M. R. HERMAN

Sur les mesures invariantes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S4
« International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics », , p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S4_A12_0>

SUR LES MESURES INVARIANTES

par M. R. HERMAN

. Construction d'un homéomorphisme PL du cercle

On se donne $\lambda > 1$.

- Soit f l'homéomorphisme PL de $[0,1]$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x & 0 \leq x \leq a \\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda}(x-1)+1 & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec $\lambda a = \frac{1}{\lambda}(a-1)+1.$

On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x+n) = \tilde{f}(x)+n \qquad \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [0,1] \quad .$$

Soit pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'homémorphisme PL

$$\tilde{f}_b(x) = \tilde{f}(x)+b \qquad x \in \mathbb{R} \quad .$$

Soit $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Par passage au quotient de $\tilde{f}_b$ on a l'homéomorphisme PL de T^1 f_b.

Remarquons que f_b et f_b^{-1} laissent invariants les ensembles de mesure de Haar nulle sur T^1.

. Nombre de rotation de f_b

On montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\tilde{f}_b^{on}(0)}{n} = \rho(\tilde{f}_b)$ existe et dépend continuement de b, de plus on a $\rho(\tilde{f}_{b+1}) = \rho(\tilde{f}_b)+1$.

On pose $\rho(f_b) = \rho(\tilde{f}_b) \mod(1)$.

- Soit b tel que $\rho(f_b) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors on a le :

Théorème : 1) f_b est topologiquement conjugué sur T^1 à la translation $R_\alpha : x \to x+\alpha$.

2) f_b n'a pas de mesure σ finie (non nulle) invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

On trouvera la démonstration dans M.R. Herman "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations".
La partie 1) est le théorème de A. Denjoy.
Le premier exemple de 2) (non continue) a été donné par D. Ornstein, puis un exemple a été donné par A. Brunel.

Remarque : Si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f_b alors μ est étrangère à la mesure de Haar ; de plus, si on écrit $f_b = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, on a $Dh \underset{\text{p.p.}}{=} Dh^{-1} \underset{\text{p.p.}}{=} 0$.

Problème : Est-ce que f_b est ergodique par rapport à la mesure de Haar m au sens suivant : si A est m-mesurable et si $f_b(A) = A$ p.p., alors $m(A) = 0$ ou 1 ?

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91120 PALAISEAU