J. P. CONZE

M. KEANE

Ergodicité d'un flot cylindrique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A5_0>

ERGODICITE D'UN FLOT CYLINDRIQUE

par

J.P. CONZE et M. KEANE

NOTE : On trouvera dans "équirépartition et ergodicité de transformations cylindriques (ce même volume)" une autre rédaction de la démonstration du théorème principal de cet article.

Il nous a paru utile, cependant, de reproduire ici la démonstration complète de ce seul théorème.

Soit $X = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ le tore de dimension 1 muni de la mesure de Lebesgue μ , et identifié à l'intervalle $[0,1[$. Sur l'espace $\Omega = X \times \mathbb{Z}$ on considère la mesure (infinie) m produit de μ par la mesure de dénombrement sur $\mathbb{Z}$. Soient $T_\alpha : x \longrightarrow x + \alpha \bmod 1$ la rotation d'angle irrationnel α sur X et S_α le produit gauche défini sur Ω papar $S_\alpha (x,z) = (T_\alpha x, z + \varphi(x))$, où $\varphi(x) = +1$ pour $0 \leq x < 1/2$ et $\varphi(x) = -1$ pour $1/2 \leq x < 1$.

Les mesures μ et m sont respectivement invariantes par T_α et S_α , et la transformation T_α est ergodique sur (X,μ). Le but de cette note est de prouver l'ergodicité de S_α sur (Ω, m). Ce résultat a été obtenu par K. SCHMIDT [1] pour des valeurs particulières de α

Théorème :

Pour tout irrationnel α , la transformation S_α est ergodique sur (Ω , m)

1 - Un lemme sur la répartition des points $\{T_\alpha^k x\}$:

Pour toute fonction Ψ sur X, et pour $q \geq 1$, nous noterons Ψ_q la fonction $\Psi_q(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \psi(T_\alpha^k x)$. Remarquons la relation :

$$S_\alpha^q (x,z) = (T_\alpha^q x, z + \varphi_q(x))$$

Lemme [2]: Soit $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Soient $p, q \geq 1$ entiers tels que : $(p,q) = 1$ et $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. On a alors :

$$\left|\Psi_q (x) - q\int \Psi \, d\mu\right| \leq \mathrm{Var}(\Psi),$$

pour chaque $x \in X$, $\mathrm{Var}(\Psi)$ étant la variation totale de Ψ sur X.

Démonstration :

L'hypothèse sur q implique que chaque intervalle $\left[j/q, \frac{j+1}{q}\right[$, $j = 0, \dots, q-1$, contient un point $k\alpha \bmod 1$, $0 \leq k < q$. Soit I_k l'intervalle contenant $k\alpha \bmod 1$. Il suffit de montrer le lemme pour $x = 0$. On a :

$$\left|\Psi_q (0) - q\int \Psi \, d\mu\right| = \left|\sum_{k=0}^{q-1} q \int_{I_k} (\Psi(k\alpha) - \Psi(x)) \, d\mu(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Var}(\Psi, I_k) \leq \mathrm{Var}(\Psi).$$

Corollaire :[3]

Il existe une suite (q_n) d'entiers positifs impairs telle que $q_n\alpha \longrightarrow 0 \bmod 1$ et telle que, pour chaque n et chaque x,

$$|\varphi_{q_n}(x)| \leq 3$$

Démonstration :

Prenons pour (q_n) la suite des éléments impairs des dénominateurs des quotients partiels $\frac{p_n}{q_n}$ de la fraction continue associée à α .

Le lemme et la relation $\int \varphi \, d\mu = 0$ impliquent $|\varphi_{q_n}(x)| \leq 4$.

Comme $\varphi_{q_n}(x)$ est impair, on peut remplacer 4 par 3 .

2 - Une équation fonctionnelle :

Posons $\omega(x) = j^{\varphi(x)}$. Nous montrons que l'équation fonctionnelle

$$h(x + \alpha) = \omega(x) \; h(x)$$

n'a pas de solution mesurable non nulle. (Voir également (4)).

Soit h une solution mesurable non nulle. Le module de h est invariant par T_α , donc constant, et non nul par hypothèse. Nous avons la relation

$$h(x + q\alpha) = \omega_q(x) \, h(x) \; ,$$

où

$$\omega_q(x) = \prod_{k=0}^{q-1} \omega(x + k\alpha) = j^{\varphi_q(x)} \; . \; .$$

Soit q_n la suite donnée par le corollaire. Alors $h(x+q_n\alpha)$ tend vers $h(x)$ dans L^1 , et nous avons :

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \int |h(x) - h(x+q_n\alpha)| \, d\mu(x) = \text{Const.} \lim_{n \to +\infty} \int |1-\omega_{q_n}(x)| \, d\mu(x) \; .$$

Considérons pour chaque n la fonction :

$$\omega^*_{q_n}(x) = \prod_{j=0}^{q_n-1} \omega(x + j/q_n) \; .$$

Nous savons (5) qu'il existe une constante $c < 1$ telle que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{c}{q_n^2}$, pour n suffisamment grand. Si

$k\alpha \in \left[\frac{j}{q_n}, \frac{j+1}{q_n}\right[$, l'ensemble des x tels que $\omega\left(x+\frac{j}{q_n}\right) \neq \omega(x+k\alpha)$ a une mesure égale à $2\left|k\alpha - \frac{j}{q_n}\right| \leq \frac{2kc}{q_n^2}$.

Il en résulte :

$$\mu\{x : \omega_{q_n}(x) \neq \omega^*_{q_n}(x)\} \leq \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{2kc}{q_n^2} < c$$

Posons :

$D_n(x) = \{x : \omega_{q_n}(x) = \omega^*_{q_n}(x)\}$. On a :

$\mu(D_n) \geq 1 - c > 0$ et :

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} \int_{D_n} |1 - \omega^*_{q_n}(x)|\, d\mu(x) < \lim_{n \to +\infty} \int |1 - \omega_{q_n}(x)|\, d\mu(x) = 0$$

Par ailleurs, on voit facilement que, pour tout x et tout n, $\omega^*_{q_n}(x) = j \pm 1$, car q_n est impair. On a donc :

$$\int_{D_n} |1 - \omega^*_{q_n}(x)|\, d\mu(x) = |1-j|\, \mu(D_n) \geq (1-c)\, |1-j| > 0,$$

ce qui conduit à une contradiction.

3 - Démonstration du théorème :

Soit $A \subseteq \Omega$ un ensemble mesurable invariant par S_α et de mesure non nulle.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, posons $B_k = \{x \in X : (x,k) \in A\}$.

Ces ensembles sont mesurables et, d'après l'invariance de A par S_α, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ est invariant par T_α. L'ergodicité de T_α implique que :

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k \mod \mu .$$

Posons $C_k^{\pm 1} = B_k \cap B^c_{k \pm 1}$, $C_k^{\pm 3} = B_\mu \cap B^c_{k \pm 3}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $q_n\alpha \longrightarrow 0$, nous pouvons supposer, en remplaçant au besoin q_n par une sous-suite, que :

$$1_{C_k^{\pm 1}} (x + q_n\alpha) \longrightarrow 1_{C_k^{\pm 1}} (x) ,$$

$$1_{C_k^{\pm 3}} (x + q_n\alpha) \longrightarrow 1_{C_k^{\pm 3}} (x) ,$$

pour μ presque tout x et tout $k \in Z$.

En utilisant à nouveau l'ergodicité de T_α , le fait que $q_n\alpha \longrightarrow 0$ et la symétrie des données $[\varphi(x + 1/2) = - \varphi(x)]$, on montre facilement que l'une au moins des deux situations suivantes est réalisée :

- il existe des ensembles D_1 et D'_1 de mesure 1 dans X tels que, pour tout $x \in D_1$, resp. tout $x \in D'_1$, $\varphi_{q_n}(x) = + 1$, resp. $\varphi_{q_n}(x) = -1$, pour une infinité d'entiers n .
- il existe des ensembles D_3 et D'_3 de mesure 1 dans X tels que, pour tout $x \in D_3$, resp. tout $x \in D'_3$, $\varphi_{q_n}(x) = + 3$, resp. $\varphi_{q_n}(x) = - 3$, pour une infinité d'entiers n .

Montrons que, dans la première situation, on a $B_k \subseteq B_{k+1} \mod \mu$, pour tout k. Dans le cas contraire, on aurait $\mu(C_k) > 0$ pour un entier k. Soit $x \in C_k \cap D_1$. Pour $n \geqslant n(x)$, nous avons $x + q_n\alpha \in C_k$, donc $(x,k) \in A$

et $(x + q_n \alpha, k + 1) \notin A$, pour $n \geqslant n(x)$. Puisque $x \in D_1$, il existe un $n_o \geqslant n(x)$ tel que l'on ait aussi $\varphi_{q_n}(x) = 1$. Ceci implique $S_\alpha^{n_o}(x,k) = (x + q_{n_o} \alpha, k + 1)$, ce qui contredit l'invariance de A par S_α. On a donc $\mu(C_k) = 0$ et $B_k \subset B_{k+1}$ mod μ, pour tout k.

Un raisonnement analogue utilisant l'ensemble D'_1 montre que, dans la première situation, on a également $B_k \subset B_{k-1}$ mod μ, pour tout k.

Les ensembles B_k coïncident mod μ, et sont donc égaux à leur union qui est X. D'où $A = \Omega$ mod μ.

Dans la deuxième situation, on montre par le même raisonnement et en utilisant les ensembles D_3 et D'_3 que $B_k = B_{k+3}$ mod μ, pour tout k. Posons $\phi(x) = \{k \in \mathbb{Z} : (x,k) \in A\}$. Pour presque tout x, l'ensemble $\phi(x)$ est non vide et invariant par translation par l'entier 3.

Si pour un ensemble de x de mesure positive, on a $\{0, 1, 2\} \subseteq \phi(x)$, alors $\phi(x) = \mathbb{Z}$ pour presque tout x, ce qui implique $A = \Omega$ mod μ.

En remplaçant au besoin A par son complémentaire, nous pouvons donc supposer que seul l'un des entiers 0, 1 ou 2 est dans $\phi(x)$ pour presque tout x. Soit $f(x)$ cet entier. La fonction est alors solution de l'équation fonctionnelle :

$$f(x + \alpha) = f(x) + \varphi(x) \bmod 3 ,$$

qui s'écrit sous forme multiplicative :

$$h(x + \alpha) = \omega(x) \ h(x) ,$$

avec $h(x) = j^{f(x)}$.

D'après le paragraphe 2 , cette équation n'a pas de solution mesurable non nulle, ce qui fournit une contradiction.

JP CONZE et M KEANE

Université de Rennes

E.R.A. 250 du CNRS

B.P. 25 A

35031 - RENNES CEDEX

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. SCHMIDT Ergodicity of a cylinder flow, Preprint.

[2] Dû à KOKSMA, voir L. KUIPERS, H. NIEDERREITER Uniforme distribution of sequences, Wiley 1974.

[3] H. ANZAI Ergodic skew product transformations on the torus. Osaka Math. J. vol. 3, n° 1, 1951.

[4] A. B. KATOK, A.M. STEPIN Approximation en théorie ergodique Usp. Mat. Nank t. 22, 1967.

[5] A. Ya KHINCHIN Continued fraction, Noordhoft 1963.