J. P. CONZE

Remarques sur les transformations cylindriques et les équations fonctionnelles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 3, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A3_0>

REMARQUES SUR LES TRANSFORMATIONS CYLINDRIQUES ET LES EQUATIONS FONCTIONNELLES

J.P. Conze

Soient (X,μ,T) un système dynamique, ϕ une application mesurable de X dans $\mathbb{R}^d$. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On définit une transformation (cylindrique) S sur $X \times \mathbb{R}^d$ en posant $S(x,y) = (Tx, y + \phi(x))$. La transformation S laisse invariante la mesure produit $\mu \times m$.

Etant donnée une fonction f sur X, on note Tf la fonction définie par $Tf(x) = f(Tx)$, $x \in X$, et on écrit $\langle\lambda,y\rangle$ pour $\sum^d \lambda_i y_i$, λ, $y \in \mathbb{R}^d$.

Dans la suite, nous considérons deux types d'équations fonctionnelles dans lesquelles ψ, resp. ψ_λ, est la fonction inconnue :

$$T\psi = \phi + \psi, \quad (1) ;$$

$$T\psi_\lambda = e^{2\pi i\langle\lambda,\phi\rangle}\, \psi_\lambda, \quad (2),$$ où λ est fixé dans $\mathbb{R}^d$.

1. L^1-ergodicité et équations fonctionnelles

Théorème 1 [M. Herman] - *On suppose* (X,μ,T) *ergodique. Il existe* $f \in L^1(\mu\times m)$ *invariante par* S, *non nulle, si et seulement si l'équation* (1) *a une solution mesurable* ψ.

<u>Preuve</u> : Soit ψ une solution mesurable de (1). La transformation S est alors conjuguée de $T\times$ Identité, via la conjugaison définie par $(x,y) \longrightarrow (x, y + \psi(x))$. Elle laisse donc "beaucoup" de fonctions de $L^1(\mu\times m)$ invariantes.

Nous établissons maintenant l'implication inverse. Soit $f \in L^1(\mu\times m)$ invariante par S, i.e. telle que $f(Tx, y + \phi(x)) = f(x,y)$, $\mu\times m$-pp. Considérons la transformée de Fourier partielle de f en y :

$$\hat{f}(x,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)e^{-2\pi i<\lambda,y>}dy$$

Posons $\psi_\lambda(x) = \hat{f}(x, -\lambda)$.

D'après Fubini, pour presque tout x , la fonction $y \longrightarrow f(x,y)$ est intégrable et donc, pour presque tout x , la fonction $\lambda \longrightarrow \psi_\lambda(x)$ est continue .

Comme f est invariante par S , on a :

$$\psi_\lambda(Tx) = \int f(Tx,y)\ e^{2\pi i<\lambda,y>}\ dy = \int f(Tx,\ y + \phi(x)\ e^{2\pi i<\lambda,y+\phi(x)>}\ dy$$
$$= e^{2\pi i<\lambda,\phi(x)>}\int f(x,y)\ e^{2\pi i<\lambda,y>}\ dy = e^{2\pi i<\lambda,\phi(x)>}\psi_\lambda(x)\ .$$

Pour chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{R}^d$, la fonction ψ_λ est donc solution de (2). Ceci implique, en particulier, le système (X,μ,T) étant ergodique, que le module $|\psi_\lambda|$ de ψ_λ est presque partout égal à une constante $d(\lambda)$. Il est clair que la fonction $\lambda \longrightarrow d(\lambda)$ est continue. Soit $A = \{d(\lambda) \neq 0\}$. Si l'ouvert A est vide, alors f est nulle. Supposons f non identiquement nulle, et donc A non vide, et montrons que l'équation (1) a une solution mesurable ψ .

Nous allons construire, à partir de $(\psi_\lambda, \lambda \in A)$, pour chaque valeur λ dans $\mathbb{R}^d$ une fonction h_λ solution de (2), de façon que l'application $\lambda \longrightarrow h_\lambda$ soit un homomorphisme continu de $\mathbb{R}^d$.

Etant donnés des entiers k et k' positifs, considérons l'ensemble $C(k,k')$ formé des couples $((\lambda_1,\ldots,\lambda_k),(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'}))$ vérifiant $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{j=1}^{k'} \alpha_j$, $\lambda_i,\alpha_j \in A$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k'$. D'après les conditions imposées aux λ_i et α_j, pour $((\lambda_1,\ldots,\lambda_k),(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'})) \in C(k,k')$, les fonctions $\prod_i \psi_{\lambda_i}$ et $\prod_j \psi_{\alpha_j}$ sont des solutions non nulles de la même équation fonctionnelle multiplicative. Comme (X,μ,T) est ergodique, ces fonctions sont proportionnelles : il existe une constante $C_{k,k'}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'})$ telle que

$$\prod_i \psi_{\lambda_i}(x) = C_{k,k'}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'}) \prod_j \psi_{\alpha_j}(x), \quad (3)$$

Les fonctions intervenant dans cette inégalité sont mesurables par rapport à l'ensemble des variables. En appliquant Fubini, on en déduit que, pour presque tout x, l'ensemble des couples $((\lambda_1,\ldots,\lambda_k),(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'}))$ dans $C(k,k')$ ne vérifiant pas (3) est négligeable dans $C(k,k')$.

Comme de plus les fonctions considérées sont, pour presque toute valeur de x, continues comme fonctions des λ_i et des λ_j, on voit qu'en fait, pour presque tout x, la relation (3) est vérifiée pour tous les couples $((\lambda_1,\ldots,\lambda_k),(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'}))$ dans $C(k,k')$. Fixons un x_o pour lequel la relation (3) est vérifiée, pour tous les couples dans $C(k,k')$, quels que soient k et k'.

Soit H le semi-groupe engendré dans $\mathbb{R}^d$ par A. Pour $\beta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, dans H, posons $h_\beta = \Pi\psi_{\lambda_i} / \Pi\psi_{\lambda_i}(x_o)$. D'après le choix de x_o, la valeur de h ne dépend pas de la décomposition de β utilisée pour la définition. On a donc, pour $\beta,\beta' \in H$, $h_{\beta+\beta'} = h_\beta h_{\beta'}$. Tout λ dans $\mathbb{R}^d$ est de la forme $\lambda = \beta-\beta'$, avec $\beta, \beta' \in H$. La relation précédente montre que si l'on pose $h_\lambda = h_\beta h_{\beta'}^{-1}$, pour $\lambda = \beta-\beta'$, $\beta,\beta' \in H$, on obtient une valeur indépendante de la décomposition de λ et telle que $h_{\lambda+\lambda'} = h_\lambda h_{\lambda'}$. De plus, il est clair que la fonction $\lambda \longrightarrow h_\lambda(x)$ est continue pour presque tout x.

Ceci implique l'existence d'une fonction ψ mesurable, de X dans $\mathbb{R}^d$, telle que l'on ait : $h = e^{2\pi i<\lambda,\psi>}$. La fonction ψ est solution de (1).

2. Relation entre les équations (1) et (2)

Il est clair que, si l'équation (1) possède une solution mesurable ψ, l'équation (2) possède, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, une solution mesurable ψ_λ de module 1. Il suffit de prendre $\psi_\lambda = \exp 2\pi i<\lambda,\psi>$. Inversement, d'après la démonstration du théorème 1, si l'équation (2) possède une solution ψ_λ dépendant (pour presque tout x) continûment de λ, avec $\psi_\lambda \not\equiv 0$ pour λ dans un ouvert non vide, alors l'équation (1) possède une solution mesurable.

Nous allons montrer que ce résultat reste vrai sans conditions sur la régularité de ψ_λ par rapport à λ.

Théorème 2. *On suppose (X,μ,T) ergodique et $L^1(\mu)$ séparable. Si l'équation (1) n'a pas de solution mesurable, l'équation (2) n'a pas de solution ψ_λ mesurable non nulle pour presque toute valeur de λ.*

Preuve : Nous allons raisonner comme dans la démonstration du théorème 1, mais en montrant d'abord une propriété de mesurabilité de ψ_λ par rapport à λ.

On considère l'équation (2) : $T\psi_\lambda = \exp 2\pi i\langle\lambda,\phi\rangle\psi_\lambda$. Soit A l'ensemble dans $\lambda \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels cette équation a une solution ψ_λ mesurable non nulle. Supposons que A soit non négligeable.

Considérons une famille F dénombrable dense dans $L^1(\mu)$. Pour $g \in F$, soit $A_{g,\varepsilon} = \{\lambda \in A : |\int g\psi_\lambda d_\mu| \geq \varepsilon\}$, où ε est un nombre > 0. Puisque A est non négligeable, il existe $g_1 \in F$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que $A_{g_1,\varepsilon_1} = B$ soit non négligeable. Montrons que, pour $\lambda \in \overline{B}$, la fermeture de B, il existe une solution θ_λ de (2) mesurable non nulle.

Considérons sur L^∞ la topologie faible $\sigma = \sigma(L^1,L^\infty)$. Comme T préserve la mesure, l'opérateur défini par T sur L^∞ est faiblement continu. D'autre part, d'après le théorème de Lebesgue, l'application de $\mathbb{R}^d \times L^\infty$ dans L^∞ définie par $(\lambda,h) \longrightarrow e^{2\pi i\langle\lambda,\phi\rangle}h$ est faiblement continue.

Il en résulte que toute limite faible h d'une suite (ψ_{λ_n}), telle que $\lim_n \lambda_n = \lambda$, vérifie l'équation fonctionnelle $Th = e^{2\pi i\langle\lambda,\phi\rangle}h$. Deux telles limites faibles h et h' sont donc proportionnelles, si elle sont non nulles.

Remarquons encore que, la condition $|\int g\psi_\lambda d\mu| \geq \varepsilon$ étant vérifiée sur B, on a, pour toute limite faible h d'une suite (ψ_{λ_n}) avec $\lambda_n \in B$ et $\lim_n \lambda_n = \lambda$, l'inégalité : $|\int gh d\mu| \geq \varepsilon$. En particulier, cette limite h est non nulle.

Soit $\lambda \in \overline{B}$. Par la compacité faible de la boule unité de L^∞, on peut trouver une suite (λ_n) dans B telle que $\lim_n \lambda_n = \lambda$, et $\lim_n \psi_{\lambda_n}$ existe pour la convergence faible. Posons $\theta_\lambda = \lim_n \psi_{\lambda_n} / \int g\psi_{\lambda_n} d\mu$. D'après ce qui précède, la valeur de θ_λ est indépendante du choix de la suite (λ_n) . De plus l'argument habituel d'unicité prouve la continuité pour la topologie σ de la fonction $\lambda \longrightarrow \theta_\lambda$ définie pour $\overline{B}$.

Sur l'espace mesuré (X,μ) considérons une suite (K_n) de noyaux formant une identité approchée. D'après la continuité faible de $\lambda \longrightarrow \theta_\lambda$, les fonctions $\lambda \longrightarrow \int \theta_\lambda(x')\, K_n(x',x)\, d\mu(x')$ sont continues pour tout x . Comme on a $\lim_n \int \theta_\lambda(x')\, K_n(x',x)\, d\mu(x') = \theta_\lambda(x)$ pour presque tout x , il en résulte que, pour presque tout x , les fonctions $\lambda \longrightarrow \theta_\lambda(x)$ sont mesurables.

Reprenons maintenant la fin du raisonnement dans la démonstration du théorème 1. Choisissons un x_0 tel que l'ensemble des couples $((\lambda_1,\dots,\lambda_k),(\alpha_1,\dots,\alpha_{k'}))$ dans $C(k,k')$ ne vérifiant pas (3) soit négligeable dans $C(k,k')$, quels que soient k et k'. Si l'on a choisi x_0 tel que $\lambda \longrightarrow \theta_\lambda(x_0)$ soit mesurable pour $\lambda \in \overline{B}$, on peut trouver un fermé D de mesure positive dans $\overline{B}$ tel que la restriction de $\lambda \longrightarrow \theta_\lambda(x_0)$ à D soit continue sur D . Les fonctions en $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, $\alpha_1,\dots,\alpha_{k'}$, intervenant dans la relation (3) pour $x = x_0$ sont continues si l'on restreint les λ_i et les α_i à D . Ainsi la relation (3)(pour $x = x_0$) est vérifiée sur l'ensemble

$$D(k,k') = \{((\lambda_1,\ldots,\lambda_k),(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k'})),\ \lambda_i,\alpha_j \in D,\ \sum_1^k \lambda_i = \sum_1^{k'} \alpha_j\}.$$

Comme D est de mesure positive, le groupe engendré par D dans $\mathbb{R}^d$ est égal à $\mathbb{R}^d$. On peut alors terminer le raisonnement comme dans le théorème 1.

3. Systèmes cylindriques sur les tores quotients

Pour chaque tore quotient de $\mathbb{R}^d$, on peut considérer le système cylindrique défini par passage au quotient à partir de S, soit encore, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^d$, le système cylindrique S_λ défini sur $X \times \mathbb{T}^d$ par $(x, y \bmod 1) \longrightarrow (Tx, y + \lambda\phi(x) \bmod 1)$.

Supposons (X,μ,T) ergodique. On sait que S_λ est ergodique sur $X \times \mathbb{T}^d$ muni de la mesure produit si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{Z}^d-\{0\}$, l'équation fonctionnelle $T\psi_\lambda = e^{2\pi i \Sigma p_i \lambda_i \phi_i}\psi_\lambda$ n'a pas de solution mesurable non nulle ψ_λ.

Un corollaire du théorème 2 est donc, que, pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, le système S_λ est ergodique.

Nous allons montrer directement que cette propriété est équivalente à la "L^1-ergodicité" de S sur $X \times \mathbb{R}^d$ (i.e. au fait qu'il n'y a pas de fonction intégrable non nulle invariante par S sur $X \times \mathbb{R}^d$).

Cette démonstration fournit, via le théorème 1, une nouvelle preuve du théorème 2.

Théorème 3. *On suppose* (X,μ,T) *ergodique,* $L^1(\mu)$ *séparable, et* ϕ *à valeurs entières. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(I) *la transformation* S *est* L^1*-ergodique sur* $X \times \mathbb{Z}^d$;

(II) *la densité du nombre de passage du système en* 0 *est nulle* ;

(III) *pour presque tout* $\lambda \in \mathbb{R}^d$ *, la transformation* S_λ *est ergodique sur* $X \times \mathbb{T}^d$.

Preuve : La densité du nombre de passage du système en 0 est la limite de la moyenne : $\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} 1_{X\times\{0\}}(S^n(x,0))$, moyenne qui, d'après le théorème ergodique converge. La limite est une fonction de $L^1(X \times \mathbb{Z}^d)$ invariante par S . Elle est donc nulle, si S est L^1-ergodique. Ceci montre que (I) implique (II) .

Montrons que (II) implique (III). Soit h une fonction mesurable bornée sur X et $p \in \mathbb{Z}^d-\{0\}$. Posons
$\phi(N,\lambda,x) = \sum_0^{N-1} h(T^n x)\exp(2\pi i\lambda p(\sum_1^n \phi(T^k x)))$.

D'après le théorème ergodique appliqué à la fonction $(x,y) \longrightarrow h(x)e^{2\pi ipy}$ et à la transformation S_λ , la limite $\gamma_\lambda(x)$ de $\frac{1}{N}\phi(N,\lambda,x)$ existe pour presque tout x et tout λ . En utilisant la séparabilité de $L^1(\mu)$, on voit que, pour prouver l'ergodicité de S_λ pour presque tout λ , il suffit de montrer que $\gamma_\lambda \equiv 0$, pour presque tout λ . Ceci va résulter d'une estimation de $\iint|\phi(N,\lambda,x)|^2\, d\lambda dx$.

Un calcul simple (intégration en λ) montre que cette intégrale tend vers 0 , quand N tend vers l'infini, si la densité du nombre de passage du système en 0 est nulle.

Enfin, pour montrer que (III) implique (I), il suffit de reprendre la première partie de la démonstration du théorème 1.

Revenons maintenant au cas où ϕ est à valeurs quelconques dans $\mathbb{R}^d$. (On suppose toujours (X,μ,T) ergodique et $L^1(\mu)$ séparable).

Théorème 4 . *La transformation* S *est* L^1-ergodique *sur* $X \times \mathbb{R}^d$ *si et seulement si, pour presque tout* $\lambda \in \mathbb{R}^d$ *la transformation* S_λ *est ergodique sur* $X \times \mathbb{T}^d$

Preuve : Supposons S L^1-ergodique sur $X \times \mathbb{R}^d$. Soit λ_o tel que S_{λ_o} ne soit pas ergodique (si toutefois un tel λ_o existe). On sait qu'alors il existe $p \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$ et h mesurable de module 1 vérifiant la relation $Th = e^{2\pi i \Sigma p_i \lambda_i \phi_i} h$.

Posons $\lambda_1 = p\lambda_o$. Soit ζ telle que $e^{2\pi i \zeta} = h$. La fonction $\frac{1}{\lambda_1}\phi + \zeta - T\zeta$ est à valeurs entières. La transformation S' définie par $(x,y) \longrightarrow (Tx, y+\frac{1}{\lambda_1}\phi(x)+\zeta(x)-T\zeta(x))$ est conjuguée à S . On peut alors appliquer le théorème 3.

Pour établir la réciproque, on reprend le début de la démonstration du théorème 1 .

4. Unique ergodicité

Supposons maintenant que X soit un compact, T une transformation continue sur X et que le système (X,T) soit uniquement ergodique, i.e. qu'il n'existe sur X qu'une mesure de probabilité invariante par T . On note μ cette mesure.

Théorème 5 . *Si* (X,T) *est uniquement ergodique, il existe une mesure de probabilité invariante par* S *sur* $X \times \mathbb{R}^d$, *si et seulement si l'équation fonctionnelle* (1) *a une solution mesurable* ψ .

<u>Preuve</u> : La preuve, comme l'énoncé, est plus ou moins classique.

Soit P une probabilité sur $X \times \mathbb{R}^d$ invariante par S . Nous allons montrer, par un procédé classique de régularisation, qu'il existe des fonctions dans $L^1(\mu\times m)$ invariantes par S .

Pour toute fonction $u \geq 0$ continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, la mesure de Radon $P*u$ définie par
$(P*u)(f) = \iint f(x,y+z)u(z)dP(x,y)dz, \quad f \in C_k(X\times R^d)$ est invariante par S .

Si g est une fonction continue bornée sur $X \times \mathbb{R}^n$, ne dépendant que de x , l'unique ergodicité de T implique : $\int_{X\times\mathbb{R}^d} g(x)dP(x,y) = \int_X g(x)d\mu(x)$. Pour $f \in C_k(X\times\mathbb{R}^d)$, on a donc :

$$(P*1)(f) = \iint f(x,y+z)dz\, dP(x,y) = \int(\int f(x,y+z)dz)\, dP(x,y) =$$
$$= \int(\int f(x,y)dz)\, d\mu(x) = (\mu\times m)(f) .$$

D'autre part, on a la majoration, pour $f \in C_k^+(\mathbb{R}^d)$:

$$0\leq(P*u)(f)\leq||u||_\infty \iint f(x,y+z)dz\, dP(x,y) = ||u||_\infty(P*1)(f) =$$
$$= ||u||_\infty(\mu\times m)(f) .$$

La mesure $P * u$ a donc une densité ϕ_u par rapport à $\mu \times m$, qui est invariante par S . Si u est à support compact, $P * u$ est finie et ϕ_u est dans $L^1(\mu\times m)$. D'après le théorème 1 , ceci implique que l'équation (1) a une solution mesurable.

Théorème 6 . *Si* (X,T) *est uniquement ergodique, et si l'équation* (1) *n'a pas de solution mesurable, pour presque tout* $\lambda \in \mathbb{R}^d$ *la transformation* S_λ *sur* $X \times \mathbb{T}^d$ *est uniquement ergodique.*

Preuve : Il suffit d'appliquer les théorèmes 4 et 1 et le fait bien connu que l'unique ergodicité de S_λ résulte de l'ergodicité de S_λ pour la mesure produit sur $X \times \mathbb{T}^d$, dès que T est elle-même uniquement ergodique. On notera que la démonstration de ce fait est essentiellement celle du théorème 5 .

5. Remarques

1. A partir du théorème 6 , on déduit facilement des propriétés d'équirépartition dans $\mathbb{R}^d$ pour les suites $(\sum_1^n \phi(T^\mu x),\ n \in \mathbb{N})$, quand T est uniquement ergodique (par exemple une rotation irrationnelle) et ϕ suffisamment régulière (cf. par exemple |1|).

2. Mentionnons encore le résultat suivant, qui est simple à obtenir et permet de construire des suites équiréparties sur les quotients compacts de groupes nilpotents, en se ramenant au cas de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 7. *Soient* N *un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe,* N' *son groupe dérivé* Γ *un sous-groupe discret de* N *tel que* N/Γ *soit compact. Soit* ϕ *une application mesurable de* X *dans* N . *La transformation cylindrique* S_1 *définie sur* $X \times N/\Gamma$ *par* $(x,y) \to (Tx, \phi(x)y\Gamma)$ *est* *ergodique pour la mesure produit (resp. uniquement ergodique) si et seulement si la transformation quotient* $\tilde{S}$ *définie sur* $X \times N/N'\Gamma$ *par* $(x,yN'\Gamma) \longrightarrow (x,\phi(x)yN'\Gamma)$ *est ergodique (resp. uniquement ergodique).*

3. Dans le cas où la transformation S est ergodique sur $X \times \mathbb{R}^d$, les transformations S_λ sur les tores quotients sont ergodiques, pour chaque λ, alors que la "L^1-ergodicité" n'implique (à **priori**) l'ergodicité des transformations S_λ, que pour presque tout λ. On peut poser la question d'une réciproque : l'ergodicité de S_λ pour chaque λ implique-t-elle l'ergodicité de S sur $\lambda \times \mathbb{R}^d$?

4. L'un des points de départ de ce travail a été une conversation avec M. Herman, qui utilise un cas particulier du théorème 5 pour la construction de difféomorphismes minimaux de certaines variétés. Outre la démonstration donnée par M. Herman, il existe (au moins) deux autres démonstrations du théorème 2, ou de résultats proches de ce théorème. L'une vient de m'être communiquée par H. Helson [2]. L'autre, mentionnée dans [2] , se trouve dans un article de T. Hamachi, Y. Oka et M. Osikawa [3] .

REFERENCES

[1] JP CONZE : Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques, Rennes 1975-1976.

[2] H. HELSON : Sections in function spaces, Berkeley, 1977.

[3] T. HAMACHI, Y. OKA, M. OSIKAWA : A classification of ergo-godic non-singular transformation groups, Mem. Fac. Sc. : Kyushu Univ., Ser. A28 (1974)

Jean-Pierre CONZE

Université de Rennes
Laboratoire de Probabilités
Avenue du Général Leclerc
35031 RENNES Cédex

Mars 1977.