

B. PETIT

**Endomorphismes du tore, g-mesures et schémas de Bernoulli**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule 2

« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 11, p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1976\\_\\_2\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__2_A11_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ENDOMORPHISMES DU TORE, $g$ -MESURES ET SCHEMAS DE BERNOULLI

par

B. PETIT

## INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord brièvement la définition d'une  $g$ -mesure ([3]), sur un espace métrique compact muni de sa tribu de Borel  $(X, \mathcal{B})$ . Soit, sur  $(X, \mathcal{B})$ , une transformation  $T$  vérifiant les conditions suivantes :

T.1 Il existe un entier  $a > 1$ , tel que, pour tout  $x \in X$ , on ait :

$$\text{Card } T^{-1}\{x\} = a$$

T.2  $T$  est un homéomorphisme local.

T.3 Il existe  $\delta_0 > 0$ , et  $\rho > 1$  tels que : Pour tout couple  $(x, y) \in X^2$ ,  $d(x, y) < \delta_0$  implique  $d(Tx, Ty) \geq \rho d(x, y)$  (On dira alors que l'endomorphisme  $T$  est dilatant)

T.4 Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ , tel que : pour tout entier  $n \geq N(\varepsilon)$ , tout couple  $(x, y) \in X^2$ , il existe  $z \in T^{-n}\{y\}$ , tel que  $d(x, z) < \varepsilon$ . (On dira que les ensembles  $\bigcup_0^{+\infty} T^{-n}\{y\}$  sont uniformément partout denses).

Donnons-nous alors, sur  $X$ , une fonction numérique  $g$  satisfaisant à :

G.1  $g$  est strictement positive sur  $X$  ;

G.2  $g$  est lipschitzienne d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , sur  $X$  ;

i.e. : il existe  $L \in \mathbb{R}_+^*$ , tel que pour tout couple  $(x, y) \in X^2$  :

$$|g(x) - g(y)| \leq L d(x, y)^\alpha.$$

G.3. Pour tout  $x$  de  $X$ ,  $\sum_{z \in T^{-1}\{x\}} g(z) = 1$

La fonction  $g$  nous permet de considérer sur l'espace des fonctions numériques continues sur  $X$ , muni de la norme de la convergence uniforme,  $\| \cdot \|$ , la contraction  $\varphi_g$  définie par :

$$\Psi_g f(x) = \sum_{z \in T^{-1}\{x\}} g(z) f(z) .$$

On sait alors, ([3], [6]) qu'il existe une mesure de probabilité unique, notée  $\mu_g$ , vérifiant :

M.1 Pour tout  $f \in \mathcal{C}(X)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left| \mu_g(f) - \Psi_g^n f \right| \right|_{\mu} = 0$ .

M.2  $\mu_g$  est T-invariante (i.e. : pour tout  $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_g(T^{-1}B) = \mu_g(B) .$$

M.3  $\mu_g$  est fortement mélangeante (et par conséquent ergodique) :

Pour tout couple,  $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}(X)^2$ , on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_g(T^m f_1 \cdot f_2) = \mu_g(f_1) \cdot \mu_g(f_2) .$$

On définit ainsi un système dynamique,  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$ .

On pourra dans différents articles, en particulier ([2] et [6]) voir quelques cas particuliers, pour lesquels, l'extension naturelle ([7]) du système ainsi défini est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Dans le cas général, exposé ci-dessus, il est immédiat que :

*T est un endomorphisme exact ;  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  a une extension naturelle isomorphe à un K-système.*

(Voir principalement [7]).

En fait, à la lumière des travaux de R. Bowen, F. Ledrappier et P. Walters, (voir par exemple [9]), on peut dire que l'extension naturelle du système  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  est un schéma de Bernoulli.

Nous nous proposons ici, seulement, d'établir cet isomorphisme dans certains cas d'espèce. A notre avis, cette démonstration met bien en évidence les utilisations des structures de  $X$  et  $T$ . Énonçons donc le résultat :

Théorème : Soient  $X = \mathbb{T}^n$ ,  $\mathcal{B}$  la tribu de Borel sur  $X$ , et  $T$  un endomorphisme induit par une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ , à coefficients entiers telle que :

$$i) \quad |\det A| = a > 1 .$$

ii) Toutes les valeurs propres de  $A$  sont, en module, strictement supérieures à 1 .

Soit  $g$  une fonction satisfaisant G.1 à G.3, alors :

1° - Il existe une seule  $g$ -mesure  $\mu_g$ ; elle vérifie M.1 à M.3

2° - L'extension naturelle du système  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  est isomorphe à un schéma de Bernoulli

3° - L'entropie  $h$  du système est donnée par  $h = -\int \log g \, d\mu_g$  .

Naturellement, la première préoccupation sera de comparer  $T$  avec les propriétés T.1 à T.4 .

L'isomorphisme sera, bien entendu, établi grâce aux puissants résultats de D.S. Ornstein ([4], [5]) qui ont déjà servi dans [2] et [6], et dont on pourra trouver les énoncés dans [1].

Pour en finir, notons les résultats suivants, que nous utiliserons dans la suite.

$$\underline{\text{M.4}} \quad \text{Pour toute } f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu_g), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int \left| \varphi_g^m f - f \right| d\mu_g = 0$$

$$\underline{\text{M.5}} \quad \text{Pour tout couple } (f_1, f_2) \text{ de fonctions mesurables positives ou nulles : } \int \varphi_g^m f_1 \cdot f_2 \, d\mu_g = \int f_1 \cdot \varphi_g^m f_2 \, d\mu_g .$$

$$\underline{\text{M.6}} \quad \text{Pour toute } f \in \mathcal{C}(X), \quad \varphi_g^m f(x) = \sum_{z \in T^{-m}\{x\}} \prod_{i=0}^{m-1} g(T^i z) f(z) .$$

Nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses du théorème.

## ENDOMORPHISMES DILATANTS

Remarquons avant tout, que la distance sur  $\mathbb{T}^n$  peut s'exprimer :

$$d(x,y) = \inf_{p \in \mathbb{Z}^n} ||x-y+p||$$

où, dans le second membre,  $x$  et  $y$  sont considérés comme points de  $\mathbb{R}^n$  et où la norme désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

Il est alors évident que :

D.1 Si  $(x,y) \in (\mathbb{T}^n)^2$   $d(x,y) \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$

D.2  $||x-y|| < \frac{\sqrt{n}}{2}$  implique  $||x-y|| = d(x,y)$ .

Démontrons alors :

Lemme 1 : Soit  $T$  un endomorphisme de  $\mathbb{T}^n$  induit par une matrice carrée  $A$ , d'ordre  $n$ , à coefficients entiers, telle que  $|\det A| = a > 1$ ; si toutes les valeurs propres de  $A$  sont, en module,  $> 1$ , on a :

- 1 - T.1, T.2 et T.4 sont vérifiées.
- 2 - Il existe un entier  $k_0 \geq 1$ , un nombre  $\delta_0 > 0$  et un nombre  $\rho > 2$ , tels que :  $d(x,y) < \delta_0$  implique  $d(T^{k_0}x, T^{k_0}y) \geq \rho d(x,y)$ .

dem.: a. T.1 et T.2 sont évidentes avec  $a = |\det A|$ , et du fait que  $A$  induit un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.

b. Avant de démontrer T.4 établissons le 2.

Suivant la démarche de Katznelson dans [2], appelons  $V_1, V_2, \dots, V_r$  les sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  invariants par  $A$ , sur lesquels les valeurs propres de  $A$  sont de modules  $\rho_1, \dots, \rho_r$  respectivement.

Soient  $\rho_0 = \inf_{1 \leq i \leq r} \rho_i$  et  $R = \sup_{1 \leq i \leq r} \rho_i$ ; notre hypothèse montre

que  $\rho_0 > 1$ , utilisant la forme de Jordan de la matrice  $A$  et les résultats de ([8], ch. 7), pour tout  $i$ , il existe deux constantes  $a_i$  et  $b_i$  strictement positives telles que, pour tout  $x \in V_i$  et tout entier  $m \geq 1$ , on ait :

$$a_i m^{k_i} \rho_i^m \|x\| \leq \|A^m x\| \leq b_i m^{k_i} \rho_i^m \|x\| \quad (1)$$

où  $k_i = \dim V_i$ . Sachant que toutes les normes de  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes, on peut en conclure à l'existence de  $\alpha$  et  $\beta > 0$ , tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha m_0^m \|x\| \leq \|A^m x\| \leq \beta m^n R^m \|x\| \quad (2)$$

On en conclut alors que : pour tout couple  $(x, y) \in X^2$ ,

$$\alpha m_0^m d(x, y) \leq d(T^m x, T^m y)$$

dès que  $d(x, y) < \frac{\sqrt{n}}{2m^n R^m}$ , grâce à D.2 ; prenant  $m_0$

tel que  $\rho = \alpha m_0 \rho_0^{m_0} > 2$  on a la conclusion annoncée.

c. Avant de démontrer T.4, donnons la définition suivante :

Définition Soit  $T$  un endomorphisme induit sur  $\mathbb{T}^n$  par une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  à coefficients entiers telle que  $|\det A| = a > 1$ . On appellera partition canonique associée à  $T$  la partition de  $\mathbb{T}^n$  en  $a$  parallélotopes sur chacun desquels  $T$  est injective, et chacun d'eux ayant  $\mathbb{T}^n$  pour image par  $T$ . On peut construire une telle partition de la façon suivante : L'image de  $[0, 1]^n$  par  $A$  est un parallélotope d'aire géométrique  $|\det A|$ , recouvrant un certain nombre de "cubes" de côté 1, totalement ou partiellement. Considérant les antécédents par  $A$ , des intersections de  $A([0, 1]^n)$  avec ces différents cubes, on constate que ces ensembles forment, dans  $\mathbb{T}^n$ , une partition de  $\mathbb{T}^n$  en  $a$  parallélotopes géométriquement égaux.

On peut constater que dans les hypothèses du lemme 1  
 $A([0,1]^n)$  recouvre au moins un "cube" de côté 1 totalement,  
 si  $P$  est son antécédent par  $A$  on en déduit que :

$$(x,y) \in P^2 \quad ||Ax-Ay|| < \sqrt{n}$$

Démontrons alors T.4 ; Soit  $\mathcal{P}$  la partition canonique à  
 $T^{m_0}$  ; En vertu de (3), on a :

$$\rho ||x-y|| \leq ||A^{m_0}x - A^{m_0}y|| \leq \sqrt{n}$$

donc  $||x-y|| \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho} < \frac{\sqrt{n}}{2}$  ; donc, grâce à D.2  $d(x,y) = ||x-y||$   
 sur un parallélotope convenablement choisi. Tous les paral-

lélotoles  $P$  de  $\mathcal{P}$  étant géométriquement égaux et  $d$  étant  
 invariante par translation sur  $T^n$ , on a :  $\forall P \in \mathcal{P}, \text{diam } P \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho}$ .

Considérant les partitions canoniques associées à  $T^{m_0}, \dots, T^{km_0}, \dots$ ,

notées respectivement  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k, \dots$ , si  $P \in \mathcal{P}_k$ , ce qui  
 précède montre que :  $\text{diam } P < \frac{\sqrt{n}}{\rho^k}$ .

D'où T.4 ▀

Nous supposons, à partir de maintenant que  $m_0=1$ .

## LA MESURE $\mu_g$

Lemme 2 : Soit  $K$  un ensemble relativement compact dans  
 $\mathcal{C}([0,1]^n)$  ; pour tout  $f \in K$ , posons  $\tilde{f}$  la fonction définie  
 sur  $T^n$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in [0,1]^n$

1 -  $f \rightarrow \tilde{f}$  est une application continue de  $\mathcal{C}([0,1]^n)$   
 dans  $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu_g)$  ;

2 - Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $M(\epsilon)$  tel que :  
 $m \geq M(\epsilon)$  implique, pour tout  $f \in K$

$$||\int_g^m \tilde{f} - \int \tilde{f} d\mu_g||_1 < \epsilon$$

dém. 1. Est évident en remarquant que  $\tilde{f} \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \nu_g)$  et que :

$$\|\tilde{f}\| \leq \|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_U .$$

2. L'image de  $K$  par l'application continue  $f \rightarrow \tilde{f}$  est donc relativement compacte dans  $L^1(X, \mathcal{B}, \nu_g)$ , et, par conséquent, on a 2. en vertu de M.4 .

Soit  $\mathcal{P}_0$  la partition canonique associée à  $T$  ; on pose, pour  $m \geq 1$  ,

$$\mathcal{P}_m = \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i} \mathcal{P}_0$$

Lemme 3 : La partition  $\mathcal{P}_0$  est génératrice ([1]) .

dém. Soit  $P$  un atome de  $\mathcal{P}_m$  .  $P = \bigcap_{i=0}^{m-1} T^{-i} P_i$  où  $P_i \in \mathcal{P}_0$  . Soit  $(x, y) \in P^2$  ;  $x$  et  $y$  appartiennent à  $P_0$  , et on a, par

construction :  $\|Ax - Ay\| \leq \sqrt{n}$  .

donc,  $d(x, y) < \frac{\sqrt{n}}{\rho}$  ;

Par conséquent :  $\rho d(x, y) < \rho \|x - y\| \leq \|Ax - Ay\|$  ;

Mais  $\|Ax - Ay\| = \|Tx - Ty\| = d(Tx, Ty)$  car  $Tx$  et  $Ty$  appartiennent à  $P_1$  , et on a alors  $d(Tx, Ty) \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho}$

Par conséquent,  $d(x, y) \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho^2}$

Une récurrence facile montre donc que  $\text{diam } P \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho^m}$  (4) .

On en conclut donc que tout ensemble de la forme  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i} P_i$ ,

$P_i \in \mathcal{P}_0$  , est réduit à, au plus, un point. Tout point pouvant

se coder de cette façon, la partition  $\mathcal{P}_0$  est bien génératrice.





Il est parfaitement clair que, pour tout  $m \geq 1$ ,  $T^m$  est injective sur les atomes de  $\mathcal{P}_m$ , et que  $T^m(\bigcap_0^{m-1} T^{-i} \mathcal{P}_i) = X$ , car pour tout  $x$ , et tout  $P$ ,  $T^{-m}\{x\} \cap P$  est réduit à un point.

Il est également évident, qu'étant donné  $P \in \mathcal{P}_m$ , l'application qui à  $x$ , fait correspondre son antécédent dans  $P$  par  $T^m$ , est uniformément continue sur  $[0,1]^m$ . Considérons alors  $g_{m,P}(x) = \int_1^m g(T^{m-i}z)$   $z \in T^{-m}\{x\} \cap P$ .  $g_{m,P}$  est uniformément continue sur  $[0,1]^m$  et donc prolongeable canoniquement en une fonction  $\gamma_{m,P}$  de  $\mathcal{C}([0,1]^m)$ . Par définition  $\tilde{\gamma}_{m,P} = g_{m,P}$ .

Lemme 4 On a :  $\sup_{\substack{m \geq 1 \\ P \in \mathcal{P}_m}} \frac{\|\gamma_{m,P}\|_u}{\mu_g(P)} = C_1 < +\infty$ .

dem. Soit  $P = \bigcap_0^{m-1} T^{-i} P_i$ ,  $P_i \in \mathcal{P}_0$ .

$$\begin{aligned} \mu_g(P) &= \int 1_P(x) d\mu_g(x) \\ &= \int \varphi_g 1_P(x) d\mu_g(x) \end{aligned}$$

Mais  $\varphi_g 1_P(x) = g(z) 1_{TP}(x)$  car  $TP = \bigcap_0^{m-2} T^{-i} P_{i+1}$ , et, où  $Tz = x$ . Donc, si  $z_0 \in P$ , on a :

$$|\mu_g(P) - g(z_0) \mu_g(TP)| \leq \int |g(z) - g(z_0)| 1_{TP}(x) d\mu_g(x),$$

ce qui, grâce à C.2 et à (4), donne :

$$\left| \frac{\mu_g(P)}{\mu_g(TP)} - g(z_0) \right| \leq \frac{n^{\alpha/2}}{\rho m^\alpha} \cdot L$$

Par un procédé de récurrence immédiat :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq m-1 \quad \left| \frac{\mu_g(T^k P)}{\mu_g(T^{k+1} P)} - g(T^k z_0) \right| \leq \frac{n^{\alpha/2}}{\rho \alpha^{(m-k)}} \cdot L \quad (5)$$

On aura donc :

$$\left| \log \mu_g(P) - \log \prod_{i=0}^{m-1} g(T^{m-i} z_0) \right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \log \frac{\mu_g(T^i P)}{\mu_g(T^{i+1} P)} - \log g(T^i z_0) \right|$$

si on pose  $c = \inf_{x \in X} g(x)$ ,  $c > 0$  grâce à G.1, le théorème

des accroissements finis appliqué à  $\log$  et (5) nous donnent :

$$\left| \log \mu_g(P) - \log \prod_{i=0}^{m-1} g(T^{m-i} z_0) \right| \leq \frac{L}{c} n^{\alpha/2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\rho^{\alpha(m-k)}} = C'_1 < +\infty$$

Passant à l'exponentielle, on obtient l'assertion cherchée avec

$$C_1 = e^{C'_1}$$



Enfin, nous terminerons ce paragraphe par le point essentiel :

Lemme 5 La famille  $\left\{ \frac{Y_{m,p}}{\|Y_{m,p}\|_{\mathcal{U}}} \mid m \geq 1, P \in \mathcal{P}_m \right\}$  est relativement compacte dans  $\mathcal{C}([0,1]^n)$ .

dém. Grâce au théorème d'Arzéla-Ascoli, il nous suffit de montrer que cette famille est équicontinue dans  $\mathcal{C}([0,1]^n)$ .

Nous allons, pour ce faire, calculer  $\Delta(m, P, x, x') = \left| \log Y_{m,p}(x) - \log Y_{m,p}(x') \right|$

On a, sur  $[0,1]^n$  :

$$\Delta(m, P, x, x') \leq \sum_{k=1}^m \left| \log g(T^{m-k} z) - \log g(T^{m-k} z') \right|$$

où  $z \in T^{-m}\{x\} \cap P$  et  $z' \in T^{-m}\{x'\} \cap P$

Or on sait que  $T^{m-k} z$  et  $T^{m-k} z'$  appartiennent au même atome de  $\mathcal{P}_k$ . De sorte que :  $d(T^{m-k} z, T^{m-k} z') \leq \frac{d(x, x')}{\rho^k}$ .

Par suite, appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta(m, P, x, x') &\leq d(x, x')^\alpha \frac{L}{c} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\rho^{\alpha k}} \\ &\leq C_2 \cdot d(x, x')^\alpha \end{aligned}$$

De cette inégalité, nous tirons :

$$\left| \frac{\gamma_{m,p}(x)}{\|\gamma_{m,p}\|_U} - \frac{\gamma_{m,p}(x')}{\|\gamma_{m,p}\|_U} \right| \leq \left| \exp \log \frac{\gamma_{m,p}(x)}{\|\gamma_{m,p}\|_U} - \exp \log \frac{\gamma_{m,p}(x')}{\|\gamma_{m,p}\|_U} \right|$$

$$\leq C_3 \left| \log \gamma_{m,p}(x) - \log \gamma_{m,p}(x') \right| \quad (6)$$

Donc :

$$\left| \frac{\gamma_{m,p}(x)}{\|\gamma_{m,p}\|_U} - \frac{\gamma_{m,p}(x')}{\|\gamma_{m,p}\|_U} \right| \leq C_4 d(x, x')^\alpha .$$

((6) s'obtient en appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle).

Cette inégalité reste vraie sur  $[0, 1]^n$  ; ce qui achève la démonstration du lemme 5 .

Corollaire . La famille  $\left\{ \frac{g_{m,p}}{\mu_{g(p)}} , m \geq 1, P \in \mathcal{P}_m \right\}$  est relativement compacte dans  $L^1(X, \mathcal{B}, \mu_g)$  .

(7)

dem : Résulte immédiatement des lemmes 2, 4 et 5.

## LE THEOREME D'ISOMORPHISME

Rappelons d'abord le résultat fondamental d'Ornstein.

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique ergodique : s'il existe une partition génératrice finie mesurable  $\mathcal{P}_0$  de  $X$  telle que :

(B) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que si  $m \geq 1$ ,  $q \geq 1$  et  $p \geq N(\varepsilon) + n$ , les partitions  $\mathcal{P}_m$  et  $\mathcal{P}_{p,q} = \bigvee_p^{p+q-1} T^{-i} \mathcal{P}_0$

soient  $\epsilon$ -indépendantes, l'extension naturelle du système  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Nous allons donc établir :

Proposition 1. Pour  $p > 2$  et  $m_0 = 1$ , la partition  $\mathcal{P}_0$  vérifie (B).

dém. On sait déjà que cette partition est génératrice (lemme 3). Les atomes de  $\mathcal{P}_{p,q}$  sont de la forme  $T^{-p}Q$ , où  $Q \in \mathcal{P}_q$ .

Ecrivons la condition d' $\epsilon$ -indépendance :

$$S(m, p, q) = \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \sum_{Q \in \mathcal{P}_q} | \mu_g(P \cap T^{-p}Q) - \mu_g(P) \mu_g(Q) | < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \mu_g(P \cap T^{-p}Q) &= \int 1_P 1_{T^{-p}Q} d\mu_g \\ &= \int \psi_g^p 1_P \cdot 1_Q d\mu_g \quad (\text{cf. M.5.}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S(m, p, q) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \sum_{Q \in \mathcal{P}_q} \int 1_Q | \psi_g^p 1_P - \mu_g(P) | d\mu_g$$

$$\text{Or } \sum_{Q \in \mathcal{P}_q} 1_Q = 1, \text{ donc :}$$

$$S(m, p, q) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_m} | | \psi_g^p 1_P - \mu_g(P) | | 1$$

$$\text{Remarquant que } \psi_g^p 1_P = \psi_g^{p-m} \cdot \psi_g^m 1_P = \psi_g^{p-m} g_{m,p} \quad (\text{cf. M.6.}),$$

grâce au lemme 2 et au corollaire du lemme 5, on peut conclure :

$$\text{pour } p-m \geq M(\epsilon) \quad | | \psi_g^p 1_P - \mu_g(P) | | 1 < \epsilon \cdot \mu_g(P).$$

d'où  $S(m, p, q) < \epsilon$ . ▀

Proposition 2. L'entropie  $h$  du système  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  est donnée

$$\text{par : } h = - \int_X \log g d\mu_g.$$

dém. La partition  $\mathcal{P}_0$  étant génératrice, le théorème de Mc Millan montre que :

$$h = -\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \mu_g(P) \cdot \mu_g(P). \quad (8)$$

Or nous savons, (cf. lemme 4) que :

$$-C'_1 + \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_0) \leq \log \mu_g(P) \leq C'_1 + \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_0)$$

pour tout  $z_0 \in P$ . Donc :

$$-\frac{C'_1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_p) \mu_g(P) \leq u_m \leq \frac{C'_1}{m} +$$

$$\frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_p) \mu_g(P) \cdot \mu_g(P).$$

où  $u_m = \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \mu_g(P) \cdot \mu_g(P)$ .

Or il est aisé de constater que :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_p) \mu_g(P) = \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log g(z_p) \mu_g(P) +$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{m-1}} \log g(z'_p) \mu_g(P) + \dots + \sum_{P \in \mathcal{P}_0} \log g(z_p^{(m)}) \mu_g(P) \quad (9)$$

Comme, d'autre part :  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log g(z_p) \mu_g(P) = \int \log g \, d\mu_g$

(8) et (9) nous montrent donc que :

$$h = - \int \log g \, d\mu_g \quad \blacksquare$$

## CAS GÉNÉRAL

Ici nous ne supposons plus  $m_0 = 1$ . Nous devons nous assurer d'abord de l'existence et de l'unicité de la  $g$ -mesure.

Choisissons  $m_0$  tel que  $\alpha m_0 \rho_0^{m_0} = \rho > 2$  (cf. Lemme 1).

Sur  $X$  considérons la fonction  $g'(x) = \prod_{i=1}^{m_0} g(T^{m_0-i} x)$ .

Cette fonction vérifie naturellement les propriétés G.1 à G.3.

Soit  $\nu$  la mesure associée à  $g'$  et à  $T^{m_0}$ . On remarque immédia-

tement que  $\varphi_g^k, f = \varphi_g^{km_0} f$  pour toute  $f \in \mathcal{C}(X)$ . La suite  $\{\varphi_g^{km_0} f\} k \in \mathbb{N}$  converge donc uniformément vers  $v(f)$ . Or si on se reporte à la démonstration d'existence (th. 1 de [6]), on voit qu'il suffit qu'un sous-suite converge uniformément pour que toute la suite  $\{\varphi_g^k f\} k \in \mathbb{N}$  converge uniformément, ceci à cause du fait que  $\varphi_g$  est une contraction de  $\mathcal{C}(X)$ , propriété qui ne dépend que de  $g$  et non de  $T$ .

On a donc  $v = \mu_g$ , et, toutes les autres propriétés.

Proposition 3. Le système  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  est un facteur ([1]) du système  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T^{m_0})$ .

dem. Pour tout  $P_i \in \mathcal{P}_{m_0}$  (partition canonique à  $T^{m_0}$ ), posons  $Q_i = T^{m_0^{-1}} P_i$ , les  $Q_i$  forment une partition de  $X$  en  $a$  parallélotopes sur lesquels  $T$  est injective et  $TQ_i = X$ .

La partition  $\{Q_i\} = Q_0$  est génératrice. En effet : tout point  $x$  de  $X$  se code de façon unique  $x = \bigcap_0^\infty T^{-i} Q_i$ . Chacun de ces ensembles est au plus réduit à un point car :

$$\begin{aligned} \bigcap_0^\infty T^{-i} Q_i &= \bigcap_0^\infty T^{-i+m_0^{-1}} P_i \subset \bigcap_{j=1}^\infty T^{-m_0 j + 1 + m_0^{-1}} P_{j m_0^{-1}} \\ &= \bigcap_{j=1}^\infty T^{-m_0(j-1)} P_{j m_0^{-1}} \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure grâce au lemme 3 appliqué à  $T^{m_0}$ .

Si  $x \in X$ , il existe une suite unique  $\{P_i\} \subset \mathcal{P}_{m_0}$  telle que

$$x = \bigcap_0^\infty T^{-m_0 i} P_i$$

Posons  $\phi(x) = \bigcap_0^\infty T^{-i} (T^{m_0^{-1}} P_i)$

- Il est parfaitement évident que  $\phi \cdot T^{m_0} = T \cdot \phi$
- $\phi$  est mesurable : il suffit de voir que  $\phi^{-1}Q = \bigcup_{P=Q} T^{m_0-1}P$
- Ce même argument montre que  $\phi\mu_g = \mu_g$

$\phi$  étant surjective, la proposition 3 est établie. ▀

Corollaire : L'extension naturelle de  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

dem. Propositions 1 et 3 et résultats de [1], [4] et [5].

Proposition 4 . L'entropie du système  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$  est donnée par :  $h = - \int \log g \, d\mu_g$  .

dem. La proposition 2, montre que  $h'$ , l'entropie de  $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T^{m_0})$  est donnée par :

$$h' = - \int \log \prod_{i=1}^{m_0} g(T^{m_0-i}x) \, d\mu_g(x) ;$$

puisque  $\mu_g$  est  $T$ -invariante, il vient :

$$h' = - m_0 \int \log g \, d\mu_g .$$

Or on sait que  $h' = m_0 h$ , et par suite  $h = - \int \log g \, d\mu_g$  ▀

Conclusion : Les propositions 1,2,3,4 et les remarques du début du dernier paragraphe, achèvent la démonstration du théorème que nous nous proposons d'établir.

REFERENCES

- (1) J.P. CONZE  
Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique  
Séminaire Bourbaki, 420, 25ème année, 1972-73
- (2) Y. KATZNELSON  
Ergodic automorphisms of  $T^n$  are Bernoulli shifts  
Israel J. of Math., 10, n° 2, 186-195 (1971)
- (3) M. KEANE  
Strongly mixing g-measures  
Inv. Math., 16, 309-324 (1972)
- (4) D.S. ORNSTEIN  
Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic  
advances in Math., 5, 339-348 (1970)
- (5) D.S. ORNSTEIN  
Imbedding Bernoulli shifts in flows  
Construction to Ergodic Theory and Prob., 178-218,  
Springer-Verlag, (1970)
- (6) B.PETIT  
Schémas de Bernoulli et g-mesures  
C.R. Acad. Sc. Paris, 280, série A, 17-20 (1975)
- (7) V.A. ROHLIN  
Exact endomorphisms of a Lebesgue space  
Amer. Math. Soc. translations series 2, 64, 244-272 (1967)
- (8) R. THEODOR  
Analyse numérique linéaire  
Cours du CNAM, Editions scientifiques Riber, Paris
- (9) P. Walters  
A generalised Ruelle-Perron-Frobenius theorem and some applications  
International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Sept. 1975, Rennes, France).