PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. P. CONZE

Y. GUIVARC'H

# Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 4, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A4_0>

PROPRIETE DE DROITE FIXE ET

FONCTIONS PROPRES DES OPERATEURS DE CONVOLUTION

par

J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H

(Université de Rennes)

Nous étudions dans ce travail l'équation de convolution $p * \mu = \mu$ où $p$ est une mesure de probabilité fixée sur le groupe localement compact $G$ , à un réel positif donné et l'inconnue $\mu$ une mesure de Radon positive. Une étude complète de cette équation a été faite par G. Choquet et J. Dany lorsque $G$ est abélien (2), les solutions extrémales étant alors les fonctions exponentielles. Lorsque $G$ n'est pas abélien, la nature des solutions extrémales est étroitement liée à la structure de $G$ comme l'ont montré G.A. Margulia (7) et H. Furstemberg (4) dans deux cas particuliers.

Nous donnons ici une représentation des solutions de l'équation précédente pour les groupes $G$ possédant un sous-groupe nilpotent distingué uniforme qui généralise (7). La détermination des solutions extrémales repose sur une propriété de droite fixe et de moyennabilité (5), est étudiée systématiquement dans une première partie, où nous développons les remarques faites par H. Furstemberg sur ce sujet dans (4). La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'équation mentionnée au début, la méthode de détermination des extrémales étant inspirée de (4) et (7).

Un résumé de ce travail est paru dans (9).

# I. - DROITE FIXE SOUS L'ACTION D'UN GROUPE DANS UN CÔNE A BASE COMPACTE

Soit $G$ un groupe localement compact séparable. On note $dg$ une mesure de Haar à gauche sur $G$. Pour $f : G \to \mathbb{C}$, on pose $_gf(h) = f(g^{-1}h)$.

<u>Définitions</u> : On appelle <u>poids sur G</u> toute application borélienne $\alpha$ de $G$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle qu'il existe une fonction $c$ localement bornée vérifiant :

$$\alpha(gh) \leqslant c(g)\alpha(h), \text{ pour tous } g, h \in G. \quad (*)$$

Une fonction $f$ sur $G$ est dite <u>$\alpha$-bornée</u>, si l'on a :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{g \in G} |f(g)| / \alpha(g) < \infty,$$

et $\alpha$ - uniformément continue à droite si $f$ est $\alpha$ - bornée et vérifie :

$$\lim_{g \to e} \|_gf - f\|_\alpha = 0$$

On désigne par $B_\alpha$, $CB_\alpha$, $UCB_\alpha$ respectivement les espaces de fonctions sur $G$ bouliénnes $\alpha$ - bornées, continues et $\alpha$ - bornées, $\alpha$ - uniformément continues à droite.

Ces espaces sont des espaces de Banach pour la norme associée à $\alpha$ et l'action de $G$ par translation à gauche sur chacun d'eux définit une représentation de $G$. La représentation de $G$ dans $UCB_\alpha$ est continue.

Quand $\alpha$ est égal à $1$, on retrouve les espaces de fonctions utilisés classiquement dans l'étude de la moyennabilité (cf(3)), liée à l'existence de moyennes invariantes sous l'action de $G$ sur ces espaces. D'une façon analogue, nous cherchons ici des moyennes quasi-invariantes sous l'action de $G$ sur les espaces introduits plus haut.

Pour toute forme linéaire $m$ sur un espace de fonctions définies sur $G$, on note $gm$ la forme linéaire $f \to m(gf)$, $g \in G$. Une exponentielle sur $G$ est un homomorphisme continu de $G$ dans le groupe multiplicatif $R^+$. On désigne par $G$ l'ensemble des exponentielles sur $G$, muni de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel réel compatible avec la topologie de la convergence simple sur $G$.

Une forme linéaire sur un espace de fonctions définies sur $G$ est dite <u>quasi-invariante</u>, s'il existe $\lambda \in G^*$ telle que:

$$gm = \lambda(g)m \text{ , pour tout } g \in G \text{ , } (1)$$

<u>Proposition 1</u>

Soit $\alpha$ un poids sur $G$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) il existe sur $B_\alpha$ une forme linéaire positive quasi-invariante $m$, telle que :

$$m(\alpha) = 1$$

2) il existe sur $CB_\alpha$ une forme linéaire positive non nulle

3) il existe sur $UCB_\alpha$ une forme linéaire positive non nulle.

<u>Démonstration :</u>

Les démonstrations de la proposition 1, et du théorème 1, sont très proches des démonstrations données [dans (3), chapitre 2] de l'équivalence des diverses formes de la moyennabilité.

Montrons d'abord que $\alpha$ est équivalente, en un sens, à une fonction de $UCB_\alpha$. Soit $\varphi$ une fonction $\geq 0$ dans $\mathcal{C}_k(G)$, l'espace des fonctions continues à support compact sur $G$. Considérons le produit de convolution :

$$\varphi * \alpha(g) = \int_G \varphi(h)\, \alpha(h^{-1}g)\, dh$$

D'après (*), on a :

$$\varphi * \alpha(g \leq \alpha(g) \int_G \varphi(h)\, c(h^{-1})\, dh = K\,\alpha(g) \text{ ,}$$

et de même l'inégalité $\alpha(h^{-1}g) \geq \alpha(g) / c(h)$ implique :

$$\varphi * \alpha(g) \geq \alpha(g) \int_G \varphi(h) / c(h)\, dh = K'\alpha(g) \qquad (2)$$

On a donc : $K'\alpha \leq \varphi * \alpha \leq K\alpha$, où $K$ et $K'$ sont deux constantes dépendant de $\varphi$, avec $K' > 0$ si $\varphi$ est non identiquement nulle. D'autre part, on vérifie immédiatement que $\varphi * \alpha$ est dans $UCB_\alpha$.

Soit m une forme linéaire positive sur $B_\alpha$, quasi-invariante. Sa restriction à $CB_\alpha$ est une forme linéaire quasi-invariante sur $CB_\alpha$, qui est non nulle, si $m(\alpha) = 1$, d'après les inégalités (2). On a donc montré que 1) implique 2); et un raisonnement analogue montre que 2) implique 3).

Montrons enfin que 3) implique 1). Soit $m$ une forme linéaire positive non nulle sur $UCB_\alpha$, quasi-invariante. Si $f \in B_\alpha$ et si $\varphi \in \mathcal{C}_k(G)$, on obtient, comme précédemment, que $\varphi * f$ est dans $UCB_\alpha$, et $m(\varphi * f)$ est bien défini. Fixons $f$, et considérons la forme linéaire sur $\mathcal{C}_k(G) : \varphi \mapsto m(\varphi * f)$.
On a $m(g\varphi * f) = \lambda(g)\, m(\varphi * f)$, d'après (1). L'unicité de la mesure de Haar implique qu'il existe, pour chaque $f$, une constante $\mu(f)$ telle que :

$$m(\varphi * f) = \mu(f) \int_G \lambda(g)\, \varphi(g)\, dg \; .$$

Il est clair que $\mu$ est une forme linéaire positive sur $B_\alpha$. Elle est non nulle car d'après les inégalités (2), on a $\mu(\alpha) > 0$. Enfin elle est quasi-invariante : soit $\Delta$ la fonction modulaire de $G$. On a

$$\varphi * g_0 f = \Psi * f \quad , \text{où} \quad \Psi(g) = \Delta(g_0^{-1})\, \varphi(g g_0^{-1}) \quad ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} m(\varphi * g_0 f) &= \mu(f) \int_G \lambda(g)\, \Psi(g)\, dg \\ &= \lambda(g_0)\, \mu(f) \int_G \lambda(g) \varphi(g)\, dg \\ &= \lambda(g_0)\, m(\varphi * f) \quad , \end{aligned}$$

soit :

$$g_0 \mu = \lambda(g_0) \mu \quad , \text{ pour tout } g_0 \in G \; .$$

On obtient la forme linéaire sur $B_\alpha$ cherchée en divisant $\mu$ par $\mu(\alpha)$.

Propriété de droite fixe

Soient $V$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, $\mathcal{C}$ un cône convexe propre de $V$, et $\rho$ une représentation de $G$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un homomorphisme de $G$ dans le groupe des automorphismes de $V$ tel que :

$$\rho(g)\, \mathcal{C} \subset \mathcal{C}, \text{ pour tout } g \in G$$

La représentation $\rho$ sera dite globalement continue si l'application $(g, x) \mapsto \rho(g)x$ est continue, et continue sous l'hypothèse plus faible que, pour tout $x$ fixé dans $V$, l'application $g \mapsto \rho(g)x$ est continue.

Théorème 1

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout poids $\alpha$ sur $G$, $G$ vérifie les conditions équivalentes de la proposition 1 ;

2) Pour toute représentation globalement continue de $G$ dans un cône $\mathcal{C}$ à base compacte, il existe dans $\mathcal{C}$ une droite fixe sous l'action de $G$ ;

3) Pour toute représentation continue de $G$ dans un cône $\mathcal{C}$ à base compacte, il existe dans $\mathcal{C}$ une droite fixe sous l'action de $G$.

Démonstration :

Il est clair que 3) implique 2). Montrons que 2) implique 1). Soit $\alpha$ un poids sur $G$, $UCB_\alpha$ l'espace des fonctions sur $G$ uniformément continues d'ordre $\alpha$. On peut supposer comme nous l'avons vu que $\alpha$ est dans $UCB_\alpha$. Considérons le cône $\mathcal{C}$ des formes linéaires positives sur $UCB_\alpha$, muni de la topologie faible. Les formes linéaires positives $m$ sur $UCB_\alpha$ telles que $m(\alpha) = 1$ forment une base compacte de ce cône, et la représentation $\rho$ de $G$ dans $\mathcal{C}$ définie par $\rho(\rho)m = gm$ est globalement continue. Les éléments d'une droite fixe par $G$ dans $\mathcal{C}$ sont des formes linéaires positives quasi-invariantes sur $UCB_\alpha$.

Montrons enfin que 1) implique 3). Soit $\rho$ une représentation continue de $G$ dans un cône $\mathcal{C}$ à base compacte, $\mathcal{C} \subset V$, Soit $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathcal{C} : F_0(x) = 1\}$ une base compacte de $\mathcal{C}$ définie par une forme linéaire $F$ sur $V$, positive sur $\mathcal{C}$. Fixons un élément $x \in \mathcal{C}_0$, et montrons que la fonction $\alpha$ définie par $\alpha(g) = F_0(\rho(g)x)$ est un poids sur $G$.

Posons $c(g) = \sup\limits_{y \in \mathcal{C}_0} F_0(\rho(g)y)$. On a $c(gg') \leq c(g)\, c(g')$, $g, g' \in G$

$$F_0(\rho(gh)x) = F_0(\rho(h)x)\, F_0(\rho(g)z) \quad , \text{ avec } z = \frac{1}{F_0(\rho(h)x)}\, \rho(h)x \;,$$

d'où :

$$|F_0(\rho(gh)x)| \leq c(g)\, |F_0(\rho(h)x)| \;,$$

Nous devons montrer que $c$ qui est partout défini, d'après la compacité de $\mathcal{C}_0$, est localement borné. Soit $A_k = \{g \in G : c(g) \leq k\}$. On a $G = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$, et les $A_k$ sont fermés. D'après le théorème de Baire, l'un des $A_k$ est d'intérieur non vide. Donc $c$ est borné sur un ouvert et comme $c(gg') \leq c(g)\, c(g')$, $c$ est bien localement borné.

Pour tout $F$ dans l'espace $V^*$ des formes linéaires continues sur $V$, et pour tout $x \in V$, les fonctions $g \mapsto F(\rho(g)x)$ sont dans $CB_\alpha$, car elles sont continues par hypothèse et vérifient

$$|F(\rho(g)x)| \leq \alpha(g) \sup_{y \in \mathcal{C}_0} |F(y)| .$$

Soient $K$ l'ensemble des formes linéaires positives $m$ sur $CB_\alpha$ telles que $m(\alpha) = 1$, et $K_d$ le sous-ensemble de $K$ formé des mesures positives $\mu$ sur $G$, à support fini, vérifiant $\mu(\alpha) = 1$. Il résulte du théorème de Hahn-Banach que $K_d$ est faiblement dense dans $K$. Considérons l'application de $K$ dans $V^{**}$ qui à $m \in K$ associe $x_m \in V^{**}$ défini par

$$x_m(F) = m\,(F(\rho(g)x)) .$$

Pour $m \in K_d$, on constate que $x_m$ est dans $\mathcal{C}_0$ identifié à un sous-ensemble compact de $V^{**}$. L'application $m \to x_m$ est faiblement continue, et envoie $K_d$ dans $\mathcal{C}_0$. Elle applique donc $K$ dans $\mathcal{C}_0$.

Si $m$ est dans $K$ et est quasi-invariante par $G$, son image $x_m$ est un élément de $\mathcal{C}_0$, appartenant à une droite fixe sous l'action de $G$. Donc l'hypothèse 1) implique l'existence d'une droite fixe sous l'action de $G$ dans le cône .

<u>Définition</u> : Un groupe $G$ localement compact a la <u>propriété de droite fixe</u>, s'il vérifie les conditions équivalentes de l'énoncé du théorème 1.

Il est clair que les groupes compacts, le groupe $\mathbb{Z}$ (d'après le théorème de Schauder-Tychonov) ont la propriété de droite fixe. Les groupes ayant la propriété de droite fixe sont moyennables. La réciproque est fausse. Comme le remarque Furstenberg (4) , le groupe des déplacements du plan est un exemple de groupe moyennable, qui n'a pas la propriété de droite fixe. D'autre part, contrairement à la moyennabilité, la propriété de droite fixe ne se conserve pas dans le passage aux sous-groupes fermés : ainsi le groupe des similitudes du plan qui contient le groupe des déplacements du plan a la propriété de droite fixe, comme nous le verrons plus loin. On a cependant le résultat suivant, qui sera utile pour déterminer des groupes ayant la propriété de droite fixe :

Proposition 2

Soit $G$ un groupe localement compact ayant la propriété de droite fixe. Si $H$ est un sous-groupe fermé de $G$, tel que $G/H$ soit compact, alors $H$ a la propriété de droite fixe.

Démonstration :

Soient $\alpha$ un poids sur $H$, et $c$ une fonction localement bornée telle que $\alpha(hh') \leq c(h)\,\alpha(h')$, $h,h' \in H$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(G)$ et $f \in B_\alpha(H)$, la fonction

$$\varphi * f(g) = \int_H \varphi(gh)\, f(h^{-1})\, dh$$

est bien définie car $f$ est localement bornée.

Soient $A$ un compact de $G$ tel que $G = AH$, et $\varphi_0 \in \mathcal{C}_K^+(G)$ strictement positive sur $A$. Posons $\beta = \varphi_0 * \alpha$. Nous allons montrer que $\beta$ est un poids sur $G$, puis en déduire une moyenne quasi-invariante sur l'espace $B_\alpha(H)$.

Soient $B$ un compact de $G$, $g_0 \in B$, et $g \in G$, avec $g = ah_1$, $a \in A$, $h_1 \in H$. Nous avons les majorations :

$$\varphi_0 * \alpha(g_0 g) = \int_H \varphi_0(g_0 gh)\, \alpha(h^{-1})\, dh = \int_H \varphi_0(g_0 ah)\, \alpha(h^{-1}h_1)\, dh$$

$$\leq \alpha(h_1) \int_H \varphi_0(g_0 a_1 h)\, c(h^{-1})\, dh \leq K\, \alpha(h_1) \quad ,$$

où $K$ est une constante finie ne dépendant que de $B$.

De même, de l'inégalité $\alpha(h^{-1}h_1) \geq \frac{1}{c(h)}\, \alpha(h_1)$ et des hypothèses sur $\varphi_0$, on déduit la minoration :

$$\varphi_0 * \alpha(g) \geq K'\, \alpha(h_1) \quad ,$$

où $K'$ est une autre constante $> 0$ ne dépendant que de $B$. Les deux inégalités obtenues montrent que $\beta = \varphi_0 * \alpha$ est un poids sur $G$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}_K(G)$. Il existe un nombre fini de translatées de $\varphi_0$ et des constantes $\lambda_i$ telles que $|\psi| < \sum_1^n \lambda_i\, g_i \varphi_0$. Si $f \in B_\alpha(H)$, on a donc $|\psi * f| \leq \|f\|_\alpha\, |\psi| * \alpha \leq \|f\|_\alpha \left(\sum_1^n \lambda_i d(g_i)\right)\beta$, où $d$ est une fonction sur $G$ verifiant

$$\beta(g_0 g) \leq d(g_0)\, \beta(g) \quad , \quad g_0, g \in G \quad .$$

Ceci implique que $\psi * f$ est dans $B_\beta(G)$.

Comme $G$ a la propriété de droite fixe, il existe une forme linéaire positive $m$ sur $B_\beta(G)$ telle que $m(\beta) = 1$ et $gm = \lambda(g)m$, pour une exponentielle $\lambda \in G^{\frown}$. Pour $f$ fixée dans $B_\alpha(H)$, d'après ce qui précède, l'application $\mathcal{C}_K(G) \ni \varphi \mapsto m(\varphi * f)$ est une mesure de Radon sur $G$, quasi-invariante, donc, à un coefficient près dépendant linéairement de $f$, de la forme $\varphi \mapsto \int_G \lambda(g)\, \varphi(g)\, dg$. Il existe donc une forme linéaire positive $\theta$ sur $B_\alpha(H)$ telle que :

$$m(\varphi * f) = \theta(f) \int_G \lambda(g)\, \varphi(g)\, dg$$

Pour $f = \alpha$, on obtient $m(\varphi * \alpha) = m(\beta) = 1$, d'où $\theta(\alpha) > 0$.

Par un changement de variable, on montre la relation :

$$m(\varphi * {}_h f) = \lambda(h)\, \theta(f) \int_G \lambda(g)\, \varphi(g)\, dg ,$$

d'où $\theta({}_h f) = \lambda(h)\, \theta(f)$.

Nous allons maintenant préciser la structure des groupes possédant la propriété de droite fixe. Certains des résultats prouvés dans la suite ont été obtenus par Furstenberg (4).

Proposition 3

Tout groupe nilpotent $G$ possède la propriété de droite fixe.

Démonstration :

Si $G$ est abélien, le résultat est une conséquence du théorème de Schauder-Tychonov et du lemme de Zorn. Dans le cas général, on raisonne par récurrence sur la suite centrale descendante $G = G^1 \supset G^2 \supset \ldots\; G^r \supset G^{r+1} = \{e\}$ de $G$.

Soit $\rho$ une représentation de $G$ dans un cône convexe $\mathcal{C}$ à base compacte. Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le sous-cône de $\mathcal{C}$ formé des $x \in \mathcal{C}$ tels que $\rho(g)x = \lambda(g)x$, $g \in G^r$, où $\lambda$ est une exponentielle sur $G^r$. D'après le résultat dans le cas abélien, il existe une exponentielle $\lambda$ sur $G^r$ telle que $\mathcal{C}_\lambda \neq \{0\}$. Montrons que $\lambda \equiv 1$, pourvu que $r$ soit $> 1$.

Soient $a \in G^{r-1}$, $H$ le sous-groupe abélien et distingué dans $G$ engendré par $a$ et $G^{r-1}$. $H$ opère dans $\mathcal{C}_\lambda$. Il existe donc un prolongement $\lambda'$ de $\lambda$ à $H$ tel que pour un $x \neq 0$ dans $\mathcal{C}_\lambda$ on ait $\rho(h)x = \lambda'(h)x$, $h \in H$.

Lemme 4

Soit $G$ un groupe localement compact contenant un sous-groupe abélien distingué $H$ de la forme $H = R^m \times Z^n$ et tel que $G/H$ soit compact. Alors $G$ possède la propriété de droite fixe si et seulement si $H$ est central dans $G$.

Démonstration

La condition est suffisante d'après la remarque précédente. Inversement supposons que $G$ ait la propriété de droite fixe et montrons que $G$ opère trivialement sur $H^*$ donc sur $H$.

Soit $\lambda$ un élément de $H^*$ et considérons le cône des mesures de Radon positives sur $G$ vérifiant : $\forall h \in H,\ \mu * \delta_h = \lambda(h)\mu$. Ce cône, muni de la topologie vague est fermé et possède une base compacte. Si $\varphi$ est une fonction continue à support compact qui est strictement positive sur chaque classe modulo $H$ on a $\mu(\varphi) \neq 0$ pour $\mu \neq 0$ car une fonction continue à support compact quelconque $\psi$ est majorée par une combinaison linéaire de translatées de $\varphi$ par des éléments de $H$ :

$$0 \leq \psi \leq \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i \varphi^{h_i}$$

et cette relation entraîne

$$0 \leq \mu(\psi) \leq \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i \lambda(h_i)\, \mu(\varphi) .$$

La compacité de la base définie par $\mu(\varphi) = 1$ résulte de la même relation.

Comme le groupe $G$ opère dans ce cône par translations à gauche, il possède une droite fixe et donc il existe une exponentielle $\theta$ sur $G$ vérifiant

$$\forall h \in H \quad \theta(gh) = \theta(g)\,\lambda(h)$$

c'est-à-dire que $\theta$ prolonge $\lambda$ et donc que :

$$\lambda(gh\,g^{-1}h^{-1}) = 1 \ ;\ \forall g \in G\ , \forall h \in H .$$

Il en résulte que $\lambda$ est invariante par $G$.

Preuve de la proposition 4

Supposons que la représentation adjointe de $G$ possède un poids de module 1 non trivial dans l'algèbre de Lie de $G'/G''$. Alors (cf (1)), $G$ possède un quotient isomorphe au groupe des déplacements du plan euclidien, qui d'après le lemme 4 ne possède pas la propriété de droite fixe. Il en est de même pour $G$.

Inversement, supposons que la représentation adjointe de $G$ ne possède pas de poids de module 1 non trivial et montrons que les orbites relativement compactes de l'action de $G$ sur $G'^*$ sont réduites à des points. Soit $V$ le sous espace de $G'$ formé des éléments dont l'orbite, sous l'action de $G$, est relativement compacte. En prenant une base de $V$, on voit que $G$ opère sur $V$ comme un sous-groupe relativement compact du groupe linéaire de $V$. Les poids de $G$ dans le complexifié de $V$ sont donc de module 1. Comme de plus $V$ s'identifie au dual d'un quotient de l'algèbre de Lie de $G'/G''$, ces poids appartiennent à la représentation adjointe de $G$ et sont donc triviaux. $G$ opère trivialement sur $V$.

Soient $\rho$ une représentation de $G$ dans un cône $\mathcal{C}$ à base compacte, $\lambda$ un élément de $G'^*$ contenu dans la restriction de $\rho$ à $G'$ qui est nilpotent, donc a la propriété de droite fixe. Comme l'orbite de $\lambda$ sous $G$ est relativement compacte, $\lambda$ est $G$ invariant. Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le sous cône de $\mathcal{C}$ formé des $x$ tels que : $\rho(g)x = \lambda(g)v$, pour tout $g \in G'$.

La représentation de $G$ dans $\mathcal{C}_\lambda$ déduite par restriction de $\rho$ à $\mathcal{C}_\lambda$ est triviale sur le sous groupe fermé $< G , G' >$ de $G$ engendré par les commutateurs d'élément de $G$ et $G'$. C'est donc en fait une représentation du groupe nilpotent $G / <G, G'>$. La propriété de droite fixe appliquée à cette représentation fournit alors le résultat.

## Proposition 5

Soit $G$ un groupe de Lie connexe de radical $R$, $R'$ le groupe dérivé de $R$. Alors $G$ possède la propriété de droite fixe si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1) $G/R$ est compact,

2) La représentation de $R$ dans l'algèbre de Lie de $R'/R''$ ne possède pas de poids de module 1 non trivial,

3) $G$ opère trivialement sur $R/R'$,

## Démonstration

Montrons d'abord que ces trois conditions sont nécessaires : puisque $G$ est moyennable, $G/R$ l'est aussi et donc est compact. Il en résulte, d'après la proposition 2 que $R$ possède la propriété de droite fixe et, d'après la proposition 4, vérifie bien la condition 2. D'après le lemme 4, $G$ opère trivialement sur le quotient de $R/R'$ par son sous-groupe compact maximal ; puisque $G$ est connexe, son action sur ce groupe compact est évidemment triviale, ce qui donne la condition 3.

Inversement, supposons vérifiées les conditions 1, 2, 3 et soit $\rho$ une représentation de $G$ dans un cône à base compacte $\mathcal{C}$. La restriction de $\rho$ à $R$ possède une droite fixe d'après la condition 2 et la proposition 4. L'exponentielle $\lambda$ correspondante est invariante sous $G$ d'après la condition 3 et $G$ opère donc dans le cône $\mathcal{C}_\lambda$ formé des $v$ de $\mathcal{C}$ tels que $\rho(r)v = (r)\, v$ , $r \in R$ . Cette action est en fait une action de $G/R'$ qui possède la propriété de droite fixe d'après le lemme 4. Donc $G$ possède une droite fixe dans $\mathcal{C}$ .

## II.- FONCTIONS PROPRES DES OPERATEURS DE CONVOLUTION

Dans cette deuxième partie, nous étudions les fonctions propres positives de l'opérateur de convolution défini par une mesure de probabilité $p$ sur un groupe $G$. Nous nous plaçons dans le cas particulier suivant : $G$ est engendré par un compact et possède un sous-groupe nilpotent distingué $N$ tel que $G/N$ soit compact, et $p$ vérifie l'hypothèse (F) précisée plus loin.

On sait que dans le cas où $G$ est abélien, un théorème de représentation intégrale de ces fonctions propres (en particulier fonctions harmoniques) a été donné par G. Choquet et J. Deny (2). Lorsque $G$ est semi-simple, un résultat analogue a été obtenu par H. Furstenberg (4), sous une hypothèse analogue à notre hypothèse (F) sur $p$.

Pour les groupes nilpotents discrets, quand l'élément neutre est dans le support de $p$, la généralisation de (2) a été obtenue par G. A. Margulis (7), qui indique également une extension au cas des groupes nilpotents localement compacts sans en donner la démonstration complète.

Nous reprenons ici les arguments de (7) et de (4), en particulier la propriété de droite fixe, dont l'étude systématique a fait l'objet de la première partie de ce travail. Appliquée dans le cas particulier des groupes nilpotents, cette propriété nous permet d'étendre le résultat de (2) aux extensions compactes de groupes nilpotents pour une certaine classe de probabilités $p$.

### Définitions et notations

Soit $G$ un groupe localement compact. Notons $\mathcal{C}_k$ l'espace des fonctions continues à support compact sur $G$, $M_+$ le cône (pointé) des mesures de Radon positives non nulles sur $G$, $dg$ une mesure de Haar à gauche sur $G$.

Les mesures sur $G$ ayant une densité par rapport à $dg$ sont identifiées avec cette densité.

Soit $p$ une probabilité à support compact sur $G$. Pour $\mu \in M_+$, on pose :

$$p * \mu(f) = \iint f(gh)\, dp(g)\, d\mu(h) \quad , \; f \in \mathcal{C}_k ,$$

et pour $\varphi \in \mathcal{C}_k$ :

$$\mu * \varphi(.) = \int \varphi(g^{-1}.)\, d\mu(g)$$

Ces définitions de la convolution sont compatibles avec l'identification mentionnée plus haut. La $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution de $p$ est notée $p^n$ .

Pour $\mu \in M_+$ , nous posons :

$$\check{\mu}(f) = \int f(g^{-1})\, d\mu(g) \quad , \ f \in \mathcal{C}_k \quad .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_k$ . La fonction $\check{\mu} * \varphi$ est continue et bornée, et on peut lui appliquer $p$ . Par le théorème de Fubini, on obtient la relation :

$$\mu(\check{p} * \varphi) = p * \mu(\varphi) \quad , \quad \varphi \in \mathcal{C}_k \quad , \ (1)$$

Cette relation implique en particulier la continuité de l'opérateur de convolution par une probabilité $p$ à support compact sur l'espace des mesures de Radon muni de la topologie vague.

Pour tout réel $a > 0$ , nous associons à une probabilité $p$ à support compact les sous-cônes de $M_+$ définis par :

$$S_a = \{\mu \in M_+ : p * \mu < a\mu\} \quad ,$$

$$H_a = \{\mu \in M_+ : p * \mu = a\mu\} \quad .$$

Pour $a = 1$ , on retrouve la notion de mesure $p$ -sous-harmonique et $p$ -harmonique. D'après la remarque sur la continuité de l'opérateur de convolution par $p$ , ces cônes sont fermés dans $M_+$ muni de la topologie vague. Dans le cas où $p$ a une densité par rapport à $dg$ , les cônes $H_a$ sont formés de fonctions.

Donnons enfin deux définitions :

Une probabilité $p$ est dite <u>irréductible</u>, si le semi-groupe engendré dans $G$ par le support de $p$ est égal à $G$ .

Nous dirons qu'une probabilité $p$ <u>vérifie l'hypothèse</u> (F), si elle est irréductible et si $p = \psi dg$ , où $\psi$ est une fonction continue positive à support compact.

<u>Proposition 1</u>

Soit $p$ une probabilité irréductible à support compact. Alors les cônes $S_a$ et $H_a$ associés à $p$ sont à base compacte dans $M_+$ . Si de plus $p$ a une densité continue par rapport à $dg$ , les cônes $H_a$ sont formés de fonctions continues, et la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $G$ coincide pour $\bigcup_{a>0} H_a$ avec la topologie induite par la topologie vague de $M_+$

Démonstration

Soit $B_a = \{\mu \in M_+ : p * \mu \leq a\mu \ , \ \mu(\varphi) = 1$ , où $\varphi$ est une fpnction continue positive non nulle à support compact fixée. Montrons que $B_a$ , qui est une base de $S_a$ , est compact.

Considérons la mesure $q = \sum_{n\geq 1} b^{-n} p^n$ avec $o < b < \inf (1, 1/a)$ .

On a $q * \mu \leq d\mu$ , pour $\mu \in S_a$ , $d = \sum_{n\geq 1} a^n b^n$ , et comme $p$ est irréductible, le support de $q$ est $G$ tout entier. La fonction $\check{q} * \varphi$ est donc $> 0$ partout sur $G$ , et pour toute fonction $\psi$ positive dans $\mathcal{C}_k$ , il existe une constante $C$ telle que $\psi \leq C\check{q} * \varphi$ . On a donc, pour $\mu \in B_a$ , d'après la relation (1), $\mu(\psi) \leq C\mu(\check{q} * \varphi) = Cq * \mu\ (\varphi) \leq dC\mu\ (\varphi) = dC$ , ce qui montre que $B_a$ est compact dans $M_+$ muni de la topologie vague. Le cône $H_a$ qui est fermé dans $S_a$ est aussi à base compacte.

Supposons maintenant qu'on ait $p = \psi dg$ , où $\psi$ est une fonction continue (positive et à support compact). La mesure $p * \mu$ a alors une densité par rapport à $dg$ , qui est la fonction continue $g \to \int \psi(gh^{-1})\ \Delta(h)\ d\mu(h)$ , où $\Delta$ désigne la fonction modulaire de $G$ .

La fonction $\psi$ étant à support compact, il existe une fonction $\varphi$ positive dans $\mathcal{C}_k$ telle que :

$$|\psi(gh^{-1})\ \Delta(h) - \psi(g'h^{-1})\ \Delta(h)| \leq \varepsilon(g,g')\ \varphi(h) \quad , \text{ avec } \varepsilon(g,g')$$

arbitrairement petits si $g$ et $g'$ sont assez voisins et appartiennent à un compact $K_0$ fixé de $G$ . En intégrant cette inégalité par rapport à $\mu$ , on obtient :

$$\left|\int \psi(gh^{-1})\ \Delta(h)\ d\mu(h) - \int \psi(g'h^{-1})\ \Delta(h)\ d\mu(h)\right| \leq \varepsilon(g,\ g')\ \mu(\varphi)$$

d'où, en notant $f$ la densité de $\mu \in H_a$ :

$$a\ |f(g) - f(g')| \leq \varepsilon(g,\ g')\ \mu(\varphi) \quad , \ g,g' \in K_0 \ .$$

Cette inégalité montre que tout compact de $\bigcup_{a>0} H_a$ est formé d'un ensemble de fonctions uniformément équicontinues sur les compacts de $G$ . Il en résulte que la convergence vague dans $\bigcup_{a>0} H_a$ implique la convergence uniforme sur les compacts de $G$ .

Remarque

L'équation $p * f = af$ s'écrit aussi :

$$af(x) = \int f(y^{-1}x)\ \psi(y)\ dy$$

d'où :

$$af(e) = \int f(y^{-1})\ \psi(y)\ dy$$

et ceci montre que la condition $f(e) = 1$ définit une base du cône $H_a$.

Nous supposerons désormais que G est un groupe localement compact possédant un sous-groupe nilpotent distingué N tel que G/N soit compact. Avant d'énoncer le résultat principal de cette deuxième partie, nous démontrons une série de lemmes.

Lemme 1

Soit f un élément extrémal de $H_a$. Alors il existe une exponentielle $\lambda$ sur N telle que :

$$f(gn) = f(g)\ \lambda(n), \text{ pour tout } g \in G, \text{ tout } n \in N \quad (2)$$

Démonstration

Montrons d'abord que si $\mu$ vérifie $p * \mu = a\mu$ elle vérifie aussi $\forall g \in G \quad \delta g * \mu \leqslant \alpha(g)\mu$ où $\alpha$ est une fonction borélienne localement bornée.

En effet, $\delta g * p$ admet une densité continue à support compact et si l'on pose $q = \sum_{n > o} b^{-n} p^n$ où $b < \inf(1, 1/a)$ on a comme prédédemment :

$\delta g * p \leqslant c(g)\ q$ On en déduit :

$\delta g * \mu = 1/a\ (\delta g * p) * \mu \leqslant c(g)_{/a}\ q * \mu = d/_a\ c(g)\ \mu$

d'où le résultat en prenant $\alpha(g) = d/a\ c(g)$

Soit $N \supset N^1 \supset N^2 \supset \ldots \supset N^r \supset N^{r+1} = \{e\}$ la suite centrale descendante du groupe nilpotent N et $\nu$ une mesure positive à support compact contenu dans $N^r$ que l'on suppose invariante sous l'action de G par automorphismes intérieurs. La mesure $\nu$ est alors centrale et : $\mu * \nu = \nu * \mu = \int \delta g * \mu d\nu(g) \leqslant \alpha\mu$
Si l'on suppose la mesure $\mu = f.dg$ extrémale dans le cône $H_a$, on en déduit :

$$\mu = \lambda(g)\ \mu * \delta g$$

pour $\nu$ presque tout g, où $\lambda(g)$ est un scalaire dépendant de g.

Comme l'action de $G$ sur $N^r$ est celle du groupe compact $G/N$ , il existe des mesures centrales $\nu$ de support arbitrairement grand dans $N^r$ .

On obtient ainsi pour $\mu$ extrémale dans $H_a$ , l'existence d'une fonction $\lambda$ telle que : $\mu * \delta_n = \lambda(n)\, \mu$ ,(3) pour tout $n \in N^r$ . Il est clair que $\lambda$ est une exponentielle sur $N^r$ .

Dans le cas où $N$ est abélien, ceci démontre le lemme. Dans le cas général, on raisonne par récurrence sur $r$ . Considérons le sous-cône fermé de $H_a$ , formé des mesures $\mu$ vérifiant la relation (3). Le groupe $N$ opère sur ce cône par translations à droites, et la propriété de droite fixe (cf prop. 3, 1ère partie) appliquée à $N$ et à ce cône montre qu'il existe une mesure $\mu_0$ et une exponentielle $\lambda_0$ sur $N$ vérifiant :

$$\mu_0 * \delta_n = \lambda_0(n)\, \mu_0 \quad , \text{ pour tout } n \in N \ .$$

Comme on a, par ailleurs, $\mu_0 * \delta_n = \lambda(n)\, \mu$ , pour $n \in N^r$ , on en déduit que $\lambda_0$ est égale à $\lambda$ sur $N^r$ , et donc, pour $r > 1$ , $\lambda$ est triviale.

On termine la démonstration en appliquant l'hypothèse de récurrence au groupe $G/N^r$ et à la probabilité $\bar{p}$ image de $p$ sur $G/N^r$ .

La relation (2) de l'énoncé du lemme se déduit de (3) en passant aux densités.

Lemme 2

Soit $\lambda$ une exponentielle sur $N$ , $h$ et $f$ deux fonctions continues positives sur $G$ vérifiant respectivement :

$$\forall n \in N \qquad h * \delta_n = \lambda(n)\, h \qquad\qquad p * h = ah$$

$$\forall n \in N \qquad f * \delta_n = \lambda(n)\, f \qquad\qquad p * f \leq af \ .$$

Alors $f/h$ est une constante.

Preuve

Posons $\rho(x,y) = \frac{1}{a}\, \varphi(xy^{-1})\, \frac{h(y)}{h(x)}$ et notons que les relations $p * h = ah$ et $p * f \leq af$ s'écrivent maintenant en posant $f/h = u$ :

$$\int_G \rho(x,y)\, dy = 1 \qquad\qquad\qquad \int_G \rho(x,y)\, u(y)\, dy \leq u(x)$$

Observons que le noyau $\rho$ vérifie d'après les hypothèses $\rho(xn, yn) = \rho(x, y)$ pour tout $n$ de $N$ . On obtient alors un nouveau noyau $\bar{\rho}$ sur $G/N$ en posant

$$\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_N \rho(x, yn)\, dn$$

et l'hypothèse sur $u$ s'écrit maintenant en introduisant la fonction $\bar{u}$ sur $G/N$ associée à $u$ :

$$\int_{G/N} \rho(\bar{x}, \bar{y})\, \bar{u}(\bar{y})\, d\bar{y} \leq \bar{u}(\bar{x})$$

Il résulte de ceci que $u(\bar{x})$ est une constante : si $\bar{x}_0$ est un point où $\bar{u}(\bar{x})$ atteint son minimum, on a $\bar{u}(\bar{y}) = \bar{u}(\bar{x}_0)$ pour tous les $\bar{y}$ tels que $\rho(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ , donc $u(x_0) = u(y)$ dès que $\psi(x_0 y^{-1})$ est strictement positif. Le résultat s'obtient alors en remplaçant $p$ par $p^k$ pour tous les entiers $k$ .

<u>Lemme 3</u>

Il existe une fonction positive unique $f_\lambda$ sur $G$ telle que $p * f_\lambda$ soit proportionnelle à $f_\lambda$ , et vérifiant :

$$f_\lambda(e) = 1 \;,\; f_\lambda(gn) = f_\lambda(g)\,\lambda(n) \quad \forall n \in N .$$

La fonction $\hat{p}(\lambda)$ définie sur les exponentielles de $N$ par $p * f_\lambda = \hat{p}(\lambda)\; f_\lambda$ est strictement convexe.

<u>Démonstration</u>

Soit $f_\lambda$ et $f'_\lambda$ deux fonctions vérifiant les conditions impoeées,c'est-à-dire :

$$f_\lambda(e) = f'_\lambda(e) = 1$$
$$f_\lambda(gn) = f_\lambda(g)\,\lambda(n)$$
$$f'_\lambda(gn) = f'_\lambda(g)\,\lambda(n)$$
$$p * f_\lambda = kf_\lambda$$
$$p * f'_\lambda = k'\, f'_\lambda$$

et supposons $k' \geq k$ . D'après le lemme précédent $f_\lambda/f'_\lambda$ est une constante qui ne peut être ici que "un". On a donc aussi $k = k'$ , ce qui définit $\hat{p}(\lambda)$ uniquement.

Pour montrer l'existence de $f_\lambda$ et par conséquent de la fonction $\hat{p}(\lambda)$ on considère le cône $\mathcal{C}_\lambda$ des mesures $\mu$ positives vérifiant $\mu * \delta_n = \lambda(n)\mu$ pour tout $n$ dans $N$. Ce cône est fermé en topologie vague et si $\varphi$ désigne une fonction continue positive à support compact qui ne s'annulle sur aucune classe modulo $N$, il possède une base compacte définie par $\mu(\varphi) = 1$ comme le montre le raisonnement suivant. Si $\psi$ est continue à support compact sur $G$, elle est majorée par une combinaison linéaire de translatées de $\varphi$ par des éléments de $N$ :

$$0 \leq \psi \leq \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \, \varphi * \delta_{n_i} ,$$

d'où

$$\mu(\psi) \leq \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \, \lambda(n_i) \, \mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \, \lambda(n_i),$$

si $\mu(\varphi) = 1$.

Enfin, puisque $p$ est à support compact, la convolution à gauche par $p$ définit un opérateur continu de $\mathcal{C}'_\lambda$ dans lui-même. D'après le théorème de Schauder-Tychonov, il existe donc une mesure $\mu$ dans $\mathcal{C}_\lambda$ telle que $p * \mu$ soit colinéaire à $\mu$. La stricte convexité de $\hat{p}(\lambda)$ résulte comme suit de l'inégalité de Hölder : si $\alpha$ et $\alpha'$ sont deux réels positifs de somme "un" et $f_\lambda$, $f'_{\lambda'}$ deux fonctions vérifiant :

$$p * f_\lambda = k f_\lambda \quad , \quad p * f_{\lambda'} = k' \, f_{\lambda'}$$

on a aussi :

$$p * (f_\lambda^\alpha \, f_{\lambda'}^{\alpha'}) \leq k^\alpha \, k'^{\alpha'} \, (f_\lambda^\alpha \, f_{\lambda'}^{\alpha'}) ,$$

et

$$(f_\lambda^\alpha \, f_{\lambda'}^{\alpha'}) \, (gn) = (f_\lambda^\alpha \, f_{\lambda'}^{\alpha'}) \, (g) \, \lambda^\alpha(n) \, \lambda'^{\alpha'}(n),$$

ceci prouve déjà que :

$$\hat{p}(\lambda^\alpha \, \lambda'^{\alpha'}) \leq k^\alpha \, k'^{\alpha'} = [\hat{p}(\lambda)]^\alpha \, [\hat{p}(\lambda')]^{\alpha'} .$$

L'égalité dans l'inégalité ci-dessus conduit d'après le lemme précédent à :

$$p * f_\lambda^\alpha \, f_{\lambda'}^{\alpha'} = (p * f_\lambda)^\alpha \, (p * f_{\lambda'})^{\alpha'}$$

c'est-à-dire à $f_\lambda = f_{\lambda'}$, $\lambda = \lambda'$ d'après l'irréductibilité de $p$.

<u>Lemme 4</u>

La fonction $f_\lambda$ positive sur $G$ qui vérifie $p * f_\lambda = af_\lambda$, $f_\lambda(e) = 1$, $f_\lambda(gn) = f_\lambda(g)\,\lambda(n)$ pour une exponentielle $\lambda$ sur $N$ est extrémale dans l'ensemble des mesures de Radon $\mu$ vérifiant $p * \mu = a\mu$.

Démonstration

Si $f_{\lambda_0}$ n'est pas extrémale dans $H_a$ , elle peut s'écrire d'après le théorème de représentation intégrale de Choquet appliqué à la base compacte B de $H_a$ définie par $f(e) = 1$ sous la forme :

$$f_{\lambda_0} = \int_B \eta d\,\nu(\eta)$$

où $\nu$ est une mesure bornée sur B portée par les points extrémaux de B . On en déduit :

$$\forall n \in N \quad , \quad \lambda_0(n) = \int_B \eta(n)\, d\nu(\eta)$$

Soit alors $\eta = f_{\lambda_1}$ un point du support de $\nu$ tel que $\lambda_1$ soit distinct de $\lambda_0$ et considérons une direction de N dans laquelle $\lambda_1/\lambda_0$ tend vers l'infini cette propriété reste valable dans un voisinage de $\lambda_1$ et donc, comme l'application qui associe à $\eta$ sa restriction à N est continue, il existe un ensemble $B_1$ de mesure positive pour $\nu$ sur lequel $\eta/\lambda_0$ tend vers l'infini dans la direction considérée. Ceci contredit, d'après le théorème de Lebesgue, la relation :

$$1 = \int_B \eta/\lambda_0(n)\, d\nu(\eta) \geq \int_{B_1} \eta\, /\lambda_0(n)\, d\nu(\eta)$$

Le support de $\nu$ est réduit à $f_{\lambda_0}$ , qui est donc extrémale.

Lemme 5

L'application $\lambda \to f_\lambda$ est un homéomorphisme de $N^*$ sur son image dans le cône des mesures de Radon positives.

Démonstration

La continuité de l'application $f_\lambda \to \lambda$ est immédiate d'après la proposition Inversement, soit $\lambda_n$ une suite de $N^*$ convergeant vers $\lambda$ et observons d'abord que, $\hat{p}(\lambda)$ étant convexe donc continue, la suite $\hat{p}(\lambda_n)$ est bornée supérieurement. La condition $f_{\lambda_n}(e) = 1$ montre alors que l'ensemble des $f_{\lambda_n}$ est relativement compact. Si l'on considère une sous-suite de $f_{\lambda_n}$ convergeant vers la mesure positive $\mu$ , l'équation $p * f_{\lambda_n} = \hat{p}(\lambda_n)\, f_{\lambda_n}$ fournit la relation $p * \mu = \hat{p}(\lambda)\mu$ et la condition :

$$f_{\lambda_n}(gx) = f_{\lambda_n}(g)\ \lambda_n(x) \quad , \quad (x \in N) \quad ,$$

fournit :

$$\mu * \delta_x = \lambda(x) \, , \quad (x \in N) \, .$$

Ceci montre, d'après le lemme 3 que $\mu$ est colinéaire à $f_\lambda \, dg$ et la condition $f_{\lambda_n}(e) = 1$ montre que $\mu = f_\lambda$ . On en conclut que $f_{\lambda_n}$ converge vers $f_\lambda$ .

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème de ce paragraphe :

Théorème

Soient $G$ un groupe localement compact engendré par un compact et possédant un sous-groupe nilpotent $N$ fermé et distingué tel que $G/N$ soit compact, $p$ une probabilité irréductible sur $G$ qui admet une densité continue et à support compact par rapport à la mesure de Haar de $G$ .

Il existe alors une fonction continue unique sur $G \times N^*$ notée $f(g,\lambda) = f_\lambda(g)$ telle que $p * f_\lambda$ soit proportionnelle à $f_\lambda$ , $f_\lambda(e) = 1$ et $f_\lambda(gn) = f_\lambda(g)\,\lambda(n)$ . La fonction $\hat{p}(\lambda)$ définie par $p * f_\lambda = \hat{p}(\lambda)\, f_\lambda$ est strictement convexe et G-invariante.

Les solutions positives extrémales de l'équation $p * f = af$ sont les fonctions $f_\lambda(g)$ avec $\hat{p}(\lambda) = a$ et toute solution s'écrit sous la forme :

$$f(g) = \int_{N^*} f_\lambda(g)\, d\nu(\lambda)$$

où $\nu$ est une mesure bornée portée par l'ensemble compact $\hat{p}(\lambda) = a$ et uniquement déterminée par $f$ .

Démonstration

L'existence de la fonction continue $f_\lambda(g)$ vérifiant $f_\lambda(e) = 1$ $f_\lambda(gn) = f_\lambda(g)\,\lambda(n)$ et $p * f_\lambda = \hat{p}(\lambda)\, f_\lambda$ a été prouvée au lemme 3. La continuité de $f(g,\lambda)$ par rapport à l'ensemble des deux variables $g$ et $\lambda$ découle du lemme 5 et de la proposition 1 précisant la topologie de $\bigcup_{a>0} H_a$ . Le fait que $\hat{p}(\lambda)$ est G-invariante découle du fait que, si $f_\lambda$ vérifie :

$$p * f_\lambda = \hat{p}(\lambda)\, f_\lambda \, ,$$

on a aussi :

$$p * (f_\lambda * \delta_g) = \hat{p}(\lambda)\,(f_\lambda * \delta_g) \, ,$$

et de plus

$$f_\lambda * \delta_g = f_{\lambda g} \, .$$

La nature des solutions extrémales de $p * f = kf$ a été étudiée aux lemmes 1 et 4. La dernière assertion résulte du théorème de représentation intégrale de Choquet et de l'homéomorphisme signalé dans le lemme 5.

Corollaire

Si $G$ est transitif sur les directions de $N^*$, on a pour tout $\lambda$ de $N^*$, $\hat{p}(\lambda) \geq 1$ et les fonctions harmoniques positives pour $p$ sont constantes.

Démonstration

L'orbite d'un élément $\lambda$ de $N^*$ sous $G$ est une sphère de centre $\lambda_o = Id$ par hypothèse. Puisque $\hat{p}(\lambda)$ est convexe et invariante sous $G$ on a donc :

$$\hat{p}(\lambda_o) \leq \hat{p}(\lambda) \quad ,$$

c'est-à-dire :
$$\hat{p}(\lambda) \geq 1 \quad .$$

D'après la stricte convexité de $p$ on peut affirmer que le minimum de $\hat{p}(\lambda)$ est atteint en l'unique point $\lambda_o = Id$. De ceci découle la fin de l'énoncé.

Remarques

Il résulte en particulier de cet énoncé que les harmoniques bornées sont constantes, ce que l'on peut obtenir de manière différente et sous des hypothèses plus faibles concernant $G$ et $p$ (6).

Le corollaire s'applique par exemple au groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Pour $n = 2$ on peut l'obtenir directement, avec des hypothèses plus faibles sur $p$, en tenant compte de la propriété de récurrence de la marche aléatoire associée à $p$ (3).

## REFERENCES


1) L. AUSLANDER et C. C. MOORE : Unitary representations of solvable lie groups 1966 (Memories of the AMS 62).

2) G. CHOQUET et J. DENY : Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$ CRAS t 250 (1960), 799-801.

3) P. CREPEL : Marches aléatoires sur le groupe des déplacements du plan. CRAS Paris t 278 (1er avril 1974), 961-963.

4) H. FURSTENBERG : Translation-invariant cones of functions on semi-simple groups. Bull. Amer. Math. Soc 71 (1965), 271-326.

5) F. P. GREENLEAF : Invariant means on topological groups and their applications. Van Nostrand Math. Studies. Series n° 16, 1969.

6) Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. SMF 1973 101, 333-379.

7) G. A. MARGULIES : Positive harmonic functions on nilpotent groups. Doklady 1966 Tom 166 n°5 .

8) L. C. ROBERTSON : A note on the structure of Moore groups. Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969, 594-599.

9) Théorie du potentiel et analyse harmonique. Lecture Notes in Mathematics 404 SPRINGER VERLAG 1974.126-132



J. P. CONZE et Y. GUIVARC'H

Laboratoire de Probabilités

ERA 250

Université de RENNES