J. FARAUT

# Analyse harmonique sur les hyperboloïdes et équations différentielles singulières

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A8_0>

# ANALYSE HARMONIQUE SUR LES HYPERBOLOIDES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES SINGULIERES

J. FARAUT

1. Pour deux points $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous notons

$$[x,y] = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n .$$

Soit $X$ l'hyperboloïde à une nappe défini par

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x,x] = -1\} .$$

C'est une variété de dimension $n$, qui est un espace homogène du groupe $G = O(1,n)$ :

$$X = O(1,n)/O(1,n-1) .$$

Il existe sur $X$ une mesure invariante par $G$, notée $dx$, qui dans l'ouvert $\{x_0 \neq 0\}$ a pour expression

$$dx = \frac{dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n}{|x_0|} .$$

Il existe sur $X$ un opérateur différentiel invariant du second ordre, qui est un pesudo-laplacien, c'est-à-dire le laplacien d'une structure pseudo-riemannienne qui est invariante par $G$ : nous le notons $\Delta$. On peut définir cet opérateur $\Delta$ de la façon suivante : soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $X$, $\tilde{f}$ la fonction définie dans l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x,x] < 0\}$, homogène de degré $0$ qui coïncide avec $f$ sur $X$, $\Delta f$ est la restriction à $X$ de

$$\Box \tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_n^2} .$$

L'opérateur $\Delta$ est localement du type de l'opérateur des ondes avec $n-1$ variables d'espace.

L'invariance de l'opérateur $\Delta$ sous l'action de $G$ permet de montrer que $\Delta$ , muni du domaine $\mathcal{D}(X)$ (espace des fonctions de classe $C^\infty$ sur $X$ , à support compact), est essentiellement autoadjoint dans $L^2(X)$ . Considérons la décomposition spectrale du plus petit prolongement fermé de $(\mathcal{D}(X),\Delta)$ . D'après les théorèmes spectraux de Von Neumann et de Maurin ([6]), il existe une famille $K_\lambda$ de noyaux hermitiens continus sur $\mathcal{D}(X)$ et une mesure positive $\sigma$ sur $R$ telle que

$$\int_X f(x)\,\overline{g(x)}dx = \int_R K_\lambda(f,g)d\sigma(\lambda) .$$

Pour presque tout $\lambda$ le noyau $K_\lambda$ vérifie

$$K_\lambda(\Delta f,g) = K_\lambda(f,\Delta g) = \lambda\, K_\lambda(f,g) .$$

Nous allons dans cet exposé étudier la structure de ces noyaux $K_\lambda$ .

2. Soit $f$ une fonction de $\mathcal{D}(X)$ , et $\gamma$ un élément de $G$ . Nous notons $\tau_\gamma f$ la fonction définie par

$$\tau_\gamma f(x) = f(\gamma^{-1}x) \ .$$

DEFINITION 1. <u>Un noyau sphérique est une forme bilinéaire symétrique continue</u> $\Phi$ <u>sur</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>telle que</u>

(1) $$\forall\ f,g \in \mathcal{D}(X)\ ,\ \forall\ \gamma \in G\ ,\ \Phi(\tau_\gamma f, \tau_\gamma g) = \Phi(f,g)$$

<u>c'est-à-dire que</u> $\Phi$ <u>est un noyau invariant</u>

(2) $$\exists\ \lambda \in \mathbb{C}\ ,\ \forall\ f,g \in \mathcal{D}(X)\ ,\ \Phi(\Delta f, g) = \Phi(f, \Delta g) = \lambda\ \Phi(f,g)\ .$$

<u>Nous disons que le noyau sphérique</u> $\Phi$ <u>correspond à la valeur propre</u> $\lambda$ .

Considérons une fonction $F$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ , et posons

$$\Phi(f,g) = \int_X \int_X F([x,y])\ f(x)\ g(y)dx\ dy\ .$$

La forme $\Phi$ est bilinéaire symétrique continue sur $\mathcal{D}(X)$ et vérifie (1). Pour que $\Phi$ vérifie (2), il faut et il suffit que $F$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle de Legendre

$$LF = (t^2-1)\frac{d^2F}{dt^2} + nt\frac{dF}{dt} = \lambda F\ .$$

Cette équation différentielle est singulière en $t=1$ et $t=-1$ , et en fait, sauf pour une suite de valeurs de $\lambda$ , elle n'admet pas de solutions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ . Nous sommes amenés à remplacer $F$ par une distribution. Pour cela, nous allons introduire les espaces fonctionnels $\mathcal{D}_\mu$ .

Posons $\mu = \frac{n}{2} - 1$ . Soit $\delta$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$\delta(t) = (t^2-1)^\mu \operatorname{Log}|t^2-1|$ , si $n$ est pair ( $\mu$ est entier)

$\delta(t) = (t^2-1)^\mu\ Y(t^2-1)$ , si $n$ est impair ( $\mu$ n'est pas entier)

( $Y$ est la fonction d'Heaviside, $Y(t) = 1$ si $t \geq 0$ , $Y(t) = 0$ si $t < 0$ ).

DEFINITION 2. L'espace $\mathcal{D}_\mu$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \delta(t)\ \varphi_1(t)$$

où $\varphi_0$ et $\varphi_1$ sont deux fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

L'espace $\mathcal{D}_\mu$ est muni d'une topologie pour laquelle il est une limite inductive d'espaces de Fréchet. Pour la définition de cette topologie, on peut consulter [13], p. 205 et [4].

THEOREME 1. a) L'égalité

$$\int_X \int_X F([x,y])\ f(x)\ g(y) dx\ dy = \int_{\mathbb{R}} F(t)\ f \# g(t) dt$$

définit une application linéaire continue

$$\mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}_\mu$$
$$(f,g) \longmapsto f \# g \ .$$

b) Cette application possède les propriétés suivantes :

$$f \# g = g \# f$$

$$\Delta f \# g = f \# \Delta g = L^*(f \# g)$$

où $L^*$ est l'opérateur adjoint de l'opérateur de Legendre $L$ :

$$L^*\varphi = (t^2-1)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (4-n)t\frac{d\varphi}{dt} + (2-n)\varphi \ .$$

Soit $a = (0,1,0,\ldots,0)$ et soit $H$ le sous-groupe de $G$ qui stabilise $a$ , $H \simeq O(1,n-1)$ . Si $f$ est une fonction de $\mathcal{D}(X)$ il existe une fonction $f_1$ de $\mathcal{D}(G)$ telle que

$$f(\gamma a) = \int_H f_1(\gamma h)dh$$

où $dh$ désigne une mesure de Haar sur $H$ . Pour des mesures de Haar convenablement normalisées sur $G$ et sur $H$

$$\int_X \int_X F([x,y])\ f(x)\ g(y)dx\ dy = \int_X F([a,y])\ \varphi(y)dy$$

où $\varphi$ est la fonction de $\mathcal{D}(X)$ définie par

$$\varphi(y) = \int_G g(\gamma y)\ f_1(\gamma)d\gamma\ .$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier l'application $M$ qui à une fonction $f$ de $\mathcal{D}(X)$ fait correspondre la fonction $Mf$ définie (presque partout) sur $R$ telle que pour toute fonction continue $F$ définie sur $R$

$$\int_X F(x_1)\ f(x)dx = \int_R Mf(t)\ F(t)dt$$

ce qui peut s'écrire avec la notation de Guelfand

$$Mf(t) = \int f(x)\ \delta(x_1-t)dx\ .$$

La fonction $x \to x_1$ , définie sur $X$ , a deux valeurs critiques qui sont $+1$ et $-1$ . Pour étudier le comportement de $Mf$ au voisinage de $+1$ , considérons une fonction $f$ de $\mathcal{D}(X)$ dont le support est contenu dans $\{x \in X | x_1 > 0\}$ . Dans cet ouvert, nous pouvons prendre $x_0, x_2, \dots, x_n$ comme coordonnées. Posons

$$f_1(x_0^2, x_2, \dots, x_n) = f(x_0, x_2, \dots, x_n) + f(-x_0, x_2, \dots, x_n)$$

$$f_2(x_0^2, r^2) = \int_S f_1(x_0^2, ru_2, \dots, ru_n)du$$

où $S$ est la sphère unité de $R^{n-1}$ , et $du$ une mesure uniforme sur $S$ . La fonction $f_2$ est de classe $C^\infty$ sur $[0,\infty[ \times [0,\infty[$ , à support compact. Pour $t > 1$ , $\varepsilon = t^2-1$ , nous avons

$$Mf(t) = c\int_0^\infty f_2(r^2+\varepsilon, r^2)\,\frac{r^{n-2}dr}{\sqrt{r^2+\varepsilon}}$$

et pour $t<1$ , $\varepsilon = 1-t^2$

$$Mf(t) = c\int_0^\infty f_2(x_0^2, x_0^2+\varepsilon)(x_0^2+\varepsilon)^{\frac{n-3}{2}}\,dx_0 \ .$$

D'après [13] (Lemma 4.3, p. 210) $M$ est une application continue de $\mathcal{D}(X)$ sur $\mathcal{D}_\mu$ . (Voir aussi [7], [1], [4], [5]) . La partie a) du théorème 1 en résulte.

Comme l'opérateur $\Delta$ est symétrique, pour toute fonction $f$ de $\mathcal{D}(X)$ et toute fonction $F$ de classe $C^2$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\int F(x_1)\,\Delta f(x)dx = \int LF(x_1)\,f(x)dx$$

et par suite

$$M\Delta f = L^* Mf$$

la partie b) du théorème 1 en résulte.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $S$ <u>une forme linéaire continue sur</u> $\mathcal{D}_\mu$ <u>telle que</u>

$$LS = \lambda S$$

<u>alors le noyau sphérique</u> $\Phi$ <u>défini par</u>

$$\Phi(f,g) = S(f\# g)$$

<u>est un noyau sphérique correspondant à la valeur propre</u> $\lambda$ .

3. La réciproque est vraie car :

THEOREME 2. <u>Soit</u> $\Phi$ <u>un noyau continu invariant sur</u> $\mathcal{D}(X)$ . <u>Il existe une forme linéaire continue</u> $S$ <u>unique sur</u> $\mathcal{D}_\mu$ <u>telle que</u>

$$\Phi(f,g) = S(f \# g) .$$

Pour une fonction $f$ de $\mathcal{D}(G)$ soit $\tilde{f}$ la fonction de $\mathcal{D}(X)$ définie par

$$\tilde{f}(\gamma a) = \int_H f(\gamma h)dh \ , \ \gamma \in G$$

et posons, pour deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathcal{D}(G)$

$$\Psi(f,g) = \Phi(\tilde{f},\tilde{g})$$

le noyau $\Psi$ défini sur $\mathcal{D}(G)$ est continu et invariant. D'après le théorème des noyaux de Schwartz, il existe une distribution $T_1$ sur $G \times G$ telle que

$$\forall \ f,g \in \mathcal{D}(G) \ , \ \Psi(f,g) = T_1(f \otimes g) .$$

Soit $\theta$ une fonction de $\mathcal{D}(G)$ telle que

$$\int_G \theta(\gamma)d\gamma = 1$$

et soit $T$ la distribution définie sur $G$ par

$$T(\varphi) = T_1[\theta(u) \ \varphi(u^{-1}v)] .$$

Nous avons, en posant $\check{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$

$$\begin{aligned} T(\check{f} * g) &= T_1[\theta(u) \int_G f(\gamma u) \ g(\gamma v)d\gamma \\ &= \int_G T_1[\theta(u) \ f(\gamma u) \ g(\gamma v)]d\gamma . \end{aligned}$$

A cause de l'invariance du noyau $\Psi$ , la distribution $T_1$ est invariante par le sous-groupe diagonal de $G \times G$ , par suite

$$\begin{aligned} T(\check{f} * g) &= \int_G T_1[\theta(\gamma^{-1}u)\ f(u)\ g(v)]d\gamma \\ &= T_1\ [(\int_G \theta(\gamma^{-1}u)d\gamma)\ f(u)\ g(v)] \\ &= T_1(f \otimes g) = \Psi(f,g)\ . \end{aligned}$$

La distribution $T$ est biinvariante par $H$ , elle peut donc être considérée comme une distribution sur $X$ invariante par $H$ .

L'application transposée de l'application $M$

$$M' : \mathcal{D}'_\mu \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$$

est injective et a pour image l'espace des distributions sur $X$ invariantes par $H$ (c'est une adaptation d'un résultat de Tengstrand, [13], théorème 5.1, p. 213, voir aussi [7] et [1]). Il existe un élément unique $S$ de $\mathcal{D}'_\mu$ tel que

$$T = M'S\ .$$

De plus, pour deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathcal{D}(G)$

$$M[(\check{f} * g)^\sim] = \tilde{f} \# \tilde{g}$$

si bien que

$$\Phi(\tilde{f},\tilde{g}) = S(\tilde{f} \# \tilde{g})\ .$$

Le résultat est bien démontré car l'application $f \mapsto \tilde{f}$ de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}(X)$ est surjective.

Pour que le noyau $\Phi$ soit un noyau sphérique correspondant à la valeur propre $\lambda$ , il faut et il suffit que la forme linéaire $S$ soit solution de

$$LS = \lambda S \, .$$

Soit $\Phi$ le noyau invariant continu sur $\mathcal{D}(X)$ défini par

$$\Phi(f,g) = \int_X f(x)\ g(x)dx$$

alors nous avons

$$\Phi(f,g) = c_n\ \gamma(f \# g)$$

où $\gamma$ est la forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_\mu$ définie par

$$\gamma(\varphi_0 + \delta\varphi_1) = \varphi_1(1)$$

et où $c_n$ est une constante ne dépendant que de $n$ (voir [7], p. 251, [1], p. 351, [13], p. 213).

4. Il reste donc à étudier les solutions dans l'espace $\mathcal{D}'_\mu$ de l'équation

$$LS = \lambda S \ .$$

Une telle solution coïncide, dans chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ , $]-1,1[$ , $]1,\infty[$ avec une solution ordinaire. On construit une telle solution à l'aide de partie finie à partir de solutions ordinaires. On démontre que ces solutions constituent un espace vectoriel de dimension 2 . Plus précisément, il existe deux fonctions $u_0(t,\lambda)$ et $u_1(t,\lambda)$ , solutions ordinaires de

$$Lu = \lambda u$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ , $]-1,1[$ , $]1,\infty[$ vérifiant

$$u_0(t,\lambda) = u_0(-t,\lambda) \ , \ u_0(0,\lambda) = 1$$

$$u_1(t,\lambda) = -u_1(-t,\lambda) \ , \ \frac{du_1}{dt}(0,\lambda) = 1$$

telles que les formes linéaires $S_0^\lambda$ et $S_1^\lambda$ définies pour une fonction $\varphi$ de $\mathcal{D}'_\mu$ par

$$S_0^\lambda(\varphi) = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{Pf}} \ [\int_{||t|-1|>\varepsilon} u_0(t,\lambda) \ \varphi(t)dt]$$

$$S_1^\lambda(\varphi) = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{Pf}} \ [\int_{||t|-1|>\varepsilon} u_1(t,\lambda) \ \varphi(t)dt]$$

constituent une base de l'espace des solutions de $LS = \lambda S$ dans l'espace $\mathcal{D}'_\mu$ . Par suite, les noyaux $\Phi_0^\lambda$ et $\Phi_1^\lambda$ définis par

$$\Phi_0^\lambda(f,g) = S_0^\lambda(f \# g)$$

$$\Phi_1^\lambda(f,g) = S_1^\lambda(f \# g)$$

constituent une base de l'espace des noyaux sphériques correspondant à la valeur propre $\lambda$ .

5. Considérons maintenant les noyaux hermitiens $K_\lambda$ qui interviennent dans la décomposition spectrale du plus petit prolongement fermé de $(\mathcal{D}(X), \Delta)$ (voir le paragraphe 1). Soit $\Psi_\lambda$ le noyau défini sur $\mathcal{D}(X)$ par

$$\Psi_\lambda(f,g) = K_\lambda(f,\bar{g}) \ .$$

Pour presque tout $\lambda$ (relativement à la mesure scalaire $\sigma$ )

$$\Psi_\lambda(\Delta f,g) = \Psi_\lambda(f,\Delta g) = \lambda \, \Psi_\lambda(f,g) \ .$$

De plus, par suite de l'invariance du noyau

$$B(f,g) = \int_X f(x) \; g(x) dx$$

pour presque tout $\lambda$ le noyau $\Psi_\lambda$ est invariant, si bien que pour presque tout $\lambda$ le noyau $\Psi_\lambda$ est un noyau sphérique. Par conséquent, pour un tel $\lambda$ , il existe deux nombres $a_0^\lambda$ et $a_1^\lambda$ tels que

$$K_\lambda(f,g) = \Psi_\lambda(f,\bar{g}) = a_0^\lambda \; \Phi_0^\lambda(f,\bar{g}) + a_1^\lambda \; \Phi_1^\lambda(f,\bar{g}) \ .$$

Pour la détermination explicite de la décomposition spectrale de cet opérateur, on peut consulter [11], [12], [3], [8] et [9], [10], [2].

## REFERENCES


[1] G. de RHAM — Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre. Ann. Inst. Fourier 8 (1958), 337-366.

[2] J. FARAUT — Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe. Dans : Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Lecture Notes 497, Springer, 1975.

[3] I.M. GUELFAND, M.I. GRAEV, N.Ja. VILENKIN — Les distributions, tome 5. Dunod.

[4] P. JEANQUARTIER — Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique. C.R.A.S. 271 (9/12/70), 1159-1161 (série A).

[5] H.M. MAIRE — Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique. C.R.A.S. 281 (22/9/75), 427-430 (série A).

[6] K. MAURIN — General eigenfunctions expansions and unitary representations of topogical groups. Warszawa (1968).

[7] P.D. METHEE — Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), 225-269.

[8] V.F. MOLCANOV — Harmonic analysis on a hyperboloïd of one sheet. Soviet. Math. Dokl. 7 (1966), 1553-1556.

[9] V.F. MOLCANOV — Analogue of the Plancherel formula for hyperboloïds. Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 1382-1385.

[10] W. ROSSMANN — Analysis on real hyperbolic spaces.
Queen's mathematical preprints, n° 1976-14.
Queen's University, Kingston, Ontario.

[11] T. SHINTANI — On the decomposition of regular representation of the Lorentz group on a hyperboloïd of one sheet.
Proc. Japan Acad. 43 (1967), 1-5.

[12] R.S. STRICHARTZ — Harmonic analysis on hyperboloïds.
J. of Functional Analysis, 12 (1973), 341-383.

[13] A. TENGSTRAND — Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature.
Math. Scand. 8 (1960), 201-218.