P. BOLLEY

J. CAMUS

Un théorème de prolongement pour l'opérateur « divergence »

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A4_0>

UN THEOREME DE PROLONGEMENT POUR L'OPERATEUR "DIVERGENCE"

par

P.BOLLEY et J.CAMUS

Introduction :

On donne une réponse positive à une question posée par C.GOULAOUIC : Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et une distribution $\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$ telle que rot $\vec{u} = \vec{f} \in L^2(\Omega)^3$, existe-t-il $\vec{v} \in H^1(\Omega)^3$ tel que : rot $\vec{v} = \vec{f}$?

Nous allons montré que la réponse est positive lorsque Ω est un ouvert borné, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord compacte C^∞, à bord Γ connexe.

Signalons que ce résultat a déjà été obtenu par C. GOULAOUIC et L.TARTAR par une méthode différente avec l'hypothèse supplémentaire : Ω simplement connexe.

Un théorème de prolongement pour l'opérateur " divergence "

Pour résoudre l'équation rot $\vec{u} = \vec{f}$, l'idée naturelle est de prolonger le vecteur $\vec{f}$ à $\mathbb{R}^3$ et de résoudre ensuite en utilisant la transformation de Fourier.

Or si $\vec{f}$ = rot $\vec{u}$, avec $\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$, il est clair que div $\vec{f} = 0$. Par suite, on est ramené à prolonger les vecteurs $\vec{f} \in L^2(\Omega)^3$ tels que div $\vec{f} = 0$.

Soit alors Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord compacte C^∞. On fera l'hypothèse suivante :

(H) Le bord Γ de $\bar{\Omega}$ est connexe.

Il résulte alors du théorème de Jordan-Brouwer que Ω et $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sont connexes.

On va montrer le :

<u>Théorème 1</u> : Soit p un entier ≥ 0. Alors, sous l'hypothèse (H), il existe un opérateur de prolongement P linéaire continu de $H^p(\mathrm{div},\Omega) = \{\vec{f} \in (H^p(\Omega))^n ;\ \mathrm{div}\,\vec{f} = 0\}$ dans $H^p(\mathrm{div}, \mathbb{R}^n) = R$ $\{\vec{f} \in (H^p(\mathbb{R}^n))^n ;\ \mathrm{div}\,\vec{f} = 0\}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $R > o$ tel que la boule ouverte $B(0,R)$ contienne l'ouvert Ω et soit $\Omega' = B(0,R)\setminus\Omega$; Ω' est donc un ouvert connexe.

La démonstration consiste à résoudre un problème aux limites convenable pour l'opérateur $L = \mathrm{div}.\varphi^p\,\mathrm{grad}$ dans l'ouvert Ω' où φ est une fonction C^∞ équivalente à la distance au bord. Pour cela, nous serons amenés à distinguer deux cas selon que $p = 0$ où $p \geqslant 1$.

<u>Cas p = 0</u> : 1°) Il résulte de [2] que si $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^n$ avec $\mathrm{div}\,\vec{f} \in L^2(\Omega)$, alors $(\vec{n}.\vec{f})$ a un sens sur Γ et appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$ ($\vec{n}$ désigne la normale à Γ intérieure à Ω); de plus, on a la formule de Green : pour tout $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{f}.\ \Phi\, dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma (\vec{n}.\vec{f})\ (\gamma_o \Phi)\, d\sigma .$$

Par suite, si $\vec{f} \in H^o(\mathrm{div},\Omega)$, on doit avoir :

$$(1.1) \qquad \langle (\vec{n}.\vec{f}), 1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

2°) On considère dans Ω' le problème aux limites :

$$(1.2)\qquad \begin{cases} Lq = \Delta q = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \gamma_1 q = \begin{cases} (\vec{n}.\vec{f}) & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } |x| = R \end{cases} \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

utilisant le résultat de [3] , ce problème admet une solution q dans $H^1(\Omega')$ si et seulement si :

$$(1.3)\qquad < \gamma_1 q, \gamma_o v >_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

pour tout $v \in N^* = \{v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}') ;\ \Delta v = 0, \gamma_1 u = 0 \ \text{ sur } \Gamma \cup \{|x| = R\}\}$
Ω' étant connexe, l'espace N^* se réduit aux fonctions constantes et la condition de compatibilité (1.3) est alors une conséquence de (1.1).

3°) On pose alors pour $\vec{f} \in H^\circ(\text{div}.\Omega)$,

$$P\vec{f} = \begin{cases} \vec{f} & \text{sur } \Omega \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, q & \text{sur } \Omega' \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \backslash \Omega' . \end{cases}$$

Il reste à vérifier que $\vec{F} = P\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ce qui est immédiat et que $\text{div}\,\vec{F} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$, or ceci résulte de la formule de Green suivante : pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$<\text{div}\,\vec{F},\Phi> = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} F_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx$$

$$= - <(\vec{n}.\vec{f}), \gamma_o \Phi>_\Gamma + <\gamma_1 q, \gamma_o \Phi>_\Gamma = 0.$$

<u>Cas $p \geq 1$</u> : 1°) Soit $\vec{f} \in H^p(\mathrm{div},\Omega)$ et soit $\vec{F} = Q\,\vec{f}$ un prolongement linéaire continu de $\vec{f}$ à $(H^p(\mathbb{R}^n))^n$ avec supp $\vec{F} \subset B(0,R)$. On pose $G = \mathrm{div}\,\vec{F}|_{\Omega'}$. On a alors $G \in H_o^{p-1}(\Omega')$ et $\int_{\Omega'} G\,dx = 0$, en effet, d'après la formule de Green précédente :

$$\int_{\Omega'} G\,dx = \int_{\Omega'} \mathrm{div}\,\vec{F}.\,1\,dx = \int_{\partial\Omega'} (\vec{n}.\vec{F})\,1.\,d\sigma$$

$$= \int_{\Gamma} (\vec{n}.\vec{F}).1\,d\sigma \;=\; \langle(\vec{n}.\vec{f}),\,1\rangle_{\Gamma} = 0$$

2°) On considère alors le problème

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{u} = G \text{ dans } \Omega' \\ \vec{u} \in (H_o^p(\Omega'))^n. \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on considère l'opérateur $L = \mathrm{div}\,\varphi^p\,\mathrm{grad}$. Il résulte de [1] que cet opérateur est à indice nul, de $W_p^{p+1}(\Omega') = \{u \in H^1(\Omega')\,;\, \varphi^p u \in H^{p+1}(\Omega')\}$ dans $H_o^{p-1}(\Omega')$ et son noyau est réduit aux fonctions constantes dans Ω'. Par suite, son image est formée du sous-espace de $H_o^{p-1}(\Omega')$ orthogonal, dans $L^2(\Omega)$, aux fonctions constantes. On peut donc résoudre le problème (1.4).

3°) On pose alors : pour $\vec{f} \in H^p(\mathrm{div},\Omega)$,

$$P\,\vec{f} = \vec{F} - \tilde{\vec{u}}$$

où $\tilde{\cdot}$ désigne le prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$.

Il reste à vérifier que $P\,\vec{f} \in (H^p(\mathbb{R}^n))^n$ ce qui est immédiat et que $\mathrm{div}\,P\,\vec{f} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$, or ceci résulte de

$\operatorname{div}\ P\vec{f} \in H^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ avec $p \geq 1$ et de :

$$\operatorname{div} P\vec{f} = \begin{cases} \operatorname{div}\vec{f} - 0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}\vec{F} - \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega' \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n\backslash\Omega'. \end{cases}$$

le théorème 1 est démontré.

Remarque : On peut démontrer directement que le théorème 1 est encore vrai lorsque Ω est un cube de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2 : On suppose $n = 3$. Soit p un entier $\geqslant 0$. Alors sous l'hypothèse (H), il existe un opérateur R linéaire continu de $H^p(\operatorname{div},\Omega)$ dans $(H^{p+1}(\Omega))^3$ tel que : pour tout $\vec{f} \in H^p$ $\vec{f} \in H^p(\operatorname{div},\Omega)$ on ait :

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}\,(R\vec{f}) = \vec{f}.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du fait que l'équation $\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{f}$ sur $\mathbb{R}$ se résoud directement par transformation de Fourier (cf. [2] par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.BOLLEY - J.CAMUS. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bull.Soc. Math.France, Mémoire 34, 1973, p.55-140.

[2] G.DUVAUT - J.L.LIONS - Les inéquations en mécanique et en physique - Paris, Dunod 1972.

[3].J.L. LIONS - E.MAGENES. - Problèmes aux limites non homogènes et applications - Vol.1. Dunod 1968.