H. Hennion

Sur la récurrence et la transience dans les espaces homogènes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. nº 9, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A9_0>

SUR LA RECURRENCE ET LA TRANSIENCE DANS LES ESPACES HOMOGENES

par

H. HENNION

Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable d'élément neutre e et H un sous-groupe fermé de G, le quotient $M = {}^{G}/_{H}$ est un espace homogène de G ; M est l'ensemble des classe à gauche gH et, si π est l'application canonique de G sur M, G opère à gauche sur M par la formule $k\pi(g) = \pi(kg)$.

Si μ est une probabilité adaptée sur G et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G, de même loi μ , définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ on pose :

$$Y_n^x = X_n \ldots X_1 x \quad , \quad n \geq 1 \quad ; \quad Y_o^x = x$$

$Y = (Y_n^x)_{x,n}$ est une chaine de Markov sur M , appelée marche aléatoire (m.a.) de loi μ sur M , sa probabilité de transition est définie pour f borélienne bornée sur M et $x \in M$ par

$$Pf(x) = \int f(kx)\, \mu(dk) = \int f \circ \pi(kg)\, \mu(dk) \quad \text{si} \quad x = \pi(g) \; , \; g \in G$$

tandis que son potentiel s'écrit :

$$Uf(x) = \sum_{n=o}^{\infty} P^n f(x) = \int f \circ \pi(kg) \Big(\sum_{n=o}^{\infty} \mu^n \Big)(dk)$$

Lorsque $H = \{e\}$ on retrouve la notion classique de m.a. sur les groupes, on sait que, dans ce cas, on a la dichotomie suivante : soit tous les états sont récurrents et le potentiel de tout ouvert est infini, soit tous les états sont transitoires et le potentiel de tout compact est borné. La situation n'est pas aussi simple en général, par exemple, si $L = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ , o)$ est le groupe des transformations affines de la droite réelle agissant à gauche sur $M = \mathbb{R}$ par la formule $(a,b)x = ax + b$ et μ une probabilité adaptée dont le support est contenu dans $]o,\frac{1}{2}] \times [-1,+1]$, on voit sans difficulté (cf [5]) que $U1_{[-2,+2]}(o) = +\infty$ tandis que, si K est un compact tel que $K \cap [-2,+2] = \phi$, $U1_K(o) = o$.

Une étude complète de la récurrence des m.a. sur les espaces homogènes a été faite lorsque G est nilpotent à génération finie [6] et étendue au cas où G est nilpotent simplement connexe [11]. On trouvera dans [5] deux démonstrations du résultat principal figurant ici, l'une repose sur l'étude du potentiel U , l'autre utilise un théorème dû à W. Winkler [12] , dans cet article nous reprenons la seconde, mais un résultat préalable nous dispense de faire appel à l'énoncé de [12].

Dans toute la suite, la probabilité μ sera supposée étalée. Les propriétés de régularité topologique de P qui en résultent permettent de généraliser à la présente situation les théorèmes classiques sur la transience et la récurrence pour les chaines de Markov à espaces d'états discrets (§2). Lorsque, de plus, M possède une mesure relativement invariante, on dispose d'une relation de dualité qui permet dans certains cas d'obtenir pour les m.a. sur M un théorème de dichotomie identique à celui rappelée ci-dessus pour les m.a. sur les groupes (§3). Au paragraphe 1, nous fixons les notations et rappelons quelques résultats utiles pour nos démonstrations.

Nous conclurons cette introduction en montrant que les m.a. sur les espaces homogènes admettent comme cas particuliers certains mouvements browniens.

Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\underline{\underline{G}}$ et H un sous-groupe discret de G . $G/_H$ est muni d'une structure de variété analytique (cf [4]) et l'espace vectoriel tangent $T_x(M)$ au point $x \in M$ s'identifie à $\underline{\underline{G}}$ (elle-même identifiée à l'espace des champs de vecteurs invariants à droite) par l'application $X \to \overline{X}_x$, où $\overline{X}_x$ est défini pour f de classe C^1 sur M par

$$\overline{X}_x f = \frac{d}{dt} f\ (\text{expt } X.x)\Big|_{t=o} = X_g(f \circ \pi) \ , \quad \text{si} \quad x = \pi(g) \ .$$

Soit B une forme quadratique définie positive sur $\underline{\underline{G}}$, B détermine sur G une structure riemannienne invariante à droite, à laquelle est associée une mesure de Haar à droite λ ,(telle que $\delta_g * \lambda = \rho(g)\lambda$) . D'après l'identification ci-dessus, B définit aussi une structure riemannienne sur M , en posant

pour $x \in M$, $\overline{X}_x$ et $\overline{Y}_x \in T_x(M)$, $B_x(\overline{X}_x,\overline{Y}_x) = B(X,Y)$;

Un calcul facile montre que la mesure riemannienne associée m est relativement invariante de multiplicateur ρ^{-1} .

Une base orthonormée $(X_i)_{i=1}^n$ de $\underline{\underline{G}}$ étant choisie, les opérateurs de Laplace-Beltrami de G et M s'écrivent respectivement

$$\Delta = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i=1}^n X_i(\rho)_e X_i \quad \text{et} \quad \overline{\Delta} = \sum_{i=1}^n \overline{X}_i^2 - \sum_{i=1}^n X_i(\rho)_e \overline{X}_i$$

de sorte que, si f est de classe 2 sur M ,

$$* \quad \Delta(f \circ \pi) = (\overline{\Delta} f) \circ \pi$$

Soit (P_t) l'unique semi-groupe de transition [1] sur M ayant une réalisation continue et markovienne et tel que pour tout $x \in M$ et f de classe C^2 $P_t f(x) - f(x) = \int_o^t P_u \overline{\Delta} f(x) du$

Soit, d'autre part, (Q_t) l'unique semi-groupe de convolution sur G [8] dont le générateur infinitésimal coincide avec Δ sur les fonctions de classe C^2 suffisamment régulières, en utilisant * on montre facilement que

$$(P_t f) \circ \pi = Q_t(f \circ \pi)$$

de sorte que, le mouvement brownien sur M est la projection du mouvement brownien de G .

§ 1 - Notations, rappels, définitions

On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts d'un point $x \in M$, $\mathcal{M}$ la tribu borélienne de M, B_+ (resp. C_+) l'espace des fonctions boréliennes (resp. continues) positives et bornées sur M.

On désigne par P_x la loi de la m.a. de loi μ sur M issue de x, soit $(Y_n^x)_n$, par E_x l'opérateur d'espérance correspondant et par θ l'opérateur de translation $(Y_n \circ \theta = Y_{n+1})$.
Si $A \in \mathcal{M}$, $x \in M$ et $f \in B_+$, on pose

$$R_A = \{\omega : \sum_{n=o}^{\infty} 1_A(Y_n(\omega)) = +\infty\} \quad , \quad h_A(x) = P_x\ (R_A)$$

$$T_A = \inf \{n : n \geq o\ ,\ Y_n \in A\} \quad , \quad P_A f(x) = E_x[f(Y_{T_A})]$$

$$S_A = \inf \{n : n \geq 1,, Y_n \in A\} \quad , \quad g_A(x) = P_x\{S_A = +\infty\}$$

T_μ est le semi-groupe fermé engendré par le support de la probabilité μ; μ sera toujours supposée étalée (i.e. qu'elle a une puissance non singulière par rapport à une mesure de Haar) et l'on notera μ_n^a (resp. μ_n^s) la partie absolument continue (resp. singulière) de μ^n par rapport à une mesure de Haar à gauche λ sur G, les noyaux correspondants sur M s'écrivent

$$P_n^a\ f(x) = \int f(gx)\ \mu_n^a(dg) \qquad \text{et} \qquad P_n^s f(x) = \int f(gx)\ \mu_n^a(dg)$$

pour $x \in M$ et $f \in B_+$.

On rappelle que, si $f \in B_+$, $P_n^a f$ est continue et qu'il existe une constante c, $o < c < 1$, telle que pour n suffisamment grand

$$(0) \qquad P_n^s 1(x) = \mu_n^s(G) \leq c^n \qquad , \qquad \text{cf } [10],$$

il en résulte que les fonctions P-harmoniques bornées, donc les fonctions h_A, sont continues (1) et que si l'on écrit

$$U = U_a + U_s$$

avec

$$U_a = \sum_{n=o}^{\infty} P_n^a \qquad \text{et} \qquad U_s = \sum_{n=o}^{\infty} P_n^s$$

on a, pour $f \in B_+$,

(2) $$\sup_x U_s f(x) \leq \frac{1}{1-c} \sup_x f(x)$$

Nous utiliserons encore les propriétés suivantes

(3) si V est ouvert dans M , $P_{.}\{T_V < +\infty\}$ est s.c.i. (ceci est aisément vérifié en remarquant que, puisque P conserve C_+ , la fonction $1 - P_x\{T_V < +\infty\} = \lim_n P_x(\bigcap_{k=o}^{n} \{Y_k \notin V\})$ est s.c.s.)

(4) $$\lim_n P_{Y_n}\{T_A < +\infty\} = \lim_n h_A(Y_n) = 1_{R_A} \quad , \quad P_x \text{ p.s.}$$

(cf [10] page 84)

Enfin, rappelons, cf [2] , qu'il existe toujours sur M des mesures quasi-invariantes (i.e. des mesures m σ-finies possèdant la propriété que pour tout $g \in G$, $g(m)$ est équivalente à m) que toutes les mesures quasi-invariantes sont équivalentes et que, si m est l'une d'entre elles :

(5) $m(A) = o$ si et seulement si $\lambda(\pi^{-1}(A)) = o$.

Il résulte immédiatement de (5) que $P_n^a(x,.)$ est absolument continue par rapport à m , donc d'après (2)

(6) si $m(A) = o$ on a $U1_A = U_s 1_A \leq \frac{1}{1-c}$ et $h_A \equiv o$.

Définition

Un point $x \in M$ *est dit récurrent si*

pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $h_V(x) = 1$

il est dit transitoire si

il existe $V \in \mathcal{V}_x$ *tel que* $h_V(x) = o$

§ 2 - Quelques résultats généraux sous l'hypothèse d'étalement

Proposition 1.-

Supposons μ étalée. Tout état est récurrent ou transitoire et, si x est transitoire, il existe $W \in \mathcal{V}_x$ tel que $h_W \equiv o$; l'ensemble des états transitoires est ouvert.

Démonstration

Supposons x non récurrent, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $h_V(x) < 1$, mais alors, d'après (1), il existe $W \in \mathcal{V}_x$ et $\alpha < 1$ tels que

pour tout $y \in W$ $\quad h_W(y) \leq h_V(y) \leq \alpha < 1$

de sorte que, si $\omega \in R_W$, $\underline{\lim}\, h_W(Y_n(\omega)) \leq \alpha$, ce qui n'est compatible avec (4) que, si pour tout $z \in M$, $h_W(z) = P_z(R_W) = o$. La preuve est achevée. $\boxtimes$

Proposition 2.-

Soit μ étalée, si x est transitoire il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $c_1 > o$ tel que $U1_V \leq c_1$ partout .

Démonstration

Nous l'empruntons à [5] .

On note avec des indices supérieurs (n) les objets relatifs à la chaine $Y_p^{(n)} = Y_{np}$ d'opérateur P^n .

Soit x transitoire et $W \in \mathcal{V}_x$ tel que $h_W = o$, alors $h_W^{(n)} \equiv o$ et $\lim_n g_W^{(n)} = 1$ sur W. D'après la décomposition de Riesz et l'équation de Poisson l'on a

$$P_W^{(n)} 1 = U^{(n)} g_W^{(n)} + h_W^{(n)} = U^{(n)} g_W^{(n)} \quad (= 1 \text{ sur } W) ,$$

$$(I - P^{(n)})\, U^{(n)}\, g_W^{(n)} = g_W^{(n)} ,$$

donc, sur W

$$(7) \qquad g_W^{(n)} = 1 - P^n\, U^{(n)}\, g_W^{(n)} = 1 - P_n^s U^{(n)} g_W^{(n)} - P_n^a U^{(n)} g_W^{(n)} ,$$

d'où, en remarquant que $U^{(n)} g_W^{(n)} \leq 1$ et en utilisant (0) ,

$$(8) \qquad g_W^{(n)} \geq 1 - c^n - P_n^a\, U^{(n)}\, g_W^{(n)} .$$

De (7) on déduit que $P^n\, U^{(n)}\, g_W^{(n)}$, donc $P_n^a\, U^{(n)}\, g_W^{(n)}$, tendent vers o sur W, utilisant alors (8) et la continuité en x de $P_n^a\, U^{(n)}\, g_W^{(n)}$, on prouve l'existence d'un n_o, d'un $W \in \mathcal{V}_x$ et d'un $\alpha > o$, tels que

$$g_W^{(n_o)} \geq \alpha 1_{W'} \qquad \text{partout}$$

et il vient

$$U^{(n_o)}\, 1_{W'} \leq \frac{1}{\alpha}$$

puis $U 1_{W'} = (I+P+\ldots+P^{n_o-1})\, U^{(n_o)}\, 1_{W'} \leq \frac{n_o}{\alpha}$ ⊠

<u>Définition</u>

On dit que x *conduit à* y *et l'on note* $x \to y$ *si pour tout* $V \in \mathcal{V}_x$ *, on a* $P_x\{T_V < + \infty\} > o$.

On dit que x *communique avec* y *et l'on note* $x \to y$ *si* $x \to y$ *et* $y \to x$.

Proposition 3.-

(i) $x \to y$ et $y \to z$ impliquent $x \to z$

(ii) $x \to y$ est une relation d'équivalence .

Démonstration

Il suffit de prouver (i)

soit $W \in \mathcal{V}_z$, $P_y\{T_W < +\infty\} > o$ et d'après (3), il existe $V \in \mathcal{V}_y$ et $\alpha > o$ tels que pour tout $y' \in V$ $P_{y'}\{T_W < +\infty\} > \alpha$, alors

$$P_x\{T_W < +\infty\} \geq P_x\{T_V < +\infty \, , \, T_W \circ \theta_{T_V} < +\infty\} =$$

$$= E_x\left[T_V < +\infty \, ; \, P_{Y_{T_V}}\{T_W < +\infty\}\right] \geq \alpha \, . \, P_x\{T_V > +\infty\} > o \, . \quad \boxtimes$$

Proposition 4.-

Si x est récurrent et si $x \to y$ alors : pour tout $W \in \mathcal{V}_z$ $h_W(x) = 1$, y est récurrent et $y \to x$.

Démonstration

(a) Soit $W \in \mathcal{V}_y$, $P_x\{T_W < +\infty\} > o$ et d'après (3), il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $\alpha > o$ tel que pour tout $x' \in V$

$P_{x'}\{T_W < +\infty\} \geq \alpha$ donc $\overline{\lim}\, P_{Y_n(\omega)}\{T_W < +\infty\} \geq \alpha$ pour $\omega \in R_V$

et d'après (4) on a P_x p.s. $R_V \subset R_W$ de sorte que

$$h_W(x) = P_x(R_W) = 1$$

(b) Soit un ouvert U tel que $h_U(x) = 1$ et $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\mathcal{V}_y$ tels que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n = \{y\}$,

$$1 = P_x(R_{W_n}) = P_x\{T_{W_n} < +\infty\} = P_x\{T_{W_n} < +\infty \, , \, R_U \circ \theta_{T_{W_n}}\} =$$

$$= E_x\left[T_{W_n} < +\infty \, ; \, h_U(Y_{T_{W_n}})\right] ,$$

il existe donc $y_n \in W_n$ tel que $h_U(y_n) = 1$, passant à la limite il vient $h_U(y) = 1$.

(c) Il suffit, maintenant, pour établir la proposition de considérer successivement le cas où $U \in \mathcal{V}_y$ et celui où $U \in \mathcal{V}_x$. $\boxtimes$

Définition

On appelle classe récurrente une classe pour la relation $\leftrightarrow$ contenant un point récurrent.

Proposition 5.-

(i) Soit x récurrent, notons J_x sa classe et posons

$$\upsilon_x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n} P^n(x,.) \quad \text{on a} \quad J_x = \{y : x \to y\} = \text{Support } \upsilon_x = \overline{x.T\mu} \ .$$

(ii) Les classes récurrentes sont des fermés absorbants .

(iii) Tous les points d'une classe récurrente sont récurrents, de plus la restriction à une classe récurrente J_x de la chaine (Y_n) est récurrente au sens de Harris, sa mesure invariante ν est une mesure de Radon de support J_x , équivalente à

$$\upsilon_x^a = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n} P_n^a(x,.)$$

Démonstration

(a) (i) est clair et la première partie de (ii) en résulte.

(b) Soit x récurrent et $y \in J_x$, y est récurrent d'après la proposition 4 et $J_x = J_y$ = Support υ_y , la séparabilité de M montre que $\upsilon_y(J_x^c) = o$ soit $P_y(\bigcup_{n=o}^{\infty} \{Y_n \notin J_x\}) = o$, donc J_x est absorbant .

(c) La restriction à J_x de la chaine (Y_n) est υ_x^a-irréductible ; en effet, soit $A \subset J_x$ tel que $\upsilon_x^a(A) > o$, il existe n_o tel que $P_{n_o}^a(x,A) > o$, mais alors il existe $U \in \mathcal{V}_x$ et $\alpha > o$ tels que pour tout $x' \in U$

$$P_{x'}\{T_A < +\infty\} \geq P^{n_o}(x',A) \geq P_{n_o}^a(x',A) \geq \alpha > o$$

donc $\overline{\lim}\, P_{Y_n(\omega)}\{T_A < +\infty\} \geq \alpha$ pour $\omega \in R_U$

et (4) montre que pour tout $y \in J_x$, P_y - p.s. $R_U \subset R_A$ mais puisque, d'après la proposition 4 $P_y(R_U) = 1$ on a également $P_y(R_A) = 1$.

Par suite, il existe [10] un ensemble absorbant $J'_x \subset J_x$ et une mesure υ , $\upsilon >> \upsilon_x^a$ portée par J'_x tels que la restriction à J'_x de (Y_n) soit récurrente au sens de Harris de mesure invariante υ ; puisque υ_x^a charge tous les ouverts de J_x , J'_x est dense dans J_x , la continuité des fonctions h_A et le fait que J'_x soit absorbant montrent alors que la restriction de (Y_n) à J_x est encore récurrente au sens de Harris de mesure invariante υ . Si maintenant $\upsilon_x^a(A) = o$, on a, d'après (1), $h_A(x) = o$ donc $h_A = o$ partout, ce qui prouve $\upsilon_x^a >> \upsilon$, d'où l'équivalence annoncée.

(d) Puisque υ est σ-finie, $J_x = \bigcup_{i=o}^{\infty} E_i$ avec $\upsilon(E_i) < +\infty$. Soit $y \in J_x$, il existe un d et un i tels que $P_d^a 1_{E_i}(x) > o$, par suite, il existe un voisinage V de y et une constante $\alpha > o$ tels que :

$$+\infty > \upsilon(E_i) \geq \int \upsilon(dg)\, P_d^a 1_{E_i}(z) \geq \alpha\,\upsilon(V) ,$$

il en résulte que υ est une mesure de Radon.

Tout ouvert de J_x étant récurrent le support de υ est J_x . $\boxtimes$

Remarque :

Notons que les résultats que nous venons de prouver sont vrais dans la situation suivante : (Y_n) est une chaine de Markov sur M dont le noyau de transition est fortement fellerien, i.e. envoie B_+ dans C_+ .

Soit m une mesure quasi-invariante sur M , rappelons (6) que, si $m(A) = o$, on a $h_A \equiv o$, il en résulte que, pour tout $x \in M$, $m(J_x) > o$. Nous résumons maintenant les énoncés précédents dans le :

Théorème 1

Soit R *(resp* T*) l'ensemble des points récurrents (resp. transitoires) de* M , $M = R \cup T$

(i) T *est ouvert et pour tout* K *compact,* $K \subset T$, *il existe une constante* c *telle que* $U1_K \leq c$

(ii) $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ *où les* J_k *sont des fermés absorbants disjoints, tels que* $J_k = \phi$ *ou* $m(J_k) > o$; *la restriction à* J_k *de la chaine* (Y_n) *est récurrente au sens de Harris de mesure invariante* ν_k , $\nu_k << m$; *de plus, si* x *et* $y \in J_k$, *pour tout* $V \in \mathcal{V}_y$ *il existe* n_o *tel que* $P^{n_o}(x,V) > o$.

Le corollaire suivant établit un théorème de dichotomie peu surprenant.

Corollaire

Si μ est étalée et si $T_\mu = G$, alors la chaine (Y_n^x) satisfait à l'une des propriétés suivantes :

1) Tous les états sont récurrents et la chaine est récurrente au sens de Harris par rapport à m .

2) Tous les états sont transitoires et le potentiel de tout compact est borné .

Démonstration :

Soit S_μ le semi-groupe ouvert des points de G possèdant un voisinage sur lequel une puissance de μ majore un multiple de λ. De la relation $T_\mu . S_\mu \subset S_\mu$ (cf [10]) et du fait que $S_\mu \neq \phi$ (μ étant étalée) on déduit que $S_\mu = G$. Il en résulte que la m.a. de loi μ sur G est λ-irréductible et donc que la marche Y_n^x sur M est m-irréductible (5). Le corollaire est alors une conséquence immédiate du théorème 1. $\boxtimes$

§ 3 - Un théorème de dichotomie

Rappelons [2] qu'une mesure m σ-finie sur l'espace homogène M est dite relativement invariante, s'il existe un caractère χ de G, appelé multiplicateur, tel que

pour tout $g \in G$ $g(m) = \chi(g^{-1})m$

χ est alors nécessairement continu et m satisfait à (5)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur G/H une mesure relativement invariante de multiplicateur donné χ est que, pour tout $h \in H$, $\chi(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$ où, Δ_G (resp. Δ_H), sont les fonctions modulaires de G (resp. H) (si $g \in G$, $\lambda * \delta_g = \Delta_G(g)^{-1}\lambda$).

Il est facile de voir que M possède une mesure G-invariante dès que soit H et G sont unimodulaires (par exemple, si G est discret, ou de Lie nilpotent, ou plus généralement de Lie résoluble de type R) soit H est compact, soit H est de Lie connexe semi-simple. D'après Mostow [9], si G est un groupe de Lie connexe résoluble et si $G/_H$ est orientable, il existe sur $G/_H$ une mesure relativement invariante de facteur χ non nécessairement trivial. Par exemple, lorsque l'on considère l'action du groupe L sur $\mathbb{R}$, si m est la mesure de Lebesgue, $\chi(a,b) = a$.

Théorème 2

Soit m *une mesure relativement invariante de multiplicateur* χ *sur* M *et* μ *une probabilité adaptée et étalée sur* G *telle que*

$$c = \int \chi(g^{-1})\ \mu(dg) \leq 1$$

alors la m.a. Y *de loi* μ *sur* M *satisfait à l'une ou l'autre des propriétés suivantes :*

(i) tout point de M *est récurrent et* Y *est récurrente au sens de Harris de mesure invariante* m

(ii) tout point de M *est transitoire et le potentiel de tout compact est borné.*

Si $c < 1$ *, on est dans la situation (ii) .*

Remarquons que $c = 1$ dès que la mesure m est G-invariante.

Démonstration du théorème 2

La démonstration du théorème repose sur les énoncés du théorème 1 et des deux lemmes ci-dessous.

Lemme 1 :

Soit $\check{\mu}$ l'image de μ par l'application γ définie sur G par $\gamma(g) = g^{-1}$, posons

$$\overset{\nabla}{\mu} = \frac{\chi . \check{\mu}}{\int \chi . d\check{\mu}} \quad \text{et} \quad \overset{\nabla}{P}f(x) = \int f(gx) \overset{\nabla}{\mu}(dg)$$

alors si f_1 et $f_2 \in B_+$

$$<P^n f_1, f_2> = c^n <f_1, \overset{\nabla}{P}{}^n f_2>$$

où

$$<f_1, f_2> = \int f_1 f_2 \, dm .$$

<u>Démonstration du lemme 1</u>

$$\begin{aligned}
<P^n f_1, f_2> &= \int_G \mu^n(dg) \int_M f_1(gx) \, f_2(x) \, m(dx) \\
&= \int_G \mu^n(dg) \int_M f_1(x) \, f_2(g^{-1}x) \, \chi(g^{-1}) \, m(dx) \\
&= \int_M f_1(x) \, m(dx) \int_G f_2(gx) \, \chi(g) \, \check{\mu}^n(dg) \\
&= \int_M f_1(x) \, m(dx) \int_G \dots \int_G f_2(g_n \dots g_1 x) \, \chi(g_n) \dots \chi(g_1) \\
&\qquad \check{\mu}(dg_n) \dots \check{\mu}(dg_1) \\
&= c^n \int_M f_1(x) \, m(dx) \int_G f_2(gx) \, \overset{\nabla}{\mu}{}^n(dg) \\
&= c^n < f_1, \overset{\nabla}{P} f_2 >
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Comme conséquence immédiate de ce lemme nous traitons le cas où $c < 1$.

Soit $A \subset M$ avec $m(A) < +\infty$, on a

$$<U1_A, 1> = \sum_{n=0}^{\infty} <P^n 1_A, 1> = \sum_{n=0}^{\infty} c^n <1_A, 1> = \frac{m(A)}{1-c}$$

par suite $U1_A$ est fini m p.p., et pour presque tout x , donc, (1), tout x $h_A(x) = o$, d'après le théorème 1 la propriété (ii) est satisfaite.

On suppose désormais $c = 1$, le lemme précédent montre alors que m est invariante par P . L'adaptation de μ se traduit par :

Lemme 2 :

(i) Soit $f \in \mathcal{B}_+$ telle que

$$Pf \leq f \quad m \text{ p.p. et } \overset{\nabla}{P}f \leq f \quad m \text{ p.p.}$$

alors $f = 0$ ou $f > 0$ m p.p.

(ii) Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$P1_A \leq 1_A \quad m \text{ p.p. et } P1_{A^c} \leq 1_{A^c} \quad m \text{ p.p.}$$

alors $m(A)$ ou $m(A^c) = 0$

Démonstration du lemme 2

On désigne par Λ l'ensemble des produits de convolution finis des probabilités μ et $\overset{\nabla}{\mu}$ et par D l'ensemble des éléments de G ayant un voisinage sur lequel un élément de Λ majore un multiple de λ .

Il résulte de l'apériodicité et de l'étalement de μ que

$$G = \overline{\bigcup_{\rho \in \Lambda} \text{Supp}(\rho)} \quad \text{et que} \quad D \neq \phi$$

(Supp(ρ) est le support de la probabilité ρ)

Prouvons que $D = G$

Soit $g \in D$, il existe V ouvert contenant g , $\tau \in \Lambda$ et $c > 0$ tels que

$$\tau \geq c 1_V \cdot \lambda$$

si $h \in G$, $W = \{k : 1_V(k^{-1}hg) > 0\}$ est un ouvert contenant h , il existe donc $\rho \in \Lambda$ tel que $\rho(W) > 0$, il en résulte

$$\rho * \tau \geq c\, \rho * (1_V . \lambda) = c(\rho * 1_V) . \lambda$$

mais $\rho * 1_V$ est s.c.i. et

$$\rho * 1_V(hg) = \int 1_V(k^{-1}hg)\, \rho(dk) > 0$$

par suite il existe un ouvert U contenant hg et $c' > 0$ avec

$$\rho * \tau \geq c'(1_U . \lambda)$$

donc $hg \in D$.

Etablissons maintenant l'assertion (i)

D'après la relation de dualité (lemme 3) P et $\overset{\nabla}{P}$ sont compatibles avec l'égalité m p.p. et puisque Λ est dénombrable, il existe $N \subset M$, $m(N) = 0$ tel que pour tout $x \notin N$ et $\tau \in \Lambda$

$$\int f(gx)\,\tau(dg) \leq f(x) .$$

Supposons $m(\{x : f(x) = 0\}) > 0$ alors $N^c \cap \{x : f(x) = 0\} \neq \phi$, soit x_o dans cet ensemble, pour tout $\tau \in \Lambda$

$$\int f(gx_o)\,\tau(dg) = 0 ,$$

puisque $D = G$, tout $x \in M$ possède un voisinage sur lequel $f = 0$ m p.p. donc $f = 0$ m p.p. sur M.

Pour établir (ii) remarquons que, d'après la relation

$$\langle P 1_{A^c} , 1_A \rangle = \langle 1_{A^c} , \overset{\nabla}{P} 1_A \rangle$$

$P 1_{A^c} \leq 1_{A^c}$ implique $\overset{\nabla}{P} 1_A \leq 1_A$ m p.p. , (i) permet de conclure. ☒

On reprend les notations du théorème 1.

<u>Proposition 6.-</u>

Soit $R^\circ = \{x : P_R 1(x) = 0\}$, on a

(i) $R \cap R^\circ = \phi$ et R° absorbant

(ii) $M = R \cup R^\circ$ m. p.p.

<u>Démonstration de la proposition</u>

(i) est clair.

Pour prouver (ii) nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

<u>Lemme 3</u> :

Soit $A \in \mathcal{G}$, $0 < m(A) < +\infty$

Si $h_A = 1$ m p.p. sur A , $\overset{\nabla}{h}_A = 1$ m p.p. sur A

Démonstration du lemme 3

On désigne par π_A le noyau de la chaine induite sur A par Y [10]

$$\pi_A = I_A P\left(\sum_{n\geq 0} (I_{A^c} P)^n\right) I_A = I_A\left(\sum_{n\geq 0} (P I_{A^c})^n\right) P I_A$$

il est clair que pour f_1 et $f_2 \in B_+$

$$<\pi_A f_1, f_2> = <f_1, \pi_A f_2>$$

Sous l'hypothèse du lemme

$$m(A) = \int_A \pi_A 1 \,.\, dm = \int_A \overset{\nabla}{\pi}_A 1 \,.\, dm$$

d'où $\overset{\nabla}{\pi}_A 1 = 1$ m p.p. sur A et le lemme est prouvé . $\boxtimes$

Lemme 4

On désigne par D_k un borélien M, sur lequel ν_k est équivalente à m et l'on pose $K = M\setminus(R \cup R^\circ)$, alors, si $m(K) > o$, il existe k et n_o tels que

$$o << P^a_{n_o} 1_{D_k} , K\!\ast = <1_{D_k} , \overset{\nabla}{P}{}^a_{n_o} 1_K>$$

Démonstration du lemme 8

Soit $x \in K$, la relation $P_{J_k} 1(x) > 0$ implique successivement $h_{D_k}(x) > 0$ (car $h_{D_k} = P_{J_k} h_{D_k}$) et $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,D_k) = +\infty$

mais puisque $\sum_{n=0}^{\infty} P^s_n(x,D_k) < +\infty$

il vient $\sum_{n=0}^{\infty} P^a_n(x,D_k) = +\infty$

et

$$\{x : x \in K,\ P_{J_k} 1(x) > 0\} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x : x \in K,\ P^a_n(x,D_k) > 0\}$$

Si $m(K) > 0$, il existe k_0 tel que $m\{x : x \in K, P_{J_{k_0}} 1(x) > 0\} > 0$ et donc un n_0 tel que

$$m\{x : x \in K, P^a_{n_0}(x, D_{k_0}) > 0\} > 0 \quad . \qquad \boxtimes$$

Achevons maintenant la preuve de la proposition.

Supposons $m(K) > 0$.

Il existe D'_k , $D'_k \subset D_k$, $0 < m(D'_k) < +\infty$ tel que

a) $v_k(D'_k) > 0$,

b) si $x \in D'_k$, $\overset{\nabla}{P}{}^a_{n_0} 1_K(x) > 0$, lemme 4

c) $\overset{\nabla}{h}_{D'_k} = 1$ sur D''_k , $D''_k \subset D'_k$, $m(D''_k) = m(D'_k)$, lemme 3 .

Si $x \in D''_k$

$$1 = \overset{\nabla}{h}_{D'_k}(x) = \overset{\nabla}{P}{}^{n_0} \overset{\nabla}{h}_{D'_k}(x) \leq \int \overset{\nabla}{P}{}^{n_0}(x,dy)\, \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y) \leq 1$$

il vient

$$\int \overset{\nabla}{P}{}^{n_0}(x,dy)(1 - \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y)) = 0$$

puis

$$\int \overset{\nabla}{P}{}^a_{n_0}(x,dy)(1 - \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y)) = 0$$

de b) on déduit l'existence d'un $K' \subset K$, $m(K') > 0$ tel que

$$\text{si } y \in K' \quad 1 = \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y) = \overset{\nabla}{P}_{J_k} 1(y)$$

Il est alors facile de prouver par dualité l'existence d'un l_0 , d'un $R' \subset R$, $m(R') > 0$ tels que

$$\text{si } x \in R' \quad P^{l_0} 1_K(x) > 0$$

ce qui est absurde car R est absorbant, on conclut que $m(K) = 0$.

$\boxtimes$

<u>Fin de la preuve du théorème</u>

R étant absorbant, on a $P1_{R^c} \leq 1_{R^c}$, d'après la proposition on a aussi $P1_R \leq 1_R$ m p.p. et il résulte du lemme 2 que $m(R)$ ou $m(R^c) = m(T) = o$.

$m(T) = o$ implique $T = \phi$ et $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, puisque chaque J_k est absorbant ils sont tous vides m.p.p., donc vides (théorème 1) sauf un (lemme 2), l'unicité de la mesure invariante dans la récurrence au sens de Harris permet de conclure.

Si $m(R) = o$, $R = \phi$ (théorème 1) .

La preuve du théorème est achevée. $\boxtimes$

Remarque :

Le lecteur notera que cette démonstration reste valable pour un noyau fortement fellérien satisfaisant aux conclusions des lemmes 1 et 2 ; en effet, dans ce cas, le lemme 1 et la continuité des fonctions harmoniques montrent que si $m(A) = o$, $h_A \equiv o$ et le théorème 1 est donc vrai .

Le cas où M porte une mesure G-invariante est particulièrement intéressant, puisque la dichotomie récurrence transience a lieu pour toute m.a. étalée, et l'on peut alors envisager une classification des espaces homogènes en espaces homogènes récurrents, i.e. portant une m.a. récurrente et non récurrents ou transitoires. Notons, à ce sujet, que Y. Derriennic et Y. Guivarc'h ont montré que si l'espace homogène $^G/_H$ est non moyennable et s'il porte une mesure invariante, alors il est transitoire. [3]

On montre dans [5] que, lorsque $^G/_H$ possède une mesure invariante, les m.a. de loi μ et $\check{\mu}$ sur $^G/_H$ et la m.a. de loi μ sur $^G/_H$ sont de même nature.

§ 4 - Une condition suffisante de transience

Théorème 3

Soit m *une mesure relativement invariante de multiplicateur* χ *sur* M *et* μ *une probabilité adaptée et étalée sur* G *telle que*

$$\int \operatorname{Log} \chi(g^{-1})\ \mu(dg) < 0$$

alors pour la m.a. de loi μ *sur* M *le potentiel de tout compact est borné.*

Nous renvoyons à [5] pour la démonstration de ce théorème.

Lorsque χ n'est pas trivial sur la composante connexe de e dans G, l'hypothèse du théorème 2 implique par convexité celle du théorème 3 .

Si μ est une probabilité adaptée et étalée sur L , la m.a. de loi μ sur $\mathbb{R}$ est transitoire dès que $\int \operatorname{Log} a.\mu(da,db) > 0$.

Application au cas du mouvement brownien de G

G est ici un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{\underline{G}}$, munie d'une structure riemannienne invariante à droite, pour laquelle la base $(X_i)_{i=1}^n$ de $\underline{\underline{G}}$ est orthonormée, l'opérateur de Laplace-Beltrami de G s'écrit alors

$$\Delta = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i=1}^n (X_i(\rho))_e X_i$$

où l'on a encore désigné par X_i l'opérateur différentiel invariant à droite associée à $X_i \in \underline{\underline{G}}$ et où ρ est la fonction modulaire de G (si λ est une mesure de Haar à droite sur G , $\delta_g * \lambda = \rho(g)\lambda$) .

Notons U C B(G) l'espace de Banach obtenu en munissant l'espace des fonctions numériques bornées uniformément continues pour la structure uniforme droite sur G de la norme uniforme et $UCB^2(G)$ le sous-espace des $f \in UCB(G)$ telles que, pour tout X et $Y \in \underline{\underline{G}}$, Xf et $XYf \in UCB(G)$.

D'après [8] , il existe un et un seul semi-groupe étroitement continue $(\mu_t)_{t \geq o}$ sur G tel que le générateur infinitésimal du semi-groupe d'opérateurs $(Q_t)_{t \geq o}$, définis sur UCB(G) par

$$Q_t f(g) = \int f(kg)\ \mu(dk) \quad ,$$

coïncide avec Δ sur $UCB^2(G)$.

Proposition 7.-

Soit H un sous-groupe unimodulaire du groupe non unimodulaire G , la m.a. apériodique et étalée de loi μ_1 sur $^G/_H$ est transitoire.

Démonstration

L'apériodicité et l'étalement de μ_1 sont connus [7] .

Puisque H est unimodulaire, il existe sur $^G/_H$ une mesure relativement invariante de multiplicateur $\chi(g) = \rho(g)^{-1}$, la proposition résulte alors du lemme suivant et de l'application du théorème 3 .

Lemme 5

Soit γ un caratère continu de G , alors

$$\int \mathrm{Log}\ \gamma(g)\ \mu_t(dg) = t\ \Delta(\mathrm{Log}\ \gamma)_e = -t \sum_{i=1}^{n} (X_i(\rho))_e\ (X_i(\gamma))_e$$

en particulier

$$\int \mathrm{Log}\ \rho(g)\ \mu_t(dg) < o \quad , \text{ si } G \text{ n'est pas unimodulaire .}$$

Démonstration du lemme 5

L'image par $\operatorname{Log} \gamma$ du semi-groupe (μ_t) est un semi-groupe sur $\mathbb{R}$ dont le générateur infinitésimal est défini pour $f \in UCB^2(\mathbb{R})$ par $Af = \Delta(f \circ \operatorname{Log} \gamma)$ (en effet si $f \in UCB^2(\mathbb{R})$, $f \circ \operatorname{Log}\gamma \in UCB^2(G)$) .

Si $o \notin \operatorname{Support}(f)$, $e \notin \operatorname{Support}(f \circ \operatorname{Log} \gamma)$ et $Af(o) = \Delta(f \circ \operatorname{Log} \gamma)_e = o$, de sorte que pour $f \in UCB^2(\mathbb{R})$

$$Af(o) = \frac{\sigma^2}{2} f''(o) + mf'(o)$$

Soit $f \in UCB^2(\mathbb{R})$ égale à x au voisinage de o , on a

$$\Delta(\operatorname{Log} \gamma)_e = \Delta(f \circ \operatorname{Log} \gamma)_e = Af(o) = m = \frac{1}{t} \int x \operatorname{Log} \gamma(\mu_t)(dx) =$$

$$= \frac{1}{t} \int \operatorname{Log} \gamma(g)\ \mu_t(dg)$$

ce qui prouve la première égalité.

Pour établir la seconde, il suffit de remarquer que l'application $t \to \gamma(\exp t X_i)$ étant un homomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ l'on a

$$\gamma(\exp t X_i) = \exp(t . X_i(\gamma)_e)$$

d'où $X_i(\operatorname{Log} \gamma) = X_i(\gamma)_e$ et $X_i^2(\operatorname{Log} \gamma) = o$ $\boxtimes$

Remarquons qu'un argument semblable à celui du lemme montre que l'on a $\int \rho(g)^{-1}\ \mu_t(dg) = 1$ $\boxtimes$

Nous terminons par l'application de la proposition précédente à une situation particulière.

Soit T_n le groupe des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures régulières et G le groupe obtenu en munissant $T_n \times \mathbb{R}^n$ du produit

$$(A,B)(A',B') = (AA', AB' + B)$$

G opère transitivement sur $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$(A,B)X = Ax + B \quad .$$

G n'est pas unimodulaire tandis que le stabilisateur H de $0 \in \mathbb{R}^n$ l'est, il en résulte que, pour n'importe quelle structure riemannienne droite sur G, la m.a. de loi μ_1 sur $\mathbb{R}^n$ est transitoire.

REFERENCES

[1] R. AZENCOTT - Behavior of diffusion semi-groups at infinity Bull. Soc. math. France 102, 1974, p. 193-240 .

[2] N. BOURBAKI - Livre VI, Integration, Chap. VII, Hermann

[3] Y. DERRIENNIC et Y. GUIVARC'H - Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables, C.R.A.S., t. 277, oct. 1973

[4] S. HELGASON Differential Geometry and Symmetric Spaces, Acad. Press., 1962

[5] H. HENNION et B. ROYNETTE - Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène, à paraître

[6] H. HENNION - Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie, Zeit. für Wahr. 34 , p. 245-267, 1976

[7] A. HULANICKI - Subalgebra of $L_1(G)$ associated with Laplacian on a Lie group

[8] G.A. HUNT - Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. math Soc., t 81, 1956, p. 264-293

[9] G.D. MOSTOW - Homogeneous spaces with finite invariant measure Annals of Math. Vol. 75, n° 1, january 1962

[10] D. REVUZ - Markov Chains, North Holland, 1975

[11] R. SCHOTT - Marches aléatoires sur un espace homogène de groupe nilpotent simplement connexe, Thèse de 3ème cycle, Nancy, 1976

[12] W.WINKLER - Doeblin's and Harris' theory of Markov process, Zeit. für Wahr. 31, 1975, p. 79-88