X_t)_{t\in[0,1[}$ une martingale, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, définie à une modification près. On suppose que la famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in[0,1[}$ est équi-intégrable. Alors, il existe une modification cadlag Y de la martingale X et une variable aléatoire Z telle que :

(i) $Z = \lim_{t\uparrow 1} Y_t$

(ii) pour tout élément t de T, $X_t = E(Z|\mathcal{F}_t)$ P-p.s.

Preuve

Il suffit de considérer le cas où X est réel. L'équi-intégrabilité implique :

$$\sup_{t\in[0,1[} E(|X_t|) = K < +\infty$$

On peut donc appliquer D.12, ce qui assure l'existence de Z et de la modification Y satisfaisant à la condition D.13-(i) ; ceci et l'équi-intégrabilité impliquent que $(Y_{1-1/n})_{n>o}$ converge vers Z dans L_1, quand n tend vers l'infini, ce qui donne (ii).

E - SOLUTIONS FORTES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

-:-

E.1 - DONNES GENERALES

Dans tout ce paragraphe E, on considère :

- $T = [0,1]$: intervalle unité de la droite réelle
- H : un espace de Banach séparable.
- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}) = B^I$ une base de processus (cf. A-1) que l'on appellera la base initiale.

E.2 - BASE CANONIQUE (définition)

Soit D^H l'espace des fonctions définies sur T et à valeurs dans H. Pour tout élément t de T, soit $\mathcal{D}^H_t$ la plus petite tribu sur D^H qui rend mesurable les applications "coordonnées" $\omega \rightsquigarrow x_s(\omega)$ pour $s \leqslant t$. On pose $\mathcal{D}^H = \mathcal{D}^H_1$. La famille $(D^H \times \Omega, \mathcal{D}^H \otimes \mathcal{F}, (\mathcal{D}^H_t \otimes \mathcal{F}_t)_{t \in T})$ constitue une base de processus que l'on notera B^H et que l'on appellera la base canonique (pour les processus à valeurs dans H et relativement à la base initiale B^I).

E.3 - CONDITION DE PREVISIBILITE (proposition)

Soit X un processus continu, à valeurs dans H et adapté relativement à la base initiale B^I, (cf. E-1). Soit $a(t,x)$ un processus, à valeurs dans H, défini et adapté relativement à la base canonique B^H ; $a(t,x,\omega)$ est donc une application définie sur $T \times D^H \times \Omega$ et à valeurs dans H. On suppose aussi que a est localement lipschitzienne au sens indiqué en E-5 ci-après. On pose $Y_t(\omega) = a(t, X_.(\omega), \omega)$. Alors ceci définit un processus Y, à valeurs dans H, prévisible relativement à la base $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$.

Preuve

Il suffit de considérer le cas où $||X||$ est uniformément borné par une constante d (considérer la suite $(w(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt définis par $w(n) = \inf\{t : ||X_t|| \geqslant n\}$ et arrêter le processus X à $w(n)$).

Dans ce cas, pour tout $n > 0$, soit $\varepsilon(n)$ tel que $\sup\limits_{s \leqslant t} ||x_s|| \leqslant d$, $\sup\limits_{s \leqslant t} ||x'_s|| \leqslant d$ et $\sup\limits_{s \leqslant t} ||x_s - x'_s|| \leqslant \varepsilon(n)$ impliquent $||a(t,x,\omega) - a(t,x',\omega)|| \leqslant \frac{1}{n}$. Pour tout $n > 0$, soit $(u(n,k))_{k>0}$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par :

$$u(n,0) = 0$$

$$u(n,k+1) = \inf\{t : t \geqslant u(n,k), ||X_t - X_{u(n,k)}|| > \varepsilon(n)\}$$

(et $u(n,k+1)=1$ si l'ensemble ci-dessus est vide)

Soit X^n le processus défini par :

$$X^n_t(\omega) = X_{u(n,k)(\omega)}(\omega)$$

pour $[u(n,k)](\omega) < t \leqslant [u(n,k+1)](\omega)$

X^n est bien défini puisque, pour tout ω et pour tout n, il existe k tel que $[u(n,k)](\omega)=1$ (continuité uniforme d'une fonction continue sur $[0,1]$).

Soit $Y^n_t(\omega) = a(t, X^n, \omega)$

On vérifie facilement que Y^n est adapté ; Y^n est donc prévisible puisque continue à gauche (cf.A). Or, la suite de processus Y^n converge uniformément vers le processus Y donc Y est prévisible.

E.4 - DEFINITION (solution forte)

Soient $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$ deux processus à valeurs dans H et adaptés relativement à la base canonique B^H. Soient A et W deux processus à valeurs dans H continus, adaptés à la base probabilisée $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$. On dit qu'un processus continu adapté à cette même base est solution forte de l'équation différentielle stochastique $dX_t = a(t,X_.).dA_t + b(t,X_.).dW_t$ et de condition initiale X_0, si, pour tout élément t de T,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_.)\, dA_s + \int b(s,X_.).dW_s$$

ces intégrales étant des intégrales stochastiques (au sens indiqué au paragraphe B). (pour alléger l'écriture, le symbole ω qui apparait dans tous les processus considérés, a été omis).

E.5 - THEOREME

Soit H un espace de Hibert séparable.

Soit $B^I = (\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base probabilisée complète de processus que l'on appellera la base initiale. On suppose que la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est continue à droite.

Soient A et W deux processus continus, à valeurs dans H, définis et adaptés relativement *à la base B^I ; on suppose que W est une martingale de carré intégrable dont le processus variation quadratique sera noté V (cf. C-7 et C-8-4°)). On suppose que, pour tout élément ω de Ω et pour tout couple (s,t) d'éléments de T avec $s < t$, la variation totale de $A.(\omega)$ et la variation totale de $V.(\omega)$ entre s et t sont majorées par $t-s$.*

Soient $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$ deux processus à valeurs dans H, définis et prévisibles relativement à la base canonique B^H, localement lipschitziens et localement bornés au sens suivant :

(i) (resp. (i)') pour tout réel positif d, il existe une constante L_d (resp. C_d) telle que, si (t,ω) est un élément de $T \times \Omega$, si (x,x') est un couple d'éléments de D^H avec $\operatorname{Sup}_{s \in T} ||x_s|| \leq d$ et $\operatorname{Sup}_{s \in T} ||x'_s|| \leq d$, alors on a :

$$||a(t,x,\omega)-a(t,x',\omega)||^2 \leq L_d . \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||x_s - x'_s||^2$$

$$||b(t,x,\omega)-b(t,x',\omega)||^2 \leq L_d . \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||x_s - x'_s||^2$$

(resp. $||a(t,x,\omega)|| + ||b(t,x,\omega)|| \leq C_d$)

Alors il existe une suite $(v(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt croissant vers un temps d'arrêt v et un processus continu adapté unique X satisfaisant aux conditions suivantes :

(ii) si ω appartient à l'ensemble $\{v<1\}$,

$$\overline{\lim_{t \uparrow v(\omega)}} . ||X_t(\omega)|| = + \infty$$

(iii) $$X_t = X_u + \int_u^t a(s,X_.).dA_s + \int_u^t b(s,X_.).dW_s$$

sur chaque intervalle stochastique prévisible $\{(t,\omega) : u(\omega) < t \leq v_n(\omega)\}$ la deuxième intégrale étant une intégrale stochastique au sens indiqué au paragraphe B.

__Preuve__ :

Notons d'abord que les conditions données sur A et W sont satisfaites si $H = \mathbb{R}$, $A_t = t$ et W est un mouvement brownien (cf. C-12).

Comme ci-dessus, le symbole ω sera omis à chaque fois qu'il n'y a pas de confusion possible.

La démonstration qui suit est une généralisation naturelle de la méthode des approximations successives utilisée classiquement pour montrer l'existence de solution pour une équation différentielle ordinaire (cas déterministe)

Cette démonstration sera décomposée en trois étapes :

1°) Unicité : lemme E-6

2°) Prolongement d'une solution : lemme E-7 (ceci généralise la preuve du fait que le domaine de définition d'une solution constitue un ensemble ouvert dans ce cas déterministe)

3°) Construction du temps d'arrêt v et du processus X (E-8). (ceci généralise la preuve du fait que le domaine de définition d'une solution constitue un ensemble fermé, dans le cas déterministe, s'il n'y a pas explosion.)

E.6 - __UNICITE__

On considère les hypothèses données dans le théorème E-5. Soient X et X' deux processus continus adaptés qui sont solutions de l'équation E-5-(iii) sur $]u,v[$ et $]u,v'[$ respectivement et qui admettent la même condition initiale $X_u = X'_u$. Alors $X.1_{[u,v\wedge v'[}$ et $X'.1_{[u,v\wedge v'[}$ sont indistinguables.

__Preuve__

On considère donc deux solutions X et X' comme indiqué. On pose :

$u' = \inf.\{t : ||X_t - X'_t|| > 0,\ t \geq u, t \leq (v \wedge v')\}$

Raisonnons par l'absurde et supposons $u' < v \wedge v'$.

Puisque les processus X et X' sont continus, on peut trouver une constante d et un temps d'arrêt w tels que :

$$\operatorname{Sup}_{u' \leq s \leq (v \wedge v')} (||X_s|| + ||X_{s'}) \leq d,$$

$P([w > u']) > 0$ et $w \leq v \wedge v'$.

Soit L_d la constante de Lipschitz, associée à d, qui intervient dans la condition E-5-(i). Soit f la fonction positive définie sur T par :

$$f(t) = E(\operatorname{Sup}_{s \leq t} ||X_{s\wedge w} - X'_{s \wedge w}||^2)$$

On a :

$$f(t) \leq 2E\ (\operatorname{Sup}_{s \leq t} ||\int_u^{s\wedge w} [a(t,W\ ) - a(r,X')].dA_r||^2) + 2E\ (\operatorname{Sup}_{s \leq t} ||\int_u^{s \wedge w} [b(r,X\ ) - b(r,X')].dW_r||^2)$$

d'après l'inégalité de Schwarz, le premier terme du second membre est majoré par :

$$2E\ (\sup_{s\leq t} \int_u^{s\wedge w} ||a(r,X\ ) - a(r,X')||^2\ dr)$$

et le deuxième terme est majoré par :

$$2E\ (\sup_{s\leq t} \int_u^{s\wedge w} ||b(r,X\ ) - b(r,X')||^2\ dr)$$

(cf. C-11).

Compte-tenu de la condition E-5-(i), il vient :

$$f(t) \leq 4\ L\ .\int_0^t f(s).ds$$

Or, $f(0) = 0$, donc $f(t) = 0$, quel que soit t. (résultat classique). Ceci montre que $X.1_{[0,w]}$ est indistinguable de $X'.1_{[0,w]}$ ce qui contredit la construction u' (puisque $P([w>u']) > 0$) et achève le raisonnement par l'absurde.

E.7 - PROLONGEMENT D'UNE SOLUTION

On considère les hypothèses données dans le théorème E-5. Alors il existe un temps d'arrêt v et un processus à valeurs dans H continu adapté X, défini sur l'intervalle stochastique $[u,v]$, satisfaisant aux deux doncitions suivantes :

(i) $P(\{v > u\}) > 0$

(ii) $X_t = X_u + \int_u^t a(s,X_.)dA_s + \int_u^t b(s,X_.).dw_s$

sur l'ensemble $\{(t,\omega) : u(\omega) \leq t \leq v(\omega)\}$

Preuve

1°) Notons X^a le processus adapté défini par

$$X_t^a(\omega) = 1_{[u,1]}(t,\omega).X_u(\omega)$$

Soit d une constante telle que $P[||X_u||>d]<1$

Soit v'_0 le temps d'arrêt défini par :

$$v'_0(\omega) = \inf.\{t : ||X_t^u||>d\}$$

(on a, soit $v'_0(\omega) = u(\omega)$, soit $v'_0(\omega) = 1$)

Soit $L = L_{2d}$ la constante de Lipschitz associée à 2d qui apparait dans la condition (i) du théorème E-5.

Soit $v(0) = v'_0 \wedge (u + \frac{1}{128\ L})$

On définit le processus X^1 continu après u de la façon suivante :

$$X_t^1 = \int X_t^u + \int_u^t a(s,X^o).dA_s + \int_u^t b(s,X^o).dW_s$$

Puisque $||X^u|| \leq d$ sur $[u,v(0)]$, X^1 est défini continu sur ce domaine et on peut trouver un temps d'arrêt v(1), tel que $v(1) \leq v(0)$, $P(\{v(1) > u\}) > 0$,

$$E(\sup_{s\leq v(1)} .||X_s^1-X_s^o||^2) \leq \frac{1}{16}d^2.P(\{v(1)>u\})$$

et $\quad \sup_{s\leq v(1)} .||X_s^1-X_s^o|| \leq \frac{1}{2}.d$

On définit les suites de processus continus après u, $(X^n)_{n\geq 0}$, $(Y^n)_{n>0}$, $(Z^n)_{n>0}$ par récurrence, de la façon suivante :

$$Y_t^{n+1} = \int_u^t a(s,X^n)\ dA_s$$

$$Z_t^{n+1} = \int_u^t b(s,X^n).dW_s$$

$$X^{n+1} = X^o + Y^{n+1} + Z^{n+1}$$

(le domaine où ces processus sont bien définis reste à préciser). Notons que Y^n est à variation bornée et que Z^n est une martingale.

Pour tout $n > 0$, soit v(n) le temps d'arrêt défini par :

$$v(n) = \inf.\{t:t \geq u,\ ||X_t^n-X_t^{n-1}||>2^{-n}.d,\ t \leq v_{n-1}\}$$

et $v(n) = v(n-1)$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

Soit $v = \lim_{n\to\infty}.v(n)$ (la suite v(n) décroit vers v).

Pour $t \leq [v(n)](\omega)$, $||X_t^n(\omega)||\leq 2d$ donc les processus Y^{n+1}, Z^{n+1} et X^{n+1} sont définis, au moins, sur l'intervalle stochastique $[u,v(n)]$ et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[u,v]$.

2°) Prouvons d'abord quelques majorations :

On pose :

$$y_n = E\ [\sup_{t\leq v(n)} ||Y_t^{n+1} - Y_t^n||^2]$$

$$z_n = E\ [\sup_{t\leq v(n)} ||Z_t^{n+1} - Z_t^n||^2]$$

$$x_n = E\ [\sup_{t\leq v(n)} ||X_t^{n+1} - X_t^n||^2]$$

On a :

$$x_n \leq 2y_n + 2z_n$$

$$||Y_t^{n+1} - Y_t^n||^2 = \int_u^t [a(s,X^n)-a(s,X^{n-1})]dA_s||^2$$

$$\leq (t-u) \int_u^t ||a(s,X^n)-a(s,X^{n-1})||^2\ ds$$

(inégalité de Schwartz).

$$\leq L.(t-u) \sup_{s\leq t} ||X_s^n-X_s^{n-1}||^2$$

donc $y_n \leq \frac{1}{32}\ x_{n-1}$ (puisque $(t-u) \leq \frac{1}{128\ L}$). De même, le processus V^n variation quadratique de

$Z^{n+1} - Z^n$ est tel que :

$$(V^n_t - V^n_u) \leqslant \int_u^t ||b(s,X^n)-b(s,X^{n-1})||^2.ds$$

(cf. C.11)

$$\leqslant \quad (t-u) \;.\; < .\; \sup_{s\leqslant t} ||X^n_s - X^{n-1}_s||^2$$

donc, (cf. D.3 et D.11), z_n

$$z_n \leqslant 4E(V^n_{v(n)} - V^n_u) \leqslant \frac{1}{32}\; x_{n-1}$$

Finalement, on a donc $x_n \leqslant \frac{1}{8}\, x_{n-1} \leqslant 8^{-n} . x_o$

(et $x_o < +\infty$ d'après la condition E.5.(i)).

3°) Prouvons que $P([v>u]) > 0$.

Soit $A(n) = \{ \omega : v(n) < v(n-1) \}$

Par construction de $v(n)$, si $\omega \in A(n)$,

$$||X^n_{[v(n)](\omega)}(\omega) - X^{n-1}_{[v(n)](\omega)}(\omega)|| \geqslant 2^{-n}\, d$$

donc

$$x_{n-1} \geqslant E\,(||X^n_{v(n)} - X^{n-1}_{v(n)}||^2) \geqslant 4^{-n}\, d^2\, P[A(n)]$$

donc

$$P[A(n)] \leqslant 2^{-n}\, \frac{x_o}{d^2} \leqslant \frac{1}{2}\, .\, 2^{-n} .\, P(\{v(o) > u\})$$

Or $\{v < v(1)\} \subset \bigcup_{n>1} \{ v(n) < v(n-1)\}$

donc $\quad P(\{ v<v(1)\}) \leqslant \sum_{n>o} \frac{1}{2}\; 2^{-n}\, P(\{ v(1) > u\})$

$$\leqslant \frac{1}{2}\, P(\{ v(1) > u\})$$

donc $P(\{ v>u\}) \geqslant \frac{1}{2}\; P(\{ v(1)> u\}) > 0$

4°) Construction du processus X.

Sur le domaine $[u,v]$, $||X^n - X^{n-1}||$ est majoré par $2^{-n}d$ donc, sur ce domaine, la suite de processus $(X^n)_{n>o}$ converge uniformément par trajectoires vers un processus adapté continu X uniformément borné par 2d. De plus, sur le même domaine, on a :

$$X^{n+1}_t = X^o + \int_u^t a(s,X^n).d\,A_s + \int_u^t b(s,X^n).d\,W_s$$

La suite de processus $(a(s,X^n).1_{[u,v]})_{n>o}$ (resp. $(b(s,X^n).1_{[u,v]})_{n>o}$) converge uniformément par trajectoires vers le processus $a(s,X\,).1_{[u,v]}$ (resp. $b(s,X\,).1_{[u,v]}$) ;

Les processus associés aux intégrales $\int_u^t a(s,X^n)dA_s$ et $\int_u^t b(s,X^n)dW_s$ convergent donc de même vers les processus $\int_u^t a(s,X\,)dA_s$ et $\int_u^t b(s,X\,)dW_s$ respectivement. On en déduit que le processus X satisfait aux conditions du lemme E.7.

E.8 - SOLUTION MAXIMALE

On va prouver le théorème E.5 (à l'aide des lemmes E.6 et E.7). On considère donc les hypothèses données en E.5.

1°/ Soit m la borne supérieure des nombres m_n satisfaisant à la condition suivante : il existe un temps d'arrêt $u(n)$ et un processus X^n tels que, sur $[u,u(n)]$, on ait :

$$X^n_t = X^o + \int_u^t a(s,X^n)dA_s + \int_u^t b(s,X^n)\; dW_s$$

et $m_n = (P \otimes \mu)\; ([u,u(n)])$

où μ désigne la mesure de Lebesgue.

Soit une suite $(m_n,\, u(n),X^n)_{n>o}$ de triplets associés comme ci-dessus telle que la suite $(m_n)_{n>o}$ croisse vers m. Compte-tenu de E.6, les processus X^n et X^{n+1} coïncident (à l'indistinguabilité près) sur l'intervalle stochastique $[u,u(n) \wedge u(n+1)]$; on peut donc poser $v'(n) = \bigvee_{k\leqslant n} u(k)$ et considérer le processus Y^n défini à l'indistinguabilité près sur $[u,v'(n)]$ et égal à X^k sur $[u,u(k)]$ ($\forall k \leqslant n$).

Soit $v' = \sup_{n>o} .v'(n)$. Soit X le processus défini sur $[u,v'[$ et égal à Y^n sur $[u,v'(n)]$.

Soit d une constante positive. Pour tout n, soit $v(n)$ le temps d'arrêt tel que $v(n) \leqslant v'(n)$ et défini par :

$$v(n) = \inf.\{\, t = t \leqslant v'(n) \quad \text{et} \quad ||Y^n_t|| \geqslant d\,\}$$

et $v(n) = v'(n)$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

Soit $v = \sup_{n>o}.v(n)$. Si, pour toute constante d, $P(\{v < v'\}) = 1$, le théorème est démontré. On raisonne alors par l'absurde et on suppose qu'il existe une constante d telle que $P(\{\, v = v'\}) > 0$.

2°/ Puisque $||X||$ est borné par d sur $\bigcup_{n>o} [u,v(n)]$, les processus $a(s,X_s)$ et $b(s,X_s)$ sont bornés par une constante d' sur ce même domaine. Puisque X est solution de l'équation différentielle E.5.(iii) sur le domaine $[v(n),v(n+1)]$, on prouve comme en E.7.2°) que :

$$E\Big(\sup_{v(n)\leqslant s\leqslant v(n+1)} ||X_s - X_{v(n)}||^2\Big) \leqslant$$

$$8.(d')^2.(P\otimes\mu)\ \big(\big]v(n),v(n+1)\big]\big)$$

On prouve alors, comme en E.7.4°) que le processus X peut être prolongé par continuité au domaine $[u,v]$ et que, sur ce domaine, il est solution de l'équation différentielle E.5(iii) (puisque

$$\sum_{n>o} P\otimes\mu\ \big(\big]v(n),v(n+1)\big]\big) < +\infty\ ).$$

3°/ Le processus X est donc défini continu et solution de E.5.(iii) sur le domaine prévisible $(]u,v]) \cup (\bigcup_{n>o}]u,v'(n)])$. Le lemme E.7 montre alors qu'on peut prolonger X au-delà du temps d'arrêt v : en effet, pour ce prolongement, il suffit que X soit borné au temps d'arrêt v et on peut le choisir arbitrairement (par exemple nul) sur le domaine v < v'. Mais ceci contredit la construction de m et achève le raisonnement par l'absurde.

E.9 - CONDITION SUFFISANTE DE NON-EXPLOSION

(Proposition)

Le théorème E.5 assure l'existence d'une solution X de l'équation différentielle E.5.(iii) jusqu'à un temps d'arrêt v où la norme de X devient infinie ; si $P([v<1]) > o$, on dit qu'il y a "explosion". Il est intéressant de donner une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas explosion.

On considère donc les hypothèses du théorème E.5. On suppose, de plus, que $E(||X_u||^2) < +\infty$ *et que les processus a et b satisfont à la condition suivante : il existe une constante C telle que, pour tout élément* (t,x,ω) *de* $T \times D^H \times \Omega$ *, on a :*

$$||a(t,x,\omega)||^2 + ||b(t,x,\omega)||^2 \leqslant C(1 + \sup_{s\leqslant t} ||x_s||^2)$$

Alors, il existe un processus X continu adapté solution de E.5.(iii) sur $[0,1]$ *et* $E(||X_1||^2) < +\infty$.

Preuve

Soit X une solution de l'équation E.5.(iii) comme indiqué au théorème E.5 (avec la suite $(v(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt associée). Soit f_n la fonction positive définie sur T par :

$$f_n(t) = E\ \big(\sup_{s\leqslant t} ||X_{(s\vee u)\wedge v(n)}||^2\ \big)$$

On prouve, comme en E.7.2°/, que l'on a

$$f_n(t) \leqslant 8C\int_o^t [f_n(s) + 1]\ ds$$

On a donc, pour $t \in T$, $f_n(t) \leqslant f_n(o).e^{8Ct}$ (inégalité classique facile à vérifier).

Ceci montre que :

$$P\ (\{\omega : \lim_{t\uparrow v(\omega)} . ||X_t(\omega)|| = +\infty\}\ ) = o$$

donc $P(\{v < 1\}) = o$.

F - THEOREMES DE DECOMPOSITION

-:-

F.1 - DONNEES GENERALES

Dans tout ce paragraphe F, on pose $T = [0,1]$ et on se donne une base probabilisée complète de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$: quand on parlera de processus adapté, prévisible, etc... ce sera relativement à cette base. De plus, on supposera la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ continue à droite. Si F est un élément de $\mathcal{F}$, on notera $E(1_F \mid \mathcal{F}_t)$ une version continue à gauche (et donc prévisible : cf. A.12) de la martingale $E(1_F \mid \mathcal{F}_t)$.

F.2 - TEMPS D'ARRET PREVISIBLE et TRIBU $\mathcal{F}_{u-}$

(Définitions)

Soit u un temps d'arrêt. On dit que u est *prévisible* s'il existe une suite $(u(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt croissant vers u et telle que, pour tout n et tout ω, $[u(n)]\ (\omega) < u(\omega)$. Dans ce cas, on notera $\mathcal{F}_{u-}$ la tribu engendrée par les tribus $(\mathcal{F}_{u(n)})_{n>o}$ et on dit que la suite $(u(n))_{n>o}$ "annonce" u.

Si u est un temps d'arrêt prévisible, l'intervalle stochastique $]o,u[$ est prévisible puisque $]o,u[= \bigcup_{n>o}]o,u_n]$. Il en est de même du graphe $[u]$ de u.

F.3 - MESURE DE DOLEANS

On dira que a est une mesure de Doléans si a est une mesure réelle définie (et finie) sur la tribu des ensembles prévisibles qui ne charge pas les ensembles A évanescents (c'est-à-dire tels que 1_A est indistinguable de zéro).

On a donné en D.7 des conditions pour avoir une telle mesure de Doléans ; notamment, si A est un processus croissant continu à droite, tel que $E(A_1 - A_o) < +\infty$, la fonction a définie, pour $F \times]s,t]$ élément $\mathcal{R}$, par $a(F \times]s,t]) = E[1_F(A_t - A_s)]$, se prolonge en une mesure de Doléans : ceci est un cas particulier de D.8 qu'on peut facilement prouver directement à l'aide du théorème de Fubini. *Dans ce cas, on dira que a est la mesure de Doléans associée à A.* Le point fondamental de ce paragraphe (théorème F.12 ci-après) est, étant donné a, de déterminer un processus prévisible A (croissant continu à droite) tel que a soit la mesure de Doléans de A. Ce processus est construit en F.7 ci-après.

F.4 - TEMPS D'ARRET TOTALEMENT INACCESSIBLE

(Lemme et définition)

On dit qu'un temps d'arrêt u est totalement inaccessible s'il satisfait à l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout temps d'arrêt prévisible v, $P[v=u] = 0$

(ii) pour toute suite $(v(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt croissant vers v,

$$P\left\{ [v=u] \cap \left(\bigcap_{n>o} [v(n) < v] \right) \right\} = 0$$

Preuve

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Réciproquement, supposons (i) satisfait et soit $(v(n))_{n>o}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers v. Pour tout n, soit w(n) le temps d'arrêt défini par $w(n) = v(n)$ si $v(n) < v$ et $w(n) = 1$ si $v(n) = v$; la suite $(w(n))_{n>o}$ croît vers le temps d'arrêt prévisible w tel que

$$\left\{ [v=u] \cap \left(\bigcap_{n>o} [v(n) < v] \right) \right\} \subset [u=w] \qquad \text{d'où (ii).}$$

F.5 - DECOMPOSITION D'UN TEMPS D'ARRET (Lemme)

Soit u un temps d'arrêt. Alors il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles $(v(n))_{n>o}$ et un temps d'arrêt totalement inaccessible w tels que

$$[u] \subset \left\{ \left(\bigcup_{n>o} [v(n)] \right) \cup [w] \right\}$$

Preuve

Soit a la borne supérieure des nombres b tels que, il existe une suite $(u(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt prévisibles avec

$b = P\{\omega : \exists n, [u(n)]\ (\omega) = u(\omega)\}$

Cette borne supérieure a est atteinte pour une suite $(v(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt prévisibles. Soit w le temps d'arrêt défini par :

$$w(\omega) = \begin{cases} u(\omega) & \text{si, } \forall n,\ u(\omega) \neq [v(n)]\ (\omega) \\ 1 & \text{si, } \exists n,\ u(\omega) = [v(n)]\ (\omega) \end{cases}$$

(on vérifie immédiatement que w est un temps d'arrêt).

Par définition de a, w est totalement inaccessible.

F.6 - NOTATION $\mathcal{C}$

On notera $\mathcal{C}$ la classe des processus A satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) A est réel, croissant, continu à droite

(ii) $A_o = 0$ et $E(A_1) < +\infty$

(iii) pour tout élément F de $\mathcal{F}$ et pour tout temps d'arrêt u, on a :

$$E(1_F . A_u) = \int_{]o,u]} E(1_F \mid \mathcal{F}_{t-}).\ da$$

où a est la mesure de Doléans de A.

Notons que, si A appartient à $\mathcal{C}$, si u est un temps d'arrêt, le processus A^u, c'est-à-dire le processus A arrêté à u, appartient à $\mathcal{C}$ et la mesure de Doléans a^u associée est définie par $a^u(B) = a(\,]o,u]\cap B)$ pour tout ensemble prévisible B.

F.7 - <u>CONSTRUCTION DE A</u> (Proposition)

Soit a une mesure de Doléans. Il existe alors un processus A appartenant à $\mathcal{C}$ tel que a est la mesure de Doléans de A. De plus, A est unique à l'indistinguabilité près.

<u>Preuve</u>

1°/ La condition F.4.(iii) implique l'unicité de A à une modification près ; la continuité à droite de A implique alors que A est unique à l'indistinguabilité près.

2°/ Pour tout élément t de T et tout élément H de $\mathcal{F}$, soit $v_t(H) = \int_{]o,t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}).da$.
La fonction $v_t(.)$ est définie et σ-additive sur $\mathcal{F}$ (théorème de convergence dominée). On peut donc poser

$$V_t = \frac{dv_t}{dP}$$

et ceci définit, à une modification près, un processus croissant continu à droite en moyenne. Soit (A_t) une modification continue à droite de (V_t).

3°/ Si Y appartient à $L_\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$, on a :

$$\int_{]o,t]} E(Y \mid \mathcal{F}_{u-}).da = \int_\Omega Y.v_t(d\omega)$$

En effet, cette égalité est satisfaite pour Y fonction indicatrice (par définition de v_t) et se conserve par linéarité et convergence dominée.

4°/ (A_t) est adapté puisque :

$$v_t(H) = \int_{]o,t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}).da = \int_{]o,t]} E\big(E(1_H \mid \mathcal{F}_t)\ \ {}_{u-}\big).da$$

$$= \int_\Omega E(1_H \mid \mathcal{F}_t).v_t(\omega) \quad \text{(d'après le 3°/)}$$

5°/ Pour tout élément (F,t) de $\mathcal{F} \times T$, on a :

$$E(1_F.A_t) = v_t(F) = \int_{]o,t]} E(1_F \mid \mathcal{F}_{s-})\ da$$

La condition F.6.(iii) est donc satisfaite si u est un temps d'arrêt étagé (vérification immédiate) ; elle est alors satisfaite si u est un temps d'arrêt quelconque puisqu'un tel temps d'arrêt est limite d'une suite décroissante de temps d'arrêt étagés (cf. le 2°/ de la preuve A.12).

F.8 - <u>LEMME DE "PROJECTION"</u>

Soit u un temps d'arrêt totalement inacessible. Soit B le processus défini par $B = 1_{[u,1]}.1_{[u<1]}$. Pour tout n, soit B^n (resp. C^n) le processus continu à droite (resp. à gauche) défini par :

$$B^n_t = E(B_{(k+1).2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{t+}) \quad si\ k\ 2^{-n} \leq t < (k+1).2^{-n}$$

$$C^n_t = E(B_{(k+1).2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{t-}) \quad si\ k.2^{-n} < t \leq (k+1).2^{-n}$$

Quand n tend vers l'infini, la suite $(B^n)_{n>o}$ (resp. C^n) converge P-p.s. uniformément, vers B (resp. $B_{t-} = 1_{]u,1]}$).

<u>Preuve</u>

1°/ Notons d'abord que B^n et C^n sont définis à l'indistinguabilité près, que les suites de processus $(B^n)_{n>o}$ et $(C^n)_{n>o}$ sont décroissantes et que, pour tout n, $B^n \geq B$.

Soit $\varepsilon > o$. Pour tout n, soit v(n) le temps d'arrêt défini par :

$v(n) = \inf.\{t : B^n_t - B_t > \varepsilon\}$

Soit $v = \sup_{n>o} v(n)$ (la suite $(v(n))_{n>o}$ est croissante).

Pour alléger les notations, on posera : $[v = u] = \{\omega : v(\omega) = u(\omega)\}$ (et de même pour v(n), etc...). Toutes les égalités ou inclusions qui sont indiquées ci-après sont valables sauf sur un ensemble de mesure P-nulle.

2°/ On a $B^n_t \leq 1$ donc $B^n_t = B_t$ si $t \geq u$; ceci implique $[v(n) \geq u] = [v(n) = 1]$
A fortiori, on a donc $[v > u] \subset [v = 1]$

3°/ Soit $H = ([v = u] \cap [v < 1])$
D'après le 2°/, si $\omega \in H$, pour tout n, $v(n) < u = v$ ce qui implique P(H) = O puisque u est totalement inacessible (cf. F.4.(ii)).

4°/ Notons d'abord que l'idée de la preuve qui suit est due à Rao (cf. [RAO-1]).

Pour tout n, soit f(n,.) la fonction définie sur T par $f(n,t) = (k+1).2^{-n}$ si $k.2^{-n} \leq t < (k+1).2^{-n}$

Par construction de v(n), on a :

$E[B^n_{v(n)} - B_{v(n)}] \geq \varepsilon.P([v(n) < 1]) \geq \varepsilon.P([v<1])$

D'une part, $B_{v(n)} = 1_{[v(n)=1 \text{ et } u<1]}$ d'après le 2°/. D'autre part :

$B^n_{v(n)} = E(B_{f(n,v(n))} \mid \mathcal{F}_{v(n)})$

(théorème d'arrêt : cf. D.6)

donc $E(B^n_{v(n)}) = E(B_{f(n,v(n))}) \leq E(B_{f(n,v)})$ (puisque B est croissant). Finalement :

$\varepsilon.P([v<1]) \leq E(B_{f(n,v)}) - P([v(n) = 1 \text{ et } u<1])$

D'une part :

$\lim_{n\to\infty}.E[B_{f(n,v)}] = E(B_v) = P([v \geq u \text{ et } u < 1])$
$P([v = 1 \text{ et } u < 1])$

(d'après le 2°/ et le 3°/).

D'autre part :

$\lim_{n\to\infty}. P([v(n) = 1 \text{ et } u<1]) = P([v=1 \text{ et } u<1])$
(d'après le 2°/).

Ces deux limites sont donc égales donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $P([v<1]) = 0$.

5°/ On a donc prouvé que la suite $(B^n)_{n>0}$ converge uniformément vers B ; or, pour tout n, C^n est le processus "régularisé à gauche" associé à B^n ; par conséquent, la suite $(C^n)_{n>0}$ converge uniformément vers le processus $1_{]u,1]}$ régularisé à gauche de B.

Notons enfin que ce lemme peut se déduire des propriétés générales des "projections prévisibles" au sens de Meyer-Dellacherie (Cf. [DEL-]) ce lemme suffit à nos besoins et évite l'utilisation des "théorèmes de section et projection" et donc du "théorème de capacitabilité".

F.9 - <u>CAS OU A EST CONTINU</u> (Proposition)

Soit A un élément de $\mathcal{C}$ et a sa mesure de Doléans. On suppose que, pour tout temps d'arrêt prévisible u, $a([u]) = 0$. Alors A est continu (à l'indistinguabilité près).

<u>Preuve</u>

1°/ Soit u un temps d'arrêt prévisible et $(u(n))_{n>0}$ une suite qui annonce u. On a :

$0=a([u]) = \lim_{n\to\infty} a(]u(n),u]) = \lim_{n\to\infty}.E[A_u - A_{u(n)}]$

(condition F.5.(iii) avec $F = \Omega$).

$= E(A_u - A_{u-})$

2°/ Soit u un temps d'arrêt totalement inacessible. On définit les processus B et (C^n) associés comme en F.8. Pour tout couple (n,k), on pose $D(n,k) = [k.2^{-n} < u \leq (k+1).2^{-n}]$.

Soit $w(n) = \sum_k (k+1).2^{-n}. 1_{D(n,k)}$. On a :

$E(A_u - A_{u-}) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_k E[1_{D(n,k)}.(A_{(k+1)2^{-n}} - A_{k.2^{-n}})] \right\}$

soit, compte-tenu de F.6.(iii),

$E(A_u - A_{u-}) = \lim_{n\to\infty} \int (C^n_t - 1_{]w(n),1]}).\, da$

et cette limite est nulle d'après F.8.

3°/ Le 1°/ et le 2°/ impliquent que, pour tout temps d'arrêt u, $E(A_u - A_{u-}) = 0$ (cf. F.5) donc A est continu (pour tout ε , considérer : $u = \inf. \{t : (A_t - A_{t-}) \geq \varepsilon\}$).

F.10 - <u>CAS OU a NE CHARGE QUE [u]</u> (Proposition)

Soit A un élément de $\mathcal{C}$. Soit u un temps d'arrêt prévisible. On suppose que la mesure de Doléans a de A ne charge que [u] (c'est-à-dire que $a([u]) = a(\Omega')$). Le processus A est alors prévisible.

<u>Preuve</u>

On a déjà noté que $E(A_u - A_{u-}) = a([u])$ (cf. F.9.1°/) donc $E(A_u - A_{u-}) = E(A_1 - A_0)$ c'est-à-dire que $A_u = A_1$ et $A_0 = A_{u-}$ P-p.s.

(A "saute" en u et est constant ailleurs).

Soit $(u(n))_{n>0}$ une suite qui annonce u. Soit F un élément de $\mathcal{F}$. On a (F.6.(iii)) :

$E(1_F.A_u) = \int E(1_F | \mathcal{F}_{t-}).1_{]0,u]}.\, da$

Or la martingale $E(1_F|\mathcal{F}_{t-})$ arrêtée à u(n) indistinguable de la martingale $E(E(1_F|\mathcal{F}_{u-})|\mathcal{F}_{t-})$ arrêtée à u(n). Il en est donc de même si on arrête ces martingales à u, donc :

$E(1_F.A_u) = \int E[E(1_F|\mathcal{F}_{u-})|\mathcal{F}_{t-}].1_{]0,u]}.\, da$

$= E[E(1_F|\mathcal{F}_{u-}).A_u]$ (F.6.(iii))

donc la variable aléatoire A_u est $\mathcal{F}_{u-}$ - mesurable.

La variable aléatoire A_u est donc limite simple de variables aléatoires A^n_u ,$\mathcal{F}_{u(n)}$ - mesurables ; chaque processus $A^{n+1}_u.1_{]u(n),1]}$ est prévisible (vérification facile), donc il en est de même de leur limite simple $A_n \cdot 1_{[u,1]}$.

F.11 - INTEGRATION D'UNE MARTINGALE PAR RAPPORT A UN PROCESSUS CROISSANT (Proposition)

Soit (M_t) une martingale uniformément bornée continue à droite et (A_t) un processus croissant intégrable adapté continu à droite. On a, pour tout élément t de T,

$$E\left[\int_{]0,t]} M_s \cdot dA_s\right] = E\left[M_t \cdot (A_t - A_0)\right]$$

Preuve

Soit $T = (T \cap]0,t])$.

Soit $(T_n)_{n>0}$ une suite croissante de parties finies de T^* tel que $\bigcup_{n>0} T_n$ soit dense dans T^* et $t \in T_1$ et $0 \in T_1$. Si n est fixé, soit $(t(k))_{1 \leq k \leq q}$ la famille ordonnée des éléments de T_n et soit M^n le processus défini par :

$$M^n = \sum_{k=1}^{q-1} M_{t(k+1)} \cdot 1_{]t(k),t(k+1)]}$$

La suite de processus $(M_t^n)_{n>0}$ converge vers le processus (M_t) (parce que (M_t) est continue à droite) ; si $\sup_{t,\omega} |M_t(\omega)| = K < +\infty$, les processus (M) et (M^n) sont dominés par le processus constamment égal à K :

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il suffit donc de prouver la formule annoncée pour les processus (M^n). Or :

$$E\left[\int_{]0,t]} M_s^n \cdot dA_s\right] = \sum_{k=1}^{q} E\left[M_{t(k+1)} \cdot (A_{t(k+1)} - A_{t(k)})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{q} E\left[M_t \cdot (A_{t(k+1)} - A_{t(k)})\right]$$

$$= E\left[M_t \cdot (A_t - A_0)\right]$$

F.12 - THEOREME DE MEYER

1°/ Soit A un processus croissant, adapté, continu à droite, tel que $A_0 = 0$ et $E(A_1) < +\infty$. Alors le processus A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si A est prévisible.

2°/ Soit a une mesure de Doléans positive (cf. F.3). Il existe un processus A croissant, prévisible, continu à droite, tel que $A_0 = 0$, $E(A_1) < +\infty$ et qui admet a comme mesure de Doléans. Ce processus A est unique à l'indistinguabilité près.

Preuve

a) Soit a une mesure de Doléans positive. On va commencer par décomposer a en la somme $(b+d)$ de deux mesures de Doléans, b étant portée par une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles et d ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt prévisible. Soit $\bar{c}$ la borne supérieure des nombres $\bar{b}$ satisfaisant à la condition suivante :

(i) il existe une suite $(u(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt prévisible et une suite $(b_n)_{n>0}$ de mesures de Doléans telles que :

$$\bar{b} = \sum_{n>0} b_n(\Omega'), \quad \sum_{n>0} b_n(.) \leq a(.)$$

et, pour tout n, $b_n(\Omega') = b_n\left([u(n)]\right)$.

On vérifie immédiatement que cette borne supérieure est atteinte pour un couple de suites $(u(n), b_n)_{n>0}$ satisfaisant à la condition (i) avec $\bar{b} = \bar{c}$.

Soit alors, la mesure de Doléans d définie par $d(.) = a(.) - \sum_{n>0} b_n(.)$; soit D (resp. B^n) l'élément de $\mathcal{C}$ associé à d (resp. b_n) comme indiqué en F.7 ; la série de terme général $b_n(\Omega') = E(B_1^n)$ étant convergence, la suite de processus

$$\left(\sum_{k=1}^{n} B^k\right)_{n>0}$$

converge P-p.s. uniformément par trajectoires (Borel-Cantelli) vers un processus B qui appartient à $\mathcal{C}$ et de mesure de Doléans b où $b(.) = \sum_{n>0} b_n(.)$.

Le processus D est continu et donc prévisible (cf. F.9) puisque d ne charge aucun graphe de temps d'arrêt prévisible (par définition de $\bar{c}$). De plus, chaque processus B^n est prévisible (cf. F.10) donc B est prévisible. Or, le processus A appartenant à $\mathcal{C}$ associé à a comme indiqué en F.7 est indistinguable de $B + D$ (unicité d'un élément de $\mathcal{C}$ de mesure de Doléans $a = b + d$ donnée). Le processus A est donc prévisible : On a prouvé la moitié du 1°/ et la moitié du 2°/ à savoir : $A \in \mathcal{C}$ implique A prévisible et a mesure de Doléans implique qu'il existe A prévisible associé comme indiqué au 2°/.

b) Soient A et B deux processus croissants prévisibles continus à droite, tels que $A_0 = B_0 = 0$ et $E(A_1) < +\infty$, $E(B_1) < +\infty$. On suppose que A et B admettent même mesure de Doléans et on veut prouver que A et B sont indistinguables ; pour cela, on peut supposer que A et B sont uniformément bornés par n (il suffit d'arrêter A et B au temps d'arrêt $w(n) = \inf.\{ t : A_t + B_t \geq n \}$). Or $M = A-B$ est une martingale, donc :

$$E(M_t A_t) = E\left(\int_{]0,t]} M_s \cdot dA_s\right)$$

(cf. F.11)

$$= \int_{]0,t]} M_s \cdot da$$

(cette deuxième égalité est vraie pour tous les processus prévisibles M puisqu'elle est vraie pour tous les processus de la forme $1_{F \times]s,t]}$ avec $(F \times]s,t]$ élément de $\mathcal{R}$).

De même, $E[M_t B_t] = \int_{]o,t]} M_s.da$. La différence donne $E(M_t^2) = E[M_t(A_t - B_t)] = 0$, donc A et B sont indistinguables. Ceci achève la preuve du 2°/.

c) Soit A un processus prévisible comme indiqué au 1°/. Soit a sa mesure de Doléans. Soit B l'élément de $\mathcal{C}$ associé à a comme indiqué en F.7 ; B est prévisible (a) ci-dessus) donc B est indistinguable de A (b) ci-dessus) ce qui achève la preuve du 1°/.

F.13 - MAJORATION D'UN SAUT PREVISIBLE (Lemme)

Soit Z une surmartingale (réelle) qui admet a comme mesure de Doléans. Soit A le processus prévisible appartenant à $\mathcal{C}$ associé à a. Soit u un temps d'arrêt prévisible. On suppose que, pour tout élément (ω,t) de $(\Omega \times T)$, $(Z_t(\omega)) \leqslant d$ (où d est une constante). On a alors :

$$E[(A_u - A_{u^-})^2] \leqslant 2d\, E(A_u - A_{u^-})$$

Preuve

Notons qu'on a, en fait, plus que cela, mais la majoration ci-dessus nous suffira pour prouver F.14. On a :

$$E[(A_u - A_{u^-})^2] = E\left[\int 1_{[u]} \cdot (A_s - A_{s^-}).dA_s\right]$$

Puisque $1_{[u]}$ et $(A_s - A_{s^-})$ sont des processus prévisibles et que A et Z ont mêmes mesures de Doléans, on a aussi :

$$E[(A_u - A_{u^-})^2] = E\left[\int 1_{[u]} \cdot (A_s - A_{s^-}).dZ_s\right]$$

$$\leqslant 2d.E|A_u - A_{u^-}| \leqslant 2d.E(A_u - A_{u^-})$$

F.14 - DECOMPOSITION D'UNE MARTINGALE

Soit M une martingale réelle cadlag. Il existe une martingale réelle Q cadlag localement de carré intégrable et un processus réel cadlag V à variation bornée (par trajectoires) tels que M = V+Q.

Ceci prouve notamment qu'une martingale réelle est un processus parfaitement régional. (cf. C.3 et D.10).

Preuve

Puisque $M_t = E(M_1^+ | \mathcal{F}_t) - E(M_1^- | \mathcal{F}_t)$, on peut supposer que M est positive, ce que nous ferons désormais. Par localisation, on se ramène au cas où il existe un temps d'arrêt u et une constante d tels que $M_t(\omega) \leqslant d$ pour $t < u(\omega)$ et $M_t(\omega) = M_u(\omega)$ pour $t \geqslant u(\omega)$ (considérer les temps d'arrêt w(n) définis par $w(n) = \inf.\{t : M_t \geqslant n\}$ et arrêter à w(n)). Dans ce cas, on pose :

$$Z_t = - M_t \cdot 1_{[o,u[}(t) \text{ et } B_t = M_t \cdot 1_{[u,1]}(t).$$

Soit a la mesure de Doléans de B (et donc de la sous-martingale Z) et soit A le processus prévisible appartenant à $\mathcal{C}$ associé à a. Pour tout n, on pose $v(n) = \inf.\{t : A_t \geqslant n\}$. Puisque

$$0 = \lim.P[v(n) < 1],$$

il suffit de montrer que M arrêtée à v(n) admet la décomposition indiquée.

Puisque le processus prévisible associé à B et arrêté à v(n) est le processus prévisible associé au processus B arrêté à v(n), on peut, pour alléger les notations, supposer que v(n) = u, ce qu'on fera désormais. On a alors :

$E[(A_{u^-})^2] \leqslant n^2$ (par construction de v(n))

$E[(A_u - A_{u^-})^2] \leqslant d.E(A_u - A_{u^-})$ (cf. F.13)

donc $E(A_1^2) = E(A_u^2) < +\infty$

Or : M = (A-Z) + B-A où (B-A) est un processus à variation bornée et (A-Z) est une martingale, (A et Z ont même mesure de Doléans) de carré intégrable $(E(Z_1^2) \leqslant d^2$ et $E(A_1^2) < +\infty)$.

F.15 - REMARQUE SUR LA CONTINUITE A DROITE DES TRIBUS

Pour alléger la présentation, on a supposé la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ continue à droite ; s'il n'en est pas ainsi, on considère la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$; le processus A associé à une mesure de Doléans a est prévisible relativement à la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$ et donc, aussi relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. (cf. A.11)

F.16 - ENSEMBLES ET PROCESSUS OPTIONNELS (Définition)

On appelle tribu des ensembles optionnels la tribu de parties de $\Omega' = \Omega \times (T \setminus \{0\})$ engendrée par les intervalles stochastiques $]o,u[$ pour tous les temps d'arrêt u. On notera θ cette tribu. On dit qu'un processus est optionnel s'il est mesurable par rapport à cette tribu.

Notons que la tribu des prévisibles est contenue dans la tribu des optionnels (puisque $]o,u] = \bigcap_{n>o}]o,u+\frac{1}{n}[$) ; réciproquement, une tribu qui contient la tribu des prévisibles et tous les graphes de temps d'arrêt contient la tribu des optionnels (puisque $]o,u[=]o,u] \setminus [u]$). On a aussi le résultat suivant :

F.17 - CONTINUITE A DROITE ET OPTIONNALITE

(Proposition)

Soit X un processus cadlag adapté à valeurs dans l'espace de Banach H ; alors X est optionnel relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$.

Preuve

1°/ On va d'abord montrer que, si u est un temps d'arrêt, le processus Y défini par $Y=X_u.1_{[u,1]}$ est optionnel. On vérifie facilement que la variable aléatoire X_u est $\mathcal{F}_u$-mesurable (cf. A.2), puisque X est adapté ; il suffit donc d'étudier le cas où X_u est $\mathcal{F}_u$-étagée (puisque X_u est limite simple de telles variables aléatoires). On suppose donc

$$X_u = \sum_{i\in I} a_i.1_{F(i)}$$

avec, pour tout i, $a_i \in H$ et $F(i) \in \mathcal{F}_u$; dans ce cas, $Y = \sum_{i\in I} a_i.\ 1_{F(i)}\ .\ 1_{[u,1]}$; si on pose $u(i) = u$ si $\omega \in F(i)$ et $u(i) = 1$ si $\omega \notin F(i)$, on a $Y = \sum_{i\in I} a_i.\ 1_{[u(i),1]}$ et u(i) est un temps d'arrêt pour tout i, donc Y est optionnel.

2°/ Pour tout $n>0$, soit $(u(n,k))_{k>o}$ la suite de temps d'arrêt (relativement à la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$ (cf. A.9)) définie par récurrence par : $u(n,o) = 0$

$$u(n,k+1) = \inf.\left\{t : ||X_t - X_{u(n,k)}|| > \frac{1}{n}\right\}$$

Soit X^n le processus défini par $X_t = X_{u(n,k)}$ pour $u(n,k) \leq t < u(n,k+1)$.

Le processus X^n est bien défini puisque

$$[u(n,k) < 1] \underset{k\to\infty}{\downarrow} \emptyset$$

et il est optionnel (1°/ ci-dessus) ; or, la suite de processus $(X^n)_{n>o}$ converge uniformément vers le processus X donc X est optionnel.

F.18 - INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UN PROCESSUS CONTINU

Soit X un processus, à valeurs dans l'espace de Banach, satisfaisant aux conditions indiquées en B.5 (c'est-à-dire que X est H-J-K-régional) et à trajectoires continues. On peut toujours supposer que a ne charge pas les ensembles évanescents et les graphes de temps d'arrêt prévisibles. Soit A le processus prévisible continu, associé à la mesure de Doléans a comme indiqué en F.12.2°/. Soit $\bar{a}$ la mesure définie sur $(\Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_T)$ par

$$\bar{a}(B) = \iint 1_B.dA_t(\omega)$$

Soit $\hat{a}$ la restriction de $\bar{a}$ à la tribu $\mathcal{O}$ des optionnels. Alors, quel que soit l'espace de Banach H, $\mathcal{E}(H)$ (cf. B-2) est dense dans $L_2^H(\Omega',\theta,\hat{a})$ donc on peut définir l'intégrale stochastique $\int Y\,dX$ pour tout processus optionnel Y uniformément borné, à valeurs dans H, exactement comme en B.7.

Preuve

On considère les hypothèses et notations indiquées en B.5. Soit b l'enveloppe supérieure des mesures positives majorées par a et portées par des ensembles évanescents ou des graphes de temps d'arrêt prévisibles ; si on pose a' = a-b, on vérifie que la condition B.5.(ii) est satisfaite quand on remplace a par a' ; on peut donc toujours se ramener au cas où a ne charge ni les ensembles évanescents, ni les graphes de temps d'arrêt prévisibles. Le processus A est alors continu (cf. F.9) et bien défini.

La fonction ensembliste $\bar{a}$ est une mesure (théorème de Fubini) dont la restriction à $\mathcal{R}$, et donc à la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles, coïncide avec a.
De plus, pour tout temps d'arrêt u,

$$\hat{a}([u]) = E(A_u - A_{u-}) = 0$$

L'adhérence de $\mathcal{E}(H)$ dans $L_2^H(\Omega',\mathcal{O},\hat{a})$ contient donc tous les processus de la forme $h.1_{[u]}$ avec $h \in H$ et u temps d'arrêt quelconque ; elle contient donc tous les processus optionnels uniformément bornés (cf. la remarque qui suit F.16).

G - QUELQUES INEGALITES POUR LES MARTINGALES REELLES

-:-

G.1 - DONNEES ET NOTATIONS

Dans tout ce paragraphe G, on se propose de prouver quelques inégalités relatives à une martingale réelle cadlag $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, X_t)_{t\in T}$. Pour la commodité des notations, on prendra $T = [0,\infty]$. On posera :

$$N_1(X) = E(\sup_{t\in T} |X_t|),$$

$$N_2^+(X) = \limsup_{n\to\infty} E\left[\left\{\sum_{k\geq 0} (X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}})^2\right\}\right]^{1/2}$$

$$N_2^-(X) = \liminf_{n\to\infty} E\left[\left\{\sum_{k\geq 0} (X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}})^2\right\}\right]^{1/2}$$

Notons que $N_2^+(X) = N_2^-(X) = E(\sqrt{[X_\infty, X_\infty]})$ si $[X,X]$ désigne le processus variation quadratique de X comme défini en C.8.4°/ ; on sait que ce processus est bien défini (cf. F.14) ; toutefois, on n'utilisera pas ce résultat F.14, mais on utilisera seulement D.10

On pose aussi : $N_3(X) = \sup E(|M_\infty|)$ cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des martingales M réelles cadlag telles que $M = \int Y.dX$ où Y est un processus prévisible de la forme

$$Y = \sum_{k=1}^{n-1} 1_{]u(2k),u(2k+1)]} \quad \text{où } (u(j))_{1\leq j\leq 2n}$$

est une suite croissante de temps d'arrêt. Cette quantité n'est d'ailleurs pas modifiée si on impose à ces temps d'arrêt d'être étagés, c'est-à-dire si $Y = 1_A$ avec $A \in \mathcal{A}$ (on utilise D.5 et le fait que tout temps d'arrêt est limite décroissante d'une suite de temps d'arrêt étagés). Le point fondamental est que N_1, N_2 et N_3 définissent trois "normes" équivalentes ; plus précisément, on a :

G.2 - THEOREME

Avec les données et notations indiquées en G.1, on a, si $X_0 = 0$:

$$N_1(X) \leq 2(1+\sqrt{2})\, N_3(X)$$

$$N_3(X) \leq 8.N_2^-(X) \ ;$$

$$N_2^+(X) \leq 45.N_1(X)$$

Preuve

On a aussi, évidemment, $N_2^+(X) \geq N_2^-(X)$. La preuve sera décomposée en plusieurs étapes ; la première inégalité sera prouvée en G.3, la seconde en G.5, la troisième en G.7.

G.3 - PREUVE DE $N_1(X) \leq 6.N_3(X)$

Suivant l'usage, si Z est une variable aléatoire réelle, on notera $Z^+ = \sup(Z,0)$ et $Z^- = \sup(-Z,0)$.

1°/ On va noter $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des martingales réelles $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{G}_k, X_k)_{1\leq k\leq n}$ qui, pour chaque trajectoire, sont constantes après "leur première décroissance stricte", c'est-à-dire que :

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé,
- $(\mathcal{G}_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$,
- X_n appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{G}_n, P)$ et $E(X_n | \mathcal{G}_1) = 0$
- Pour tout k, $X_k = E(X_n | \mathcal{G}_k)$,
- $X_{k+1}(\omega) < X_k(\omega)$ implique, $\forall j \geq 1$, $X_{k+j}(\omega) = X_n(\omega)$

Soit d un réel strictement positif. Si X est un tel élément de $\mathcal{S}_n$, on posera $X^* = \sup_{1\leq k\leq n} X_k$.
On dira qu'une martingale Y est une transformée de X (cf. [Bur]) si $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{G}_k, Y_k)_{1\leq k\leq n}$ est une martingale et s'il existe une partie K de $\{k : 1\leq k\leq n-1\}$ telle que $Y_n = X_1 + \sum_{k\notin K} (X_{k+1} - X_k)$.

Notons que, si X appartient à $\mathcal{S}_n$ et si Y est une transformée de X, Y appartient aussi à $\mathcal{S}_n$. Notons aussi que $Y_k - Y_1 = \int_1^k Z\, dX$ où Z est le processus prévisible $\sum_{j\notin K} 1_{]j,j+1]}$. Enfin, si Y est une transformée de X et Y' une transformée de Y, Y' est une transformée de X. On va d'abord prouver que, si X appartient à $\mathcal{S}_n$, on a :

$$E(X^*) \leq \sup . [E(M_n^-) + 3E(M_n^+)]$$

cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des transformées M de X. Pour cela, on se donne donc un élément $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{G}_k, X_k)_{1\leq k\leq n}$ de $\mathcal{S}_n$

Pour tout k, soit $A(k) = \{\omega : X_{k+1}(\omega) < X_k(\omega)\}$; puisque X appartient à $\mathcal{S}_n$, les ensembles $(A(k))_{1\leq k\leq n-1}$ sont deux à deux disjoints. Supposons d'abord qu'il existe un entier k tel que

$$E(X_{k+1}^- . 1_{A(k)}) \leq d.E(X_k . 1_{A(k)}) .$$

On considère le plus petit de ces tels entiers, soit k, et on considère la transformée Y de X définie par $Y_n = X_n - (X_{k+1} - X_k)$. Si $Y^* = \sup_{1\leq k\leq n} Y_k$, et si $B(k) = \{\omega : X_{k+1}(\omega) > X_k(\omega)\}$, on a :

si $\omega \notin B(k)$, $X^*(\omega) = Y^*(\omega)$;

si $\omega \in B(k)$, $X^*(\omega) = Y^*(\omega) + X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)$

On en déduit :

$$E(X^*) = E(Y^*) + E[1_{B(k)}\cdot(X_{k+1} - X_k)]$$
$$= E(Y^*) + E[1_{A(k)}\cdot(X_k - X_{k+1})]$$

(puisque X est une martingale)

$$\leq E(Y^*) + E(1_{A(k)}\cdot X_k) + E(X^-_{k+1}\cdot 1_{A(k)})$$

(puisque $\omega \in A(k)$ implique $X_k(\omega) \geq 0$)

$$\leq E(Y^*) + (1+d)\ E(1_{A(k)}\cdot X_k)$$
$$\leq E(Y^*) + (1+d).E(1_{A(k)}\cdot Y_n)$$

On reprend le même raisonnement pour Y ; s'il existe un j tel que $E(Y^-_{j+1}) \leq d.E[Y_j\cdot 1_{A(j)}]$ (les ensembles A(j) pour j > k n'ayant pas changé) on considère de même le plus petit de ces tels entiers j, soit j, et la martingale Z définie par $Z_n = Y_n - (Y_{j+1} - Y_j)$; en itérant le procédé, on obtient, au bout de, au plus, n étapes, une martingale M transformée de X telle que :

$$E(X^*) \leq E(M^*) + (1+d) \sum_{k\in K} E(1_{A(k)}\cdot M_n)$$

où K est une partie finie de $\{j : 1 \leq j \leq n\}$ telle que, si k appartient à K, $1_{A(k)}\cdot M_n = 1_{A(k)}\cdot M_k$; de plus, cette martingale est telle que, si $k \notin K$:
$$E(M^-_{k+1}\cdot 1_{A(k)}) > d.\ E(M_k\cdot 1_{A(k)}).$$

Si on pose $D = \Omega \setminus \bigcup_{k\notin K} A(k)$, on arrive donc à

$$E(M^*) = E(M_n\cdot 1_D) + \frac{1}{d} \sum_{k\notin K} E(1_{A(k)}\cdot M_k) \quad \text{et}$$

$$E(X^*) \leq E(M^*) + (1+d) \sum_{k\in K} E(1_{A(k)}\cdot M_k) \quad \text{et}$$

$$\sum_{k\notin K} E(1_{A(k)}\cdot M_k) < \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n-1} E(1_{A(k)}\cdot M^-_{k+1}) < \frac{1}{d} E(M^-_n)$$

ce qui donne : $E(X^*) \leq \frac{1}{d} E(M^-_n) + (2+d)\ E(M^+_n)$

soit, si on choisit $d = \sqrt{2} - 1$

$$E(X^*) \leq (1+\sqrt{2})\ E(|M_n|)$$

2°/ Considérons maintenant une martingale réelle cadlag $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F},X_t)_{t\in T}$ avec $T=[0,\infty]$ et $X_0=0$. Soit a une constante strictement supérieure à 1 ; soit $(u(n))_{n>0}$ la suite de temps d'arrêt définie par $u(n) = \inf.\{t : X_t > d^n\}$; d'une part, la martingale $(X_{u(k)})_{k\leq n}$ appartient à $\mathcal{S}_n$; d'autre part, $\sup_{t\in T} X_t \leq d.\ \sup_{n>0} .\ \sup_{k\leq n} .\ X_{u(k)}$

Ceci et le 1°/ montrent que :

$$E(\sup_{t\in T} .X_t) \leq a(1+\sqrt{2})\ \sup.E(|M_\infty|)$$

cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des martingales M telle que $M = \int U.dX$ où

$U = \sum_{k>0} 1_{]v(k),v(2k+1)]}$ et $(v(k))_{k>0}$ est une suite croissante de temps d'arrêt. Ceci est vrai quel que soit a > 1 ; on a donc la même inégalité avec a = 1 ; enfin, on a évidemment :

$$E(\sup_{t\in T} |X_t|) \leq E(\sup_{t\in T} (X_t) + \sup_{t\in T} (-X_t))$$

ce qui donne finalement, $N_1(Z) \leq 2(1+\sqrt{2})\ N_3(Z)$.

G.4 - LEMME PRELIMINAIRE

Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé et une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soient V, X et Z trois variables aléatoires appartenant à $L_1(\Omega,\mathcal{F},P)$. On suppose, de plus, que $E(Z\,|\mathcal{G}) = 0$, que V et X sont $\mathcal{G}$-mesurables et que, si $A = \{\omega : Z(\omega) \neq 0\}$,

$$|X|.1_A \geq |V|.1_A$$

On a alors :

$$E(|X+Z| - |X|) \leq 6\ E(\sqrt{V^2+Z^2} - |V|)$$

Preuve

On peut supposer $0 \leq V \leq X$, sinon on considère séparément les quatre domaines où V et X gardent des signes constants. Dans ce cas, on pose : $B = \{\omega : (X+Z)(\omega) < 0\}$. On a :

$E(|X+Z| - |X|) = 2\ E(|X+Z|\ .1_B)$ (car $E(Z|\mathcal{G})=0$)

Or, si $\omega \in B$, $|Z(\omega)| \geq |X(\omega)| \geq |V(\omega)|$ donc $3(\sqrt{V^2+Z^2} - |V|)\ (\omega) \geq |Z(\omega)|$

En effet, si v et z sont deux nombres réels avec $0 \leq v \leq z$, $3\sqrt{v^2+z^2} \geq 3v + z$ (élever au carré) on a donc :

$$6\ E(\sqrt{V^2+Z^2} - |V|) \geq 2E(|Z|.1_B) \geq 2\ E(|X+Z|.1_B)$$
$$\geq E(|X+Z| - |X|)$$

G.5 - $N_3(X) \leq 8.N_2(X)$

Preuve

La définition de $N_2(X)$ montre que, si $Z = \int YdX$ avec Y processus prévisible comme indiqué à la fin de G.1, $N^-_2(Z) \leq N^-_2(X)$ (cf. D.10.3°/) ; il suffit donc de prouver que, si X est une martingale, et si $(t(k))_{1\leq k\leq q}$ est une suite finie croissante de dyadiques appartenant à T, on a :

$$E\left\{\left[\sum_{k=1}^{q-1} (X_{t(k+1)} - X_{t(k)})^2\right]^{1/2}\right\} \geq 8\, E(|X_q - X_1|)$$

On suppose donc désormais que X est une martingale réelle qui admet $T = \{ k : 1 \leq k \leq q \}$ comme ensemble des temps et telle que $X_1 = 0$ et $E(|X_q|) < +\infty$. Notons d'ailleurs que la preuve qui suit reste valable si l'ensemble T n'est pas fini avec quelques modifications faciles.

Soit V la racine carrée de la variation quadratique de X, c'est-à-dire que $V_1 = 0$ et

$$V_{k+1} = \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} (X_{j+1} - X_j)^2 \right\}^{1/2}$$

Pour tout k, soit $A(k) = \{\omega : V_k \leq |X_k|\}$.
Soit S la variable aléatoire définie par :

$$S = \sum_{k=1}^{q-1} \left[1_{A(k)} \cdot (|X_{k+1}| - |X_k|)\right]$$

D'après le lemme G.4, on a :

$$E(S) \leq 6 \sum_{k=1}^{q-1} E\left[1_{A(k)} \cdot \sqrt{V_k^2 + (X_{k+1} - X_k)^2} - V_k\right]$$

$$\leq 6 \sum_{k=1}^{q-1} E\left[\sqrt{V_k^2 + (X_{k+1} - X_k)^2} - V_k\right]$$

$$\leq 6\, E(V_q)$$

On va maintenant raisonner "par trajectoires"; on considère donc un élément ω fixé de Ω et on considère les diverses variables aléatoires en ce point ω ; pour alléger l'écriture, le symbole ω sera omis.

Pour ω fixé, soit j le plus petit entier $(1 \leq j \leq q)$ tel que, pour tout $k > 0$, $\omega \in A_{k+j}$. On a :

$$|X_q| \leq \sum_{k=1}^{q-j-1} (|X_{k+j+1}| - |X_{k+j}|) + (|X_{k+1}| - |X_k|) + |X_k|$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{q-j-1} (|X_{k+j+1}| - |X_{k+j}|) \leq S$$

$$|X_{k+1}| - |X_k| \leq |X_{k+1} - X_k| \leq V_q$$

$$|X_k| \leq V_k \quad \text{(par construction de k)}$$

On en déduit :

$$|X_q| \leq S + 2V_q \quad \text{soit} \quad E(|X_q|) \leq 8.E(V_q).$$

G.6 - LEMME PRELIMINAIRE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_t)_{1<k<q})$ une base probabilisée de processus. Soit $(Y_k)_{1 \leq k \leq q}$ une martingale (pour cette base) de carré intégrable . Soit W_1 une variable aléatoire positive $\mathcal{G}_1$-mesurable de carré intégrable et telle que $W_1 \geq Y_1$

On pose :

$$W_q = \left[W_1^2 + \sum_{k=1}^{q-1} (Y_{k+1} - Y_k)^2\right]^{1/2}$$

On suppose que la martingale Y est telle que, si $|Y_k| \geq 2.W_1$, quel que soit $j \geq 1$, $Y_{k+j} = Y_k = Y_q$.

On pose $W'_q = W_q \vee |Y_q|$. On a alors :

$$E(W'_q - W_1) \leq 9\; E\left[\, |Y_q - Y_1|\, \right]$$

Preuve

Il suffit évidemment de prouver que :

$$E(W_q - W_1) \leq 8\; E(|Y_q - Y_1|)$$

Pour tout k, soit

$$A(k) = \{ \omega : |Y_k|(\omega) \geq 6W_1 \quad \text{et} \quad |Y_{k-1}(\omega)| < 2W_1 \}$$

Les ensembles $(A(k))_{2 \leq k \leq q}$ sont deux à deux disjoints ; de plus $|Y_k - Y_{k-1}| . 1_{A(k)} \geq 4W_1 . 1_{A(k)}$

et $\quad Y_k . 1_{A(k)} = Y_q . 1_{A(k)}$. On pose $B(k) = \Omega \setminus A(k)$

On a :

$$W_q = \left\{W_1^2 + \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 . 1_{A(k)} + \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 . 1_{B(k)}\right\}^{1/2}$$

L'inégalité $\sqrt{a^2 + x^2} \leq a + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}$ (valable quels que soient les nombres réels a et x si a>o) donne :

$$W_q \leq C + D \quad \text{avec :}$$

$$C = \left\{ W_1^2 + \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 . 1_{A(k)} \right\}^{1/2}$$

$$D = \frac{1}{2W_1} \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 . 1_{B(k)}$$

D'une part, si w et y sont deux nombres réels positifs, on a :

$$\sqrt{w^2 + y^2} \leq w + y \quad \text{donc}$$

$$C \leq W_1 + \sum_{k=2}^{q} |Y_k - Y_{k-1}| \cdot 1_{A(k)}$$

D'autre part :

$$D = \frac{1}{2W_1} \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 - \frac{1}{2W_1} \sum_{k=2}^{q} (Y_k - Y_{k-1})^2 . 1_{A(k)}$$

Puisque $(Y_k)_{1 \leq k \leq q}$ est une martingale et que W_1 est $\mathcal{G}_1$-mesurable, l'espérance de la première somme qui précède est égale à $E\left[\frac{1}{2W_1} . (Y_q - Y_1)^2\right]$;

on a donc $E(D) = E(D')$ avec :

$$D' = \frac{1}{2W_1}(Y_q - Y_1)^2 - \frac{1}{2W_1}\sum_{k=2}^{q}(Y_k - Y_{k-1})^2 \cdot 1_{A(k)}$$

$$= \frac{1}{2W_1}\sum_{k=2}^{q}\left[(Y_q - Y_1)^2 - (Y_k - Y_{k-1})^2\right] \cdot 1_{A(k)}$$

$$+ \frac{1}{2W_1}(Y_q - Y_1)^2 \cdot 1_B$$

où $B = \bigcap_{k=2}^{q} B(k) = \Omega \setminus \left[\bigcup_{k=2}^{q} A(k)\right]$

Or, si $\omega \in A(k)$,

$$|Y_k - Y_{k-1}| = |Y_q - Y_{k-1}| \leq 2\,|Y_q - Y_1|$$

(puisque $|Y_q| \geq 6W_1$, $|Y_{k-1}| \leq 2W_1$ et $|Y_1| \leq 2W_1$)

On a donc finalement :

$C + D' \leq W_1 + 8\,|Y_q - Y_1|$ soit

$E(W_q) \leq E(C + D') \leq E(W_1) + 8\,E(|Y_q - Y_1|)$.

G.7 - $\underline{N_2^+(X) \leq 45.N_1(X)}$

Preuve

1°/ Compte-tenu de la définition donnée de N_2^+, il suffit de prouver cette inégalité pour une martingale X dont l'ensemble des temps T est fini, soit $T = \{k : 1 \leq k \leq q\}$: on se limitera donc désormais à ce cas $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_k, X_k)_{1\leq k\leq q}$.
Soit, alors, pour tout n, la martingale $(X_k^n)_{1\leq k\leq q}$ définie par $X_k^n = E(X_q^n | \mathcal{F}_k)$ avec $X_q^n = X.1_{\{|X|\leq n\}}$

D'après le théorème de Lebesgue, on a $N_2(X) = \lim_{n\to\infty} . N_2(X^n)$ et $N_1(X) = \lim_{n\to\infty} . N_1(X^n)$;
Il suffit donc de prouver l'inégalité annoncée pour les martingales X^n ; on supposera donc, désormais, que X est une martingale de carré intégrable.

On notera V^2 la variation quadratique de X, soit :

$$V_k = \left[\sum_{j=1}^{k-1}(X_{j+1} - X_j)^2\right]^{1/2}$$

On notera $X^* = \sup_{1\leq k\leq q} |X_k|$.

2°/ On construit la suite de temps d'arrêt $(u(n))_{n>o}$ et les suites de variables aléatoires $(W_n)_{n>o}$ et $(W'_n)_{n>o}$ par récurrence de la façon suivante :
$u(1) = 1$ et $W_1 = \varepsilon + |X_1|$ avec $\varepsilon > o$ puis,

$u(n+1) = \inf.\{t : t \geq u(n),\ |X_t| > 2W'_n\}$

$$W_{n+1} = \left[W'^2_n + \sum_{k=1}^{q-1}(Y_{k+1}^n - Y_k^n)^2\right]^{1/2}$$

$W'_{n+1} = \mathrm{Sup.}\,\{W_{n+1},\ |X_{u(n+1)}|\}$

avec $Y_k^n = X_{[k \vee u(n) \wedge u(n+1)]}$.

On pose $\mathcal{G}_k^n = \mathcal{F}_{[k\vee u(n) \wedge u(n+1)]}$.

Pour tout n (fixé), la martingale $(\mathcal{G}_k^n, Y_k^n)_{1\leq k\leq q}$ satisfait aux conditions du lemme G.6, donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(W'_{n+1} - W'_n) \leq \varepsilon + 9\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|X_{u(n+1)} - X_{u(n)}|\right]$$

Or, pour tout n, $V_{u(n)} \leq W'_n$, donc :

$$E(V_q) \leq \varepsilon + 9\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_{u(n+1)} - X_{u(n)}|).$$

Pour tout n, soient $A(n) = \{\omega : u(n) < u(n+1)\}$, $B(n) = \{\omega : \omega \in A(n)$ et $[u(n+1)](\omega) = q\}$ et $C(n) = A(n)\setminus B(n)$. Par construction des temps d'arrêt $u(n)$, si $\omega \in C(n)$, $|X_{u(n+1)}(\omega)| \geq 2\,W'_n \geq 2|X_{u(n)}(\omega)|$ donc, dans ce cas :

$$|X_{u(n+1)} - X_{u(n)}|(\omega) \leq 3\left[|X_{u(n+1)}(\omega)| - |X_{u(n)}(\omega)|\right]$$

On a donc :

$$\sum_{n=1}^{q}|X_{u(n+1)} - X_{u(n)}| \leq 3\sum_{n=1}^{\infty}\left[|X_{u(n+1)}| - |X_{u(n)}|\right] \cdot 1_{C(n)}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}|X_{u(n+1)} - X_{u(n)}| \cdot 1_{B(n)}$$

Les ensembles $(B(n))_{n>o}$ étant deux à deux disjoints, la deuxième somme est majorée par $2\,X^*$, les ensembles $(C(n))_{n>o}$ allant en décroissant, la première somme est majorée par $3\,\mathrm{Sup}_{k\leq q}(|X_k| - |X_1|) \leq 3X^*$
Finalement, on a donc : $E(V_q) \leq \varepsilon + 45\,E(X^*)$
ce qui donne l'inégalité annoncée puisque ε est aussi petit que l'on veut.

G.8 - $\underline{\text{L'ESPACE } H_1}$

Une base probabilisée de processus étant donnée, on note H_1 l'espace des martingales réelles cadlag X telles que $N_2^+(X) < +\infty$. Soit X un élément de H_1.

Pour tout dyadique t, posons :

$$A_t = \lim_{n\to\infty}.\sup.\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{[(k+1)2^{-n}]\wedge t} - A_{(k.2^{-n})\wedge t}\right]^2\right\}$$

Le processus croissant (A_t) est défini à l'indistinguabilité près et fini P-p.s. ; on peut alors le prolonger en un processus croissant cadlag défini pour tout élément t de T : on notera encore A ce prolongement. On peut noter que A est le "processus variation quadratique de X" comme défini en C.8.4°/, processus qu'on savait déjà être bien défini compte-tenu de F.14 : toutefois, nous n'utiliserons pas ces résultats pour ce qui suit. Par ailleurs, il est facile, sans utiliser F.14, de prouver que X est un processus régional au sens indiqué en B.4 ; toutefois, si X appartient à H_1, il est plus intéressant de construire l'intégrale stochastique $\int Y\,dX$ comme suit :

Pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé (cf. B.2), posons $N(Y) = E\left[(\int Y^2 dA)^{1/2}\right]$; ceci définit une semi-norme sur $\mathcal{E}$ telle que, pour tout ensemble B appartenant à $\mathcal{A}$,

$$\left\|\int_B Y\,dX\right\|_{L_1(\Omega,\mathcal{F},P)} \leq 8\,N(Y) \qquad \text{(cf. G.5)}$$

L'application $Y \rightsquigarrow \int_B Y\,dX$ est donc une application continue de $\mathcal{E}$, muni de la semi-norme $N(Y)$, dans $L_1(\Omega,\mathcal{F},P)$; cette application se prolonge donc, de façon unique, en une application continue définie sur l'adhérence de $\mathcal{E}$ pour la semi-norme $N(Y)$; on peut donc définir la variable aléatoire intégrale stochastique $\int_B Y\,dX$ pour tout processus prévisible Y tel que

$E\left[(\int Y^2 dA)^{1/2}\right] < +\infty$ (théorème de Lebesgue)

De plus, si $(Y_n)_{n>0}$ est une suite de processus qui converge vers le processus Y au sens de la convergence dominée (par exemple si $|Y_n| < |Y|, \forall n$) avec $N(Y) < +\infty$, on prouve exactement comme en B.9, que, quitte à considérer une sous-suite, la suite des processus cadlag $Z_n = \int Y_n dX$ converge uniformément par trajectoires vers le processus

$Z = \int Y\,dX$ (puisque, $\forall B$ prévisible,
$$\left\|\int_B (Y_n - Y).dX\right\|_{L_1(\Omega,\mathcal{F},P)} \leq 5\,N(Y_n - Y))$$

Enfin, quel que soit $B \in \mathcal{R}$,

$$E\left(\int_B Y\,dX\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\int_B Y_n dX\right) = 0$$

donc Z est une martingale.

Par ailleurs, l'argument utilisé en B.9 montre que H_1 est complet pour la semi-norme N_2^+ : là encore l'inégalité $N_3(X) \leq 8\,N_2^-(X)$ suffit pour prouver ce résultat.

Si on pose, X étant fixé, pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé, $N'(Y) = \operatorname{Sup}\left\|\int_B Y\,dX\right\|_{L_1(\Omega,\mathcal{F},P)}$, cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des éléments B de $\mathcal{A}$, on a $N'(Y) \leq 8\,N(Y)$; il faut noter que la construction qui précède de l'intégrale stochastique repose uniquement sur ce point. Si on considère l'intégrale stochastique comme une intégrale vectorielle du processus Y, considéré comme fonction réelle définie sur $(\Omega \times T, \mathcal{P})$, à valeurs dans l'espace de Banach $L_1(\Omega,\mathcal{F},P)$, il faut noter que la norme $N'(Y)$ est la semi-norme de la semi-variation (cf. par exemple, [Bar]). Ce point sera généralisé et précisé au paragraphe H qui suit.

H - CONSTRUCTION VECTORIELLE DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

-:-

H.1 - INTRODUCTION

On considère un processus X à valeurs dans un espace de Banach H et on revient à la construction de l'intégrale stochastique $\int Y.dX$ pour certains processus réels prévisibles Y. Cette intégrale est définie de façon naturelle si Y est $\mathcal{A}$-étagé (cf. B.2) ; l'application $Y \rightsquigarrow \int YdX$ apparaît alors comme une application linéaire de $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel $L_0^H(\Omega,\mathcal{F},P)$, éventuellement dans l'espace de Banach $L_1^H(\Omega,\mathcal{F},P)$. On a donc une situation typique d'intégrale d'une fonction Y, cette intégrale prenant valeurs dans un espace vectoriel localement convexe ou non. Dans le cas d'espaces de Banach, de telles intégrales ont notamment été étudiées dans [Bar] .

Il est donc naturel de se demander si une telle approche de la construction de l'intégrale stochastique peut apporter des informations intéressantes : la réponse nous semble positive. Plus précisément, même dans le cas très particulier où X est un processus réel cadlag adapté, il ne semble pas possible actuellement de démontrer le théorème H-6 donné ci-après sans recourir, au moins partiellement, aux techniques proposées dans ce paragraphe.

Notons enfin que, dans ce paragraphe, on se limite au cas où le processus Y est réel : les techniques proposées restent utilisables si Y est à valeurs dans un espace de Banach. Elles sont aussi utilisables dans le cadre d'une intégrale stochastique multi-indice (cf. [MeP]).

H.2 - DONNEES GENERALES

Dans tout ce paragraphe on se donne :

une base probabilisée de processus $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ avec $T = [0,1]$

un espace de Banach H

On notera :

$L_p^H = L_p^H(\Omega,\mathcal{F},P)$ (p étant un réel positif ou nul)

$\Omega' = \Omega \times (T \setminus \{0\})$

$\mathcal{R}$ la famille des parties de Ω' de la forme $F \times]s,t]$ avec $F \in \mathcal{F}_s$

$\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{R}$

$\mathcal{P}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ qu'on appelle la tribu des prévisibles

$\mathcal{E}$ l'ensemble des processus Y réels $\mathcal{A}$-étagés

$\mathcal{E}_o = \{ Y : Y \in \mathcal{E},\ \sup_{t,\omega} |Y_t(\omega)| \leq 1 \}$

Si Y appartient à $\mathcal{E}$, on vérifie que Y peut s'écrire sous la forme : $Y = \sum_{i \in I} a_i . 1_{A(i)}$ où I est fini, $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels, $(A(i))_{i \in I}$ est une famille d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{R}$.

Si X est un processus, à valeurs dans l'espace de Banach H, défini à une modification près et si Y est un élément de $\mathcal{E}$ écrit comme ci-dessus, soit $Y = \Sigma\, a_i . 1_{A(i)}$ avec, pour tout i, A(i) élément de $\mathcal{R}$, $A(i) = F(i) \times]s(i), t(i)]$, on pose :

$$\int Y\, dX = \sum_{i \in I} a_i . 1_{F(i)} . (X_{t(i)} - X_{s(i)})$$

$\int Y\, dX$ est donc un élément de L^H_o.

Si on considère la fonction x définie sur $\mathcal{A}$, par $x(A) = \int 1_A . dX$, l'intégrale $\int Y\, dX$ est l'intégrale du processus Y, considéré comme fonction réelle définie sur Ω', par rapport à la "mesure" x définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans l'espace vectoriel $L^H_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Comme au paragraphe B, le problème que l'on étudie comporte deux aspects :

1°/ prolonger l'application linéaire $Y \rightsquigarrow \int Y\, dX$ à une classe assez vaste de processus prévisibles (cf. H.6 ci-après).

2°/ Etudier le processus $(Z_t)_{t \in T}$ défini par

$$Z_t = \int 1_{]o,t]} . Y . dX$$

quand X est adapté (cf. H.7 ci-après).

Nous allons d'abord donner quelques lemmes dont nous aurons besoin.

H.3 - LEMME (Condition suffisante pour avoir une "mesure extérieure")

Soit v une fonction positive définie sur $\mathcal{A}$ *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{A}$, $v(A) \leq v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$

(ii) pour tout élément s de T, $\lim_{t \downarrow s} . v(\Omega \times]s,t]) = 0$

(iii) pour toute suite $(u(n))_{n>o}$ *de temps d'arrêt d'étagés telle que* $[u(n) < 1] \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset$, *on a* $\lim_{n\to\infty} . v(]u(n), 1]) = 0$

Alors, la condition suivante est satisfaite :

(iv) pour toute suite $(A_n)_{n>o}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $A_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset$, *on a* $\lim_{n\to\infty} . v(A_n) = 0$.

Preuve

La preuve de ce lemme est tout à fait analogue à celle du lemme D.7 et sera laissée aux soins du lecteur.

H.4 - LEMME (Une condition de bornitude)

Soit x une fonction définie et simplement additive sur une algèbre $\mathcal{A}$, *à valeurs dans un espace vectoriel* U *muni d'une F-norme (cf. [Ma O]) que l'on notera* $||.||$. *On suppose que x satisfait à la condition suivante :*

(i) si $(A_n)_{n>o}$ *est une suite d'éléments deux à deux disjoints de* $\mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} ||x(A_n)|| = 0$$

soit v la fonction définie sur $\mathcal{A}$ *par :*

$$v(A) = \sup_{B \in \mathcal{A},\, B \in A} ||v(B)||$$

alors, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $v(A) < +\infty$.

Preuve

Notons d'abord que, si x admet un prolongement σ-additif à la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, la condition (i) ci-dessus est nécessairement satisfaite.

On va d'abord prouver que l'on a la propriété suivante :

(s) si A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que $v(A) = +\infty$, il existe une partition (B,C) de $\mathcal{A}$ telle que

$$||x(B)|| \geq 1 \quad \text{et} \quad v(C) = +\infty$$

On considère donc $A \in \mathcal{A}$ tel que $v(A) = +\infty$. Soient E et F deux éléments de $\mathcal{A}$ contenus dans $\mathcal{A}$ tels que $||x(E)|| \geq 2$ et $||x(F)|| \geq 2 + ||x(E)||$. L'une au moins, des trois conditions suivantes est satisfaite :

a) $v(A \setminus F) = +\infty$, b) $v(A \setminus E) = +\infty$, c) $v(E \setminus F) = +\infty$.

Dans le cas a), on pose $C = A \setminus F$ et $B = F$; dans le cas b), on pose $C = A \setminus E$ et $B = E$; considérons le cas c) :

- si $||x(E \setminus F)|| \geq 1$, on pose $B = E \setminus F$ et $C = F \cup (A \setminus E)$
- si $||x(E \setminus F)|| \leq 1$, on a :

$$||x(E \cap F)|| \leq ||x(E)|| + ||x(E \setminus F)|| \leq 1 + ||x(E)||$$

donc :

$$||x(F \setminus E)|| \geq ||x(F)|| - ||x(E \cap F)|| \geq 2\ ||x(E)|| - 1 - ||x(E)|| \geq 1$$

On peut donc poser, dans ce cas, $B = F \setminus E$ et $C = E \cup (A \setminus F)$. Ceci achève la preuve de la propriété (s).

Raisonnons par l'absurde et supposons $v(A) = +\infty$. On construit les suites $(B_n)_{n>o}$ et $(C_n)_{n>o}$ par récurrence de la façon suivante : on pose $C_o = A$, puis, C_n étant déterminé tel que $v(C_n) = +\infty$, on se donne une partition (B_{n+1}, C_{n+1}) de C_n telle que $||x(B_{n+1})|| \geqslant 1$ et $v(C_{n+1}) = +\infty$ (propriété (s)). La suite $(B_n)_{n \geqslant o}$ ne satisfait pas à la condition (i), ce qui achève le raisonnement.

H.5 - THEOREME DE DANIELL

On considère les hypothèses et notations indiquées en H.2 ; de plus, soit p un réel positif ou nul. On suppose qu'on a les propriétés suivantes :

(i) pour tout élément Y de $\mathcal{E}$, $\int Y\, dX$ appartient à L_p^E

(ii) pour toute suite $(Y_n)_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $Y_n \downarrow o$, la suite $(\int Y_n.dX)_{n>o}$ converge vers zéro dans L_p^E

(iii) si $(Y_n)_{n\geqslant o}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $\sum_{n>o} Y_n \leqslant Y_o$, la suite $(\int Y_n.dX)_{n>o}$ converge vers zéro dans L_p^E.

Alors l'application $Y \rightsquigarrow \int Y\, dX$ se prolonge en une application linéaire, définie sur l'ensemble des processus prévisibles uniformément bornés, à valeurs dans L_p^E et satisfaisant au théorème de convergence dominée de Lebesgue (c'est-à-dire à la condition (ii) ci-dessus où on remplace $\mathcal{E}$ par $\mathcal{U}$).

Ce théorème est évidemment une généralisation du théorème classique de Daniell : sa démonstration, dans un cadre plus général, fait l'objet de [Pel-].

H.6 - THEOREME DE PROLONGEMENT

On considère les données et notations indiquées en H.2. De plus, soit p un réel positif ou nul. Soit X un processus à valeurs dans l'espace de Banach H, défini à une modification près et qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément s de T, $\lim_{t \downarrow s}(X_t - X_s) = 0$ pour la topologie usuelle de L_p^H.

(ii) $\{Z : Z = \int 1_A\, dX,\ A \in \mathcal{A}\}$ est une partie bornée (au sens de Bourbaki) de L_p^H.

(iii) pour toute suite $(A(n))_{n>o}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, la suite $(\int 1_{A(n)}.dX)_{n>o}$ converge vers zéro pour la topologie usuelle de L_p^H.

Alors l'application $Y \rightsquigarrow \int Y\, dX$ se prolonge en une application linéaire (unique), définie sur l'ensemble $\mathcal{U}$ des processus réels prévisibles uniformément bornés, à valeurs dans L_p^H et satisfaisant au théorème de convergence dominée, c'est-à-dire à la condition suivante :

(iv) si $(Y_n)_{n>o}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{U}$ qui converge vers Y élément $\mathcal{U}$, la suite $(\int Y_n dX)_{n>o}$ converge, dans L_p^H, vers $\int Y\, dX$.

De plus, si H est de dimension finie, la condition (ii) est automatiquement satisfaite (si les autres conditions le sont).

Preuve

Pour toute variable aléatoire f appartenant à L_p^H, on pose :

$$||f||_p = \left[\int |f(\omega)|^p.\ P(d\omega)\right]^{1/p} \quad \text{si } p \geqslant 1 \text{ (norme usuelle)}$$

$$||f||_p = \int |f(\omega)|^p.\ P(d\omega) \quad \text{si } o < p \leqslant 1$$

$$||f||_p = \int \left[|f(\omega)| \wedge 1\right].P(d\omega) \quad \text{si } p = o$$

$||\ ||_p$ est une F-norme (cf. [MaO]) associée à la topologie usuelle de L_p^H.

Dans la suite, on notera $||.||$ au lieu de $||.||_p$. De plus, on notera x la fonction définie sur $\mathcal{A}$ par $x(A) = \int 1_A.dX$.

1°/ Considérons d'abord le cas où $H = \mathbb{R}$: dans ce cas, les espaces $L_p^H = L_p^{\mathbb{R}}$ (pour $p \geqslant o$) satisfont aux hypothèses du théorème 3 de [MaO] ; soit $(A_n)_{n>o}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$; si x est additive et si $x(\mathcal{A})$ est une partie bornée de $L_p^{\mathbb{R}}$, la série de terme général $x(A_n)$ est "parfaitement bornée" (cf. [MaO]) ; elle est donc convergente. Ceci montre la dernière partie du théorème dans le cas $H = \mathbb{R}$. Le cas où H est un espace vectoriel de dimension finie s'en déduit immédiatement.

2°/ On considère le cas où H est un espace de Banach quelconque. Soit v la fonction réelle positive définie sur l'ensemble des parties de $\Omega \times T$ par :

$$v(A) = \sup_{B \in \mathcal{A},\, B \subset A} ||x(B)||_p$$

On veut prouver que, en restriction à $\mathcal{A}$, v satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) du lemme H.3. La condition (i) est évidemment satisfaite et la condition (ii) du lemme H.3 correspond à la condition (i) de l'énoncé du présent théorème.

On se propose donc maintenant de prouver que v satisfait à la condition H.3.(iii) en raisonnant par l'absurde : soit $(u(n))_{n>o}$ une suite de temps d'arrêt étagés telle que $F_n = [u(n) < 1] \downarrow \emptyset$ et soit $(B_n)_{n>o}$ une suite associée d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout n,

$$B_n \subset (F_n \times T) \quad \text{et} \quad ||x(B_n)|| \geq 2\,\varepsilon > 0.$$

Le lemme H.4 montre que $v(F_1 \times T) = a < +\infty$. Soit $D \subset F_1 \times T$, $D \in \mathcal{A}$ tel que $||x(D)||_p \geq a - \varepsilon/4$; soit $k > 1$ tel que $||x(D).1_{F_k}||_p \leq \varepsilon/4$; soit $E \in \mathcal{A}$, $E \subset (F_k \times T)$ tel que $||x(E)||_p \geq 2\varepsilon$; on a, soit $||x(E \setminus D)||_p \geq \varepsilon$,

soit $||x(E \cap D)||_p \geq \varepsilon$;

dans le premier cas, on a :

$$||x(E \cup D)||_p \geq a + \varepsilon/4 - \varepsilon/4 + (\varepsilon - \varepsilon/4) \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

dans le deuxième cas, on a :

$||x(D \setminus E)||_p \geq a + \varepsilon/2$: dans les deux cas, on contredit donc l'hypothèse $v(F_1 \times T) = a < +\infty$, ce qui achève le raisonnement par l'absurde.

3°/ On a donc prouvé que v satisfait aux hypothèses du lemme H.3 et donc à la condition H.3.(iv). On se propose de montrer que les conditions H.5.(ii) et (iii) sont satisfaites.

Notons d'abord que la famille des variables aléatoires $\int Y.dx$, quand Y parcourt l'ensemble des processus $\mathcal{A}$-étagés uniformément bornés par 1, est une partie bornée de L^H_p (compte-tenu de [Tur] , des propriétés de la F-norme considérée et de l'hypothèse $x(\mathcal{A})$ partie bornée de L^H_p).

Soit $(Y_n)_{n>o}$ une suite de processus réels (positifs) $\mathcal{A}$-étagés qui décroît vers zéro. D'après ce qui précède, si $A(n) = [Y_n > \varepsilon]$, et $B(n) = \Omega \setminus A(n)$, $\int Y_n.1_{B(n)}.dx$ peut être rendu aussi petit que l'on veut (uniformément en n) si on prend ε assez petit, $\varepsilon > 0$ (puisque $|Y_n.1_{B(n)}| \leq \varepsilon$).

Or, pour ε fixé, $A(n) \downarrow \emptyset$ donc $v(A_n) \downarrow 0$ (cf. H.3.(iv)) donc $\int Y_n.1_{A(n)}.dx$ tend vers zéro (cf. [Tur]) ce qui prouve la condition H.5.(ii).

4°/ Prouvons que la condition H.5.(iii) est satisfaite.

Soit $(Y_n)_{n>o}$ une suite de processus réels positifs $\mathcal{A}$-étagés telle que :

$$\sum_{n>o} Y_n \leq 1.$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$ (k entier). Pour tout $n>o$, soit $A(n) = [Y_n > \varepsilon]$. Comme précédemment, on peut choisir ε assez petit pour que $\int Y_n.1_{\Omega \setminus A(n)}.dx$ soit aussi petit que l'on veut (uniformément en n). Il reste donc à prouver que, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \int Y_n.1_{A(n)}.dx = 0.$$

Pour cela, on définit par récurrence les ensembles suivants :

$B(0,0) = \Omega, B(n,-1) = \emptyset$ pour tout entier n avec $n \geq 0$

$B(0,j) = \emptyset$ pour tout entier j avec $j \geq 1$

et pour $n \geq 1$ et $j \geq 1$:

$$B(n,j) = [B(n-1,j-1) \cap A(n)] \cup [B(n-1,j) \setminus A(n)]$$

$$C(n,j) = B(n-1,j-1) \cap A(n) = B(n,j) \cap A(n)$$

On a $B(n,j) = \emptyset$ pour $j > k$; de plus, pour tout n fixé, $\{C(n,j)\}_{1\leq j\leq k}$ constitue une partition de $A(n)$. Enfin, pour tout j fixé, $\{C(n,j)\}_{n>o}$ constitue une famille d'éléments deux à deux disjoints. Il résulte de [Tur] et de la condition H.3.(iv) (nécessairement satisfaite) que :

$$\lim_{n\to\infty} \int Y_n.1_{C(n,j)}.dx = 0 \quad \text{(pour tout } j,\ 1\leq j\leq k).$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \int Y_n.1_{A(n)}.dx = 0$ (puisque $\{C(n,j)\}_{1\leq j\leq k}$ constitue une partition de (An)), ce qui prouve H.5.(iii).

H.7 - PROCESSUS INTEGRALE STOCHASTIQUE

On considère les hypothèses du théorème H.6. On suppose, de plus, que le processus X est un "vrai" processus cadlag adapté. Soit Z le processus défini à une modification près par $Z_t = \int 1_{]0,t]} Y.dX$ *avec Y prévisible uniformément borné par 1. Alors le processus Z admet une modification cadlag adaptée. De plus, on a le théorème de convergence dominée suivant :*

Si $(Y_n)_{n>o}$ *est une suite de processus uniformément bornés par 1 qui converge simplement vers le processus Y, on peut trouver une sous-suite* $(Y_{n(k)})_{k>o}$ *telle que la suite des processus* $(Z_{n(k)})_{k>o}$ *associés comme ci-dessus converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers le processus Z.*

Preuve

Ceci se prouve exactement comme en B.9 (à l'aide du lemme de Borel-Cantelli et de la mesure "extérieure" v).

TABLE DES MATIERES

-:-

BIBLIOGRAPHIE

[Bar] R.G. BARTLE — *A general bilinear vector integral.* Studia Math. 15, p. 337-352 (1956)

[Bur] D.L. BURKHOLDER — *Martingale transforms.* Ann. Math. Statist. 37, 1966, p. 1495-1505

[Del] DELLACHERIE — *Capacités et processus stochastiques.* Springer Verlag, 1972

[Dol] C. DOLEANS — *Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D).* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie werw, 9,1968, p.309-314

[Ma O] W. MATUSZEWSKA and W. ORLIEZ — *A note on modular spaces IX.* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math ; Vol. XVI, N° 10, 1968

[Met-1] M. METIVIER — *Notions fondamentales de la théorie des Probabilités.* Dunod, 2e édition, 1972

[Met-2] M. METIVIER — *Stochastic Integrals and Vector valued measures. In Vector and Operator valued measures and applications.* Academic Press, 1973

[Me P.1] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL — *On Doléans Föllmer's measure for quasi-martingales.* Accepted for publication in Ill. J. of Math.

[Me P.2] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL — *Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_o.* Séminaire de Rennes, 1975

[Mey] P.A. MEYER — *Séminaire de Probabilités X.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 1976

[Ore] S. OREY — *F.-processes.* Proc. Fifth Berkeley Symposium on Stat. and Prob. II_1, 301-313

[Pel-1] J. PELLAUMAIL — *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer* Astérisque N° 9, Société Mathématique de France, 1973

[Pel-2] J. PELLAUMAIL — *Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. Tome XVI,N° 8, P.1227-1236, 1971

[Rao] K.M. RAO — *On decomposition theorems of Meyer.* Math. Scand. 24, 1969, p. 66-78

[Tur] P. TURPIN — *Suites sommables dans certains espaces de fonctions mesurables.* C.R.A.S., T. 280 - Série A - 1975, p. 349-352