PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. S. BAOUENDI

J. SJOSTRAND

Régularité analytique pour le problème de Dirichlet dans un domaine irrégulier

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A3_0>

REGULARITE ANALYTIQUE POUR LE PROBLEME DE
DIRICHLET DANS UN DOMAINE IRREGULIER.

par

M.S. BAOUENDI
Purdue University

J. SJOSTRAND
Université de Paris-Sud

Nous donnons ici les résultats essentiels d'un travail à paraître [3], nous référons à cet article pour le détail des démonstrations.

Nous étudions la régularité analytique du problème de Dirichlet pour certaines équations elliptiques (ou elliptiques dégénérées) du second ordre dans des domaines pouvant avoir au bord des singularités du type conique. Le résultat étant local, nous nous restreignons à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'on a : $0 \in \overline{\Omega}$ et qu'il existe un difféomorphisme analytique $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$ entre deux voisinages ouverts de l'origine vérifiant $\chi(o) = o$ et $\chi(\Omega \cap V_1) = \Omega_o \cap V_2$, où Ω_o est un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si on suppose de plus que $d\chi(o) = I$ (on peut toujours s'y ramener après composition avec une transformation linéaire), on voit que Ω_o est indépendant du choix de χ et on le désigne par $\mathcal{C}_o(\Omega)$, le "cône tangent" de Ω au point O.

Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On suppose que P s'écrit sous la forme

(1) $$P(x,D) = P_o(x,D) + P_1(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x)\, D^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq 2} a'_\alpha(x)\, D^\alpha$$

avec a_α et a'_α satisfaisant :

(2) $\begin{cases} \text{Il existe } K \in \mathbb{Z}\ ,\ K \geq -2, \text{ tel que les } a_\alpha \text{ soient des polynômes ho-} \\ \text{mogènes de degré } |\alpha|+K, \text{ et } a'_\alpha \text{ s'annulle au moins à l'ordre} \\ |\alpha|+K+1 \text{ à l'origine.} \end{cases}$

On suppose aussi que l'on a :

(3) $\begin{cases} P_o \text{ est elliptique sur } \overline{\mathcal{C}_o(\Omega)} \setminus \{o\}, \text{ et est proprement elliptique} \\ \text{pour } n=2. \end{cases}$

On note que si P est elliptique (proprement si n=2) à l'origine, (1) (2) et (3) sont vérifiées en prenant $K=-2$ et $P_o(x,D) = p(o,D)$ où p est le symbole principal de P.

En coordonnées polaires, on a

$\mathcal{C}_o(\Omega) = \{(r,\theta)\ ;\ r > o,\ \theta \in \omega\}$

où ω est un ouvert de la sphère unité S^{n-1}.

L'opérateur P_o devient en coordonnées polaires

(4) $$P_o = r^k\, Q_o(\theta, D_\theta, r\, D_r) = r^k \sum_{j=o}^{2} A_j(\theta, D_\theta)\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^{2-j}$$

où A_j est d'ordre $\leq j$. Soit $a_j(\theta,\eta)$ le symbole principal d'ordre j de A_j. On pose :

(5) $$a(\theta,\eta,z) = \sum_{j=o}^{2} a_j(\theta,\eta)\ z^{2-j}.$$

(6) $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ a(\theta,\eta,z) = o \quad \text{pour} \quad (\theta,\eta) \in T^*S^{n-1} \setminus \{o\},\ \theta \in \overline{\omega}\}.$$

L'ellipticité de P_o dans $\overline{\mathcal{C}_o(\Omega)} \setminus \{o\}$ implique que $A_2(\theta,D_\theta)$ est elliptique dans $\overline{\omega}$ et que $a_o(\theta) = A_o(\theta)$ ne s'annulle pas. Γ est alors un cône fermé du plan complexe ne rencontrant pas l'axe imaginaire pur. On pose $\Gamma_+ = \{z \in \Gamma\ ;\ \text{Re } z > o\}$ et $\hat{\Gamma}_+$ l'enveloppe convexe de $\Gamma_+ \cup \mathbb{R}_+$. On a encore besoin d'introduire la condition suivante :

$$(6)\quad \begin{cases} \text{Après un difféomorphisme analytique préservant l'origine, on a} \\ \qquad \text{angle } \hat{\Gamma}_+ < \pi/n. \end{cases}$$

Si P est elliptique à l'origine avec un symbole principal réel en ce point, alors la condition (6) est vérifiée ; en effet, après un changement de variables linéaire P_o devient $\pm\Delta$ et $\Gamma_+ = \hat{\Gamma}_+ = \mathbb{R}_+$.

On désigne par $C^\infty(\bar{\Omega})$ l'ensemble $\{u|_\Omega \; ; \; u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$. On peut maintenant énoncer le résultat essentiel.

<u>Théorème 1</u> : On suppose que P vérifie (1), (2), (3) et (6). Si u $C^\infty(\bar{\Omega})$, et Pu et $u|_{\partial\Omega}$ ont des extensions analytiques à un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, il en est de même de u.

On donne maintenant une application du théorème 1. On dit qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre analytique si au voisinage de tout point $x_o \in \partial U$, U est défini par :

$$\varphi_1(x) > 0, \ldots, \; \varphi_k(x) > 0$$

où les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont analytiques, réelles, indépendantes, définies au voisinage de x_o et vérifiant $\varphi_1(x_o) = \ldots = \varphi_k(x_o) = 0$. Dans un voisinage V de x_o on peut donc choisir un difféomorphisme analytique $\chi : V \ni x \longrightarrow (y_1, \ldots, y_n) \in \chi(V)$ tel que $y_j = \varphi_j(x)$ pour $1 \leq j \leq k$. On a alors $\chi(V \cap U) = \chi(V) \cap \Omega_o$ où Ω_o est ici le cône défini par $y_1 > 0, \ldots, y_k > 0$. On peut donc énoncer :

<u>Corollaire 2</u> : Soient U un polyèdre analytique dans R^n et P(x,D) un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2, à symbole principal réel, et à coefficients analytiques au voisinage de $\bar{U}$. Si $u \in C^\infty(\bar{U})$, et Pu et u ont des extensions analytiques aux voisinages de $\bar{U}$ et ∂U respectivement, alors u s'étend analytiquement au voisinage de $\bar{U}$.

Il est clair que U peut aussi avoir des singularités isolées. Par exemple si

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n^2 > \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \; , \quad 0 < x_n < 1\} \; ,$$

la conclusion du corollaire 2 reste inchangée.

Plusieurs auteurs ont étudié des problèmes aux limites dans des domaines admettant des singularités coniques, nous référons pour cela à [6] et [5] et leurs bibliographies. A notre connaissance, les résultats d'analyticité obtenus ici sont nouveaux même dans le cas du Laplacien (naturellement le résultat d'analyticité du corollaire 2 est bien connu quand le bord de U est analytique [7]). Observons aussi que, quand $\Omega \cup \{0\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, le théorème 1 est essentiellement contenu dans [2].

<u>Idées de la démonstration du théorème 1.</u>

Pour simplifier on se limite ici au cas $\Omega = \mathcal{C}_o(\Omega)$, $P = P_o$ et $K = 0$. On a donc, en coordonnées polaires,

$$P = Q_o(\theta, D_\theta, r\, D_r)$$

où Q_o est donné dans (4).

Si B est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \cap B)$, la transformée de Mellin de u est définie par

$$\tilde{u}(z,\theta) = \int_o^1 r^{-z-1} \; u(r\theta)\, dr \; , \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \theta \in \omega$$

(voir [2] pour les propriétés de cette transformation).

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$A_z = A_z(\theta, D_\theta) = \sum_{j=o}^{2} A_j(\theta, D_\theta)\; z^{2-j} \; .$$

Si $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \cap B)$ et $Pu = v$, on a

(7) $Az\,\tilde{u}(z,\theta) = \tilde{v}(z,\theta) + C_o(\theta) + C_1(\theta)z$

où C_o et C_1 sont des combinaisons linéaires de $u(\theta)$ et $\frac{\partial u}{\partial r}(\theta)$.

Le théorème 1 résulte assez facilement des deux lemmes suivants.

<u>Lemme 3</u> : Si $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \cap B)$, plate à l'origine, et satisfait $Pu = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ alors $u = 0$.

<u>Lemme 4</u> : Si $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \cap B)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ et Pu s'étend analytiquement à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, alors la série de Taylor de u à l'origine est convergente.

<u>Idée de la démonstration du lemme 3</u> :

Comme u est plate à l'origine $\tilde{u}(z,\theta)$ est entière en z à valeur dans $C^\infty(\overline{\omega})$. (7) devient

(8) $A_z\,\tilde{u}(z,\theta) = C_o(\theta) + C_1(\theta)z.$

Il suffit de démontrer que l'on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

(9) $\|\tilde{u}(z,.)\|_{L^2(\omega)} \leq C(1+|z|).$

On montre alors que pour $z \notin \hat{\Gamma}_+$ et $|z|$ assez grand A_z est inversible comme opérateur de $H^1_o(\omega)$ dans $H^{-1}(\omega)$ avec un contrôle sur la norme de A_z^{-1}. Pour obtenir (9) dans tout le plan complexe, on utilise le théorème de Phragmèn-Lindelöf. Pour cela, on a besoin de majorer A_z^{-1} sur des droites parallèles à l'axe imaginaire pur et tendant vers l'infini. On utilise des résultats sur les opérateurs de classe C^p de [4] (ici $p > n-1$).

<u>Idée de la démonstration du lemme 4</u> :

Ici $\tilde{u}(z,\theta)$ est méromorphe et admet comme pôles $0,1,\ldots k,\ldots$; ce sont des pôles simples, les résidus étant $-u_o(\theta),\ldots,-u_k(\theta)\ldots$, si le développemment de Taylor de u à l'origine est

$$u \sim \sum_{k=o}^{\infty} r^k \, u_k(\theta).$$

On pose

$$\hat{u}(z,\theta) = \sin(2\pi z)\, \tilde{u}(z,\theta)$$

$$Pu = v \quad \text{et}$$

$$\hat{v}(z,\theta) = \sin(2\pi z)\, \tilde{v}(z,\theta).$$

De nouveau, on utilise l'équation (7), des inégalités sur la norme de l'inverse de A_z ainsi que le théorème de Phragmèn-Lindelöf pour montrer que l'on a, pour tout z C

(10) $$\|\hat{u}(z,\theta)\|_{L^2(\omega)} \leq C\, e^{C|z|}.$$

On déduit de (10) que l'on a

(11) $$\|u_k\|_{L^2(\omega)} \leq M^{k+1}.$$

En utilisant (11) et des inégalités sur les polynômes homgènes $r^k\, u_k(\theta)$ (inégalités du type Bernstein voir [1]), on conclut que la série de Taylor de u à l'origine est convergente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality. Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974) p. 251-261.

[2] M.S. BAOUENDI et J. SJOSTRAND : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point. Ark. för Mat. 14 (1976) p. 9-33.

[3] M.S. BAOUENDI et J. SJOSTRAND : Analytic regularity for the Dirichlet problem in domains with conic singularities. (A paraître) Scuola Norm. Sup. Pisa.

[4] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear operators, Part II, New-York, 1963.

[5] P. GRISVARD : Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Proc. Numerical solution of P.D.E'. s III. Acad. Press (1976) p. 207-274.

[6] KONDRATEV : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trudy. Mosk. Mat. Obs. 16 (1967), p. 209-292. (Transactions of the Moscow Math. Soc. (1967) p. 227-313).

[7] C.B. MORREY et L. NIRENBERG : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of P.D.E'.s. Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), p. 271-290.