J. PELLAUMAIL

Étude des oscillations d'un processus de sauts purs à l'aide d'un processus de diffusion

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 36-49
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A9_0>

ETUDE DES OSCILLATIONS D'UN PROCESSUS DE SAUTS PURS A L'AIDE D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION

par J. PELLAUMAIL

A - INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter, sans rentrer dans les détails des démonstrations, un travail de M.F. Allain, travail montrant qu'on peut approcher des oscillations de certains processus Markoviens de sauts purs par celles d'un processus de diffusion.

Le plan adopté est le suivant :

- au paragraphe B, on donne un exemple très simple de réseau fermé de files d'attente et on explique, sur cet exemple, ce qui sera prouvé par la suite dans le cadre général
- au paragraphe C, on indique brièvement quelques résultats antérieurs relatifs au problème considéré
- au paragraphe D, on donne le théorème assurant la convergence en loi de certains processus de Markov vers un processus de diffusion
- au paragraphe E, on précise quelque peu la "vitesse de convergence".

Le but de cet exposé est uniquement de présentation : on a donc reproduit qu'une partie des résultats obtenus par M.F. Allain et que les idées directrices des démonstrations. Les autres résultats et les preuves détaillées peuvent être trouvés dans :

M.F. ALLAIN — Approximation, par un processus de diffusion, des oscillations, autour d'une valeur moyenne, d'un processus de Markov de sauts pur.
Rapport n° 32 de l'I.R.I.S.A.
Laboratoire de probabilités - Université de Rennes
35031 RENNES Cédex - B.P. 25A

B - UN EXEMPLE ELEMENTAIRE DE RESEAU FERME

B.1. - Hypothèses

On considère un parc comprenant n véhicules dont k sont en état de marche et $j = (n-k)$ sont en réparation ; pour chaque véhicule en état de marche, la probabilité de tomber en panne suit une loi exponentielle de paramètre a, les divers véhicules étant indépendants les uns des autres ; par ailleurs, il y a m mécaniciens pour réparer les véhicules : dès qu'un véhicule est pris en charge par un mécanicien, le temps de réparation suit une loi exponentielle de paramètre b, chaque mécanicien ne réparant qu'un seul véhicule à la fois et les divers mécaniciens étant indépendants les uns des autres. On pose $c = m/n$. Enfin, à l'instant $t = 0$, on suppose que tous les véhicules sont en état de marche.

B.2. - Equations de Chapmann - Kolmogoroff

L'état du phénomène considéré à l'instant t est caractérisé par le nombre y_t de véhicules en état de marche à cet instant t. Le processus (y_t) est markovien.

Soit $p(k,t)$ = probabilité $[y_t = k]$ = la probabilité d'avoir k véhicules en état de marche à l'instant t. Les équations de Chapmann Kolmogoroff s'écrivent :

$$p'(k,t) = a.(k+1).p(k+1,t)+b.[m\wedge(n-k+1)]p(k-1,t)-a.k.p(k,t)-b.[m\wedge(n-k)].p(k,t)$$

B.3. - Etude quand n tend vers l'infini

Si n est très grand, avec $m = cn$ où c est une constante donnée, en première approximation on peut étudier ce processus en supposant qu'il évolue de façon déterministe, c'est-à-dire en supposant qu'il est constamment égal à sa valeur moyenne. Soit donc Y cette valeur moyenne : en première approximation, on doit avoir :

$$Y' = -aY + b[(n-Y)\wedge cn] \quad \text{et} \quad Y_o = n$$

Si on pose $X = \frac{Y}{n}$, on a donc $X' = - aX + b\,[(1-X) \wedge c]$ et $X_o = 1$

La fonction X décroît donc exponentiellement jusqu'à la valeur

$$\left(\frac{b}{a+b} \wedge \frac{bc}{a} \right)$$

Le problème que l'on se pose est :

1°/ de préciser dans quelle mesure la valeur $Y_n = n\,X_t$ est une bonne approximation de l'état du processus (y_t)

2°/ d'étudier la loi de la différence $(y_t - n\,X_t)$

La première question est donc du type "loi des grands nombres" tandis que la deuxième question est du type "théorème central limite". Bien entendu, la deuxième question est plus précise que la première et c'est, en fait, cette deuxième question que nous allons étudier maintenant.

B.4. - Approximation par un processus de diffusion

Soit F(.) et G(.) les fonctions définies par

$$F(u) = -au + b\,[c \wedge (1-u)] \quad ; \quad G(u) = au + b\,[c \wedge (1-u)]$$

Soit y_t^n le processus considéré précédemment quand la taille totale du parc est égale à n et soit Y_t^n la solution de l'équation

$$(Y^n)' = - a\,Y^n + b\,[(n-Y^n) \wedge c\,n] \quad \text{solution telle que } Y_o^n = n$$

Le théorème du paragraphe D donné plus loin montre que la suite de processus $(v_t^n)_{n>0}$ défini par

$$v_t^n = \frac{y_t^n - Y_t^n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers un processus de diffusion, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$v_t = \int_o^t [G(X_s)]^{1/2}\, d\,\beta_s + \int_o^t F'(X_s)\, v_s\, ds$$

où (β_t) est un mouvement brownien unidimensionnel.

Sans chercher à prouver ce résultat, on peut, dès maintenant, expliquer pourquoi il y a lieu de faire intervenir ce processus de diffusion.

Soit Δy^n la variation du processus y^n entre l'instant t et l'instant $(t+\Delta t)$. Si Δt est "petit" et n "grand", au premier ordre près, la loi de la variable aléatoire Δy^n est donnée par le tableau suivant :

Δy^n	-1	0	+1
Probabilité	$a\,y^n\,\Delta t$	$-\{a y^n + b\,[m \wedge (n-y^n)]\}\Delta t$	$b\,[m \wedge (n-y^n)]\,\Delta t$

L'espérance de l'accroissement $\Delta(y^n - Y^n)$ de $(y^n - Y^n)$ entre t et $(t+\Delta t)$ vaut $n\,[F(x^n) - F(X^n)]$ ce qui est peu différent $(x^n - X^n)\,n\,F'(X)$ (puisque X^n et x^n sont peu différents de X) : l'espérance de l'accroissement Δv^n de v^n entre t et $(t+\Delta t)$ est donc peu différent de $v_t^n\,F'(X_t)$.

De même, la variance de Δy^n est peu différente de

$$a\,y^n + b\,[m \wedge (n-y^n)]$$

donc celle de Δv^n est peu différente de $a\,X = b\,[c \wedge (1-X)] = G(X)$

Ceci explique que la suite $(v^n)_{n>0}$ converge vers un processus de diffusion de variance locale G(X) et d'espérance locale v.F'(X).

C - QUELQUES ETUDES ANTERIEURES

On peut trouver, dans la littérature, divers exemples où on montre qu'on peut approcher la loi d'un phénomène aléatoire associé à un processus de sauts purs par la loi d'un processus de diffusion. Indiquons quelques-unes des études effectuées dans ce sens.

C.1. - Taille d'une file d'attente M/M/1

Dans [6], en 1971, P. Gaver et G.S. Shelder ont, notamment, étudié le cas d'une file d'attente M/M/1 correspondant à des programmes en attente de traitement par un ordinateur ; ils indiquent, en s'appuyant sur des considérations heuristiques un peu différentes de celles qui précèdent, que la taille de cette file d'attente suit à peu près la loi d'un processus de diffusion (avec barrières) dont l'"espérance locale" (le rift) est de l'ordre de n (taille de la file d'attente) et la "variance locale" de l'ordre de $\sqrt{n}$; aucune justification théorique n'est donnée.

Ce même cas M/M/1 a également été étudié (cf. [9]) par Kobayashi en 1972 ; là non plus, aucune justification théorique n'est donnée mais les limites de validité de l'approximation par une diffusion sont testées sur quelques exemples.

C.2. - Temps d'attente à une file d'attente M/G/1

Dans [8], en 1974, D.P. Kennedy a démontré, partiellement, que la loi du temps d'attente, à l'instant t, pour une file d'attente M/G/1, convergeait vers la loi d'un processus de diffusion, quand t tend vers l'infini ; plus précisément, si W(t) est ce temps d'attente à l'instant t, la loi de $\frac{W(nt)}{\sqrt{n}}$ converge vers la loi d'un processus de diffusion avec barrières.

C.3. - Les travaux de Kurtz

A notre connaissance, les seuls travaux où ce problème d'approximation est résolu de façon théorique satisfaisante sont dus à Kurtz [10], [11] et [12].

Dans [10], Kurtz répond à la première question formulée en B-3 (loi des grands nombres). Dans [11], il répond à la deuxième question formulée en B-3. Cette formulation, qui consiste à approcher, par un processus de diffusion, la différence entre le processus et la solution "déterministe" associée, semble beaucoup plus satisfaisante que la méthode utilisée dans les exemples évoqués précédemment, méthode qui consiste à approcher le processus lui-même par un processus de diffusion.

Enfin, dans [12], Kurtz généralise l'étude amorcée en [11] en approchant, par un processus de diffusion, des processus markoviens assez généraux.

Toutefois, il faut noter quelques lacunes dans l'étude effectuée en [11] ; d'une part, il y a une inexactitude dans la preuve du théorème 3-1 : à la troisième ligne de la preuve, la majoration donnée ne suffit pas pour assurer le fait que la suite $(P^n)_{n>0}$ est équi-tendue. De plus, Kurtz suppose que l'"espérance locale limite F(x)", la "variance locale limite G(x)" sont atteintes uniformément, que F est lipschitzienne et que G est bornée et uniformément continue : en pratique, ces hypothèses ne sont presque jamais satisfaites (même dans le cas M/M/1 évoqué plus haut). Enfin, Kurtz ne donne aucune indication sur la vitesse de convergence; plus précisément, il ne répond pas à la question suivante : à partir de quelle valeur de n, l'approximation par une diffusion est-elle valable ?.

Par ailleurs, dans [1], on considère le cas où la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ des "coefficients de normalisation" est une suite matricielle alors que, dans [11], on considère uniquement le cas où la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est une suite de nombres réels.

D - UN THEOREME D'APPROXIMATION

Le but de l'étude effectuée par M.F. Allain dans [1] est donc de combler ces lacunes. Il faut noter que, pour lever l'hypothèse $F(x)$ lipschitzienne et l'hypothèse $G(x)$ bornée et uniformément continue, il a fallu utiliser une technique récente et très puissante : la technique des martingales de Strook - Varadhan (cf [16] pour l'article original ou [ ] pour un exposé systématique).

Théorème 1

Soit $(x^n)_{n>0}$ une suite de processus de Markov de sauts purs à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout n, soit (A^n, D^n) le générateur infinitésimal du processus x^n, D^n étant le domaine du générateur infinitésimal A^n.

Pour tout n, on notera $\mu_n(x,dy)$ la probabilité de transition et $\lambda_n(x)$ le "taux de transition" associés au processus x^n ; plus précisément, si Φ est une fonction réelle bornée mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, Φ appartient à D^n et on a :

$$(A^n \Phi)(x) = \lambda_n(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} [\Phi(y) - \Phi(x)] \cdot \mu_n(x,dy)$$

On suppose que, pour tout n et pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$:

$$[\lambda_n(x)] \cdot \left[\int |y-x| \cdot \mu_n(x,dy)\right] \cdot \left[\int |y-x|^2 \cdot \mu_n(x,dy)\right] < +\infty$$

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$ et pour tout n, on définit les fonctions matricielles F_n et G_n par :

$$F_n(x) = \lambda_n(x) \cdot \int (y-x) \cdot \mu_n(x,dy)$$
$$G_n(x) = \lambda_n(x) \cdot \int (y-x) \otimes (y-x) \cdot \mu_n(x,dy)$$

ce sont respectivement l'"espérance locale" et la "covariance locale".

On se donne :

1°/ Une suite $(\alpha_n)_{n>0}$ de matrices d x d inversibles telles que

$$\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n|| = +\infty$$

2°/ Une suite $(a_n)_{n>0}$ de nombres réels positifs telle que

$$\lim_{n\to\infty} . a_n = +\infty$$

3°/ Une suite $(\varepsilon_n)_{n>0}$ de nombres réels tendant en décroissant vers zéro.

4°/ Une fonction H définie et continue sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ telle que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \cdot \{ \sup_{x \in K} ||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^* - H(x)|| \} = 0$$

5°/ Une constante K_2 telle que

$$\lambda_n(x) \cdot \int_{||\alpha_n \cdot (y-x)|| > \varepsilon_n} ||\alpha_n \cdot (y-x)||^2 \mu_n(x,dy) \leq K_2 \frac{(1+||x||^2)}{a_n^2}$$

et $||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^*|| \leq K_2 \cdot (1+||x||)$

6°/ Un élément x_o de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \cdot E(||x_o^n - x_o||^2) = 0$$

7°/ Une fonction F définie et continument différentiable sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et telle que la suite $(F_n)_{n>0}$ converge vers F uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

On notera $X(t)$ la solution de l'équation $\frac{dX}{dt} = F[X(t)]$ telle que $X(o) = x_o$

8°/ Une constante K_o et une fonction B définie et continue sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telles que : $B(x) \leq K_o(1+||x||)$ et, pour tout compact C de $\mathbb{R}^d$, la suite de fonctions $\{\alpha_n [F_n(x) - F(x)]\}_{n>0}$ converge uniformément sur C vers la fonction $B(x)$.

9°/ Un élément v_o de $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$\lim \cdot E\left[||\alpha_n \cdot (x_o^n - x_o) - v_o||\right] = 0$$

10°/ Une constante M telle que, pour tout n :

$$E\{ \sup_{s \leq t} \|\alpha_n [F_n(x_s^n) - F(X_s)]\| \} \leq M$$

11°/ Une fonction R(x) telle que la suite $(\alpha_n F'(x) \alpha_n^{-1})_{n > 0}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ vers la fonction R(x), ce qui suppose, évidemment, α_n inversible pour tout n.

Soit $(D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in [0,T]})$ l'espace canonique associé aux processus définis sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continus à droite et admettant des limites à gauche par trajectoires : plus précisément, D est l'ensemble des applications c.a.d.ℓ.a.g. définies sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, muni de la topologie de Skorokhod (cf. [ ], par exemple), $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{D}_t)_{t \in T}$ sont les tribus canoniques.

Soit $(v^n)_{n > 0}$ la suite de processus définie par

$$v_t^n = \alpha_n \cdot [x_t^n - X(t)]$$

Pour tout n, soit Q^n la loi de probabilité associée au processus v^n et définie sur l'espace canonique $(D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in T})$

Alors la suite $(Q^n)_{n > 0}$ converge vers la loi Q du processus de diffusion v solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$v_t - v_0 = \int_0^t \{ H [X(s)] \}^{1/2} d\beta_s + \int_0^t [R(X(s)), v_s] ds + \int_0^t B [X(s)] ds$$

Preuve

La preuve comprend essentiellement deux étapes :

1°/ On montre que la suite $(Q^n)_{n > 0}$ est équi-tendue et que, si une sous-suite $(\hat{Q}^n)_{n > 0}$ extraite de $(Q^n)_{n > 0}$ converge faiblement, sa limite faible $\hat{Q}$ est telle que $\hat{Q}(C) = 1$.

Pour cela, on montre que :

$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \delta > 0$ et $\exists n_0$ tels que $\forall n \geq n_0$,

$$P \left\{ \left[\sup_{|t-s| \leq \delta} |v_t^n - v_s^n| \right] > \varepsilon \right\} \leq \eta$$

La preuve de cette démonstration, très technique, utilise, notamment, des lemmes de majoration sur les martingales.

2°/ On considère une sous-suite extraite de la suite $(Q^n)_{n > 0}$ qui converge faiblement vers Q : pour alléger l'écriture, on suppose que c'est la suite $(Q^n)_{n > 0}$ elle-même qui converge.

On montre alors que, pour toute fonction ψ définie sur D, continue bornée et $\mathcal{D}_s$ - mesurable et pour toute fonction ϕ appartenant à $\overset{o}{\infty}(\mathbb{R}^d)$, on a, pour $s < t$:

$$E^Q [\psi \cdot (\phi(v_t) - \phi(v_s)] = E^Q \left\{ \psi \left[\int_s^t (S_u \phi)(v_u) du \right] \right\}$$

où S_u est l'opérateur défini sur $C_\infty^o(\mathbb{R}^d)$ par

$$(S_u \phi)(z) = \frac{1}{2} < D^2\phi(z), H[X(u)] > + < Dg(z), R[X(u)] \cdot z + B[X(u)] >$$

(la preuve de cette égalité est très technique).

Ceci montre que $\phi(v_t) - \int_0^t (S\phi)(v_u) du$ est une martingale, ce qui prouve le théorème annoncé compte-tenu du théorème de Strook-Varadhan (cf. [16]).

E - VITESSE DE CONVERGENCE

On va, maintenant, donner un théorème qui permet d'évaluer "à quelle vitesse" la suite $(Q^n)_{n>0}$ converge vers Q.

Théorème 2

Soit $(x^n)_{n>0}$ une suite de processus satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 du paragraphe précédent. On suppose, de plus :

a) que F est une fonction lipschitzienne ou que F est une fonction bornée et localement lipschitzienne

b) que les fonctions H et DF sont localement lipschitziennes

c) que, si on pose $X(t) = \exp.\{-\int_0^t R(\psi_s)\, ds\}$, la fonction $[\sigma(s)]^2 = \psi(s).\, H[X(s)]\, .\, \psi^*(s)$ est strictement elliptique, c'est-à-dire qu'il existe un réel σ_o tel que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$,

$$< \sigma(s)x,\ x > \ \geq \sigma_o^2 \,.\, ||x||^2$$

d) que, pour tout n, la probabilité de transition μ^n est homogène dans l'espace c'est-à-dire qu'il existe une loi de probabilité ν^n telle que $\nu^n(\Gamma) = \mu^n(x, x+\Gamma)$ pour tout borélien Γ de $\mathbb{R}^d$.

On pose : $C = \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||X_s||$; $M \doteq \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||\psi(s)||$

$$\sigma_1^2 = \operatorname{Sup}_{s\in[0,t]} ||\sigma(s)||^2 \qquad M_1 = 1 + \operatorname{Sup}_{s\in[0,t]} ||H(X_s)||$$

$$K = [M_1 \,.\, M^3] \ \vee\ [M^2.\ (C^2+1)]$$

k entier tel que, pour $n \geq k$,

$$\frac{1}{a_n^2} \leq \frac{\sigma_o^2}{8K} \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup}_{s\in[0,t]} ||\alpha_n\, G_n(X_s)\, \alpha_n^*|| \leq M_1$$

On introduit les notations suivantes :

$$p_1^n = M\left\{\operatorname{Sup}_{||x||\leq C+1}\left\{||\alpha_n[F_n(x)-F(x)] - B(x)||\right\} + \operatorname{Sup}_t\left\{||\alpha_n\ [DF(X_t)]\alpha_n^{-1} - R(X_t)|| + \frac{1}{||\alpha_n||}\,.\,K_o\ [K_1 + K\,(1+C) + 4(1+C^2+K_o)^{1/2}]\right\}\right\}$$

$$p_2^n = M^2.\operatorname{Sup}_{||x||\leq C+1}\left\{||\alpha_n \,.\, G_n(x) .\ \alpha_n^* - H(x)|| + \frac{1}{||\alpha_n||}(5\,K\,K_o + C\,K\,K_o + 2C + K_o^{1/2}) + \frac{3K_2}{a_n^2}(1 + K + C^2)\right\}$$

$$p_3^n = M^3.\operatorname{Sup}_{||x||\leq C+1}\left\{||\alpha_n.\ G_n(x).\ \alpha_n^* - H(x)|| + \frac{1}{||\alpha_n||}.\left[5\,K\,K_o + C\,K\,K_o + 2C + K_o^{1/2}\right]\right\}$$

$$p_4^n = E\left(||\alpha_n(x_o^n - x_o) - v_o||\right)$$

On a alors, pour $n \geq k$:

$$\operatorname{Sup}_{\ell\in\mathbb{R}^d}\ \operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}}\left|\ \text{Probabilité}\ [<\ell, v_t^n> \leq x] - \text{Probabilité}\ [<\ell, v_t> \leq x]\ \right|$$

$$\leq \frac{8}{\pi\,\sigma_o^2}\left\{p_1^n\left[\frac{\sigma_1^2 t}{2}\left(1 + \frac{\sigma_1^2\ t}{2}\right) + 1\right] + \frac{1}{2}\,p_2^n\,\sigma_1^2.\ t + p_2^n \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma_o^2}{8K\varepsilon_n}\right) + \frac{\sigma_o^2\ p_n^3}{8K}\right\}$$

$$+\ 2\,\frac{K}{\pi}\,t\left[p_4^n\,\frac{\sqrt{\pi}}{t.\sigma_o} + \frac{2}{t.\sigma_o^2\ a_n^2} + \frac{2\sqrt{\pi}}{(t.\ \sigma_o^2)^{3/2}}.\ \varepsilon_n\right] + \frac{24}{\pi\sigma_o}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,.\,\frac{8K\ \varepsilon_n}{\sigma_o^2}$$

Preuve

La preuve de ce résultat est évidemment très technique. Les idées essentielles sont les suivantes :

1°/ On majore les différences indiquées des fonctions de répartition à l'aide d'une majoration des différences des fonctions caractéristiques en utilisant divers résultats donnés par Chung dans [3].

2°/ On majore la différence des fonctions caractéristiques en utilisant, notamment, la formule de Ito.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ALLAIN — Convergence de processus de Markov de sauts purs vers un un processus de diffusion. Séminaire de Rennes 1975

[2] P. BILLINGSLEY — Convergence of probability measures. John Wiley and Sons, 1968

[3] K.L. CHUNG — A course in probability theory. Academic Press 1974

[4] W.H. FLEMMING and CHAN HSING SU — One dimensionnal migration models in population genetics theory. Preprint. Brown University Providence, Rhode Island 02912

[5] D.P. GAVER — Diffusion approximations and models for certain congestion problems. J. Appl. Prob. 5, 607-623 (1968)

[6] D.P. GAVER and G.S. SHEDLER — Processor utilization in multiprogramming systems via Diffusion Approximations

[7] E. GELEMBE — On approximate computer system models. Journal of the Association for computing machinery. 22,2, 261-269, 1975

[8] D.P. KENNEDY — Limiting diffusions for the conditionned M/G/1 Queue. J. Appl. Prob. 11, 355-362, 1974

[9] H. KOBAYASHI — Applications of the diffusion approximation to queuing networks. Computer Sciences Mathematics, 1972

[10] T.G. KURTZ — Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes. J. Appl. Prob. 7, 49-58

[11] T.G. KURTZ — Limit theorem for sequences of jump Markov processes approximating ordinary differential processes. J. Appl. Prob. 8, 344-356, 1971

[12] T.G. KURTZ — Semigroups of conditionned shifts and approximation of Markov processes (to appear)

[13] H.J. KUSHNER — On the weak convergence of interpolated Markov chains to a diffusion. Ann. Prob. 2, 40-50, 1974

[14] G.F. NEWELL — Applications of queuing theory. Chapman and Hall, London, 1971, chap. 6

[15] P. PRIOURET — Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour III, 1973. Springer Verlag

[16] D.W. STROOK and S.R.S. VARADHAN — Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure. Appl. Math 22, 479-530, 1967

[17] YAMADA and WATANABE — On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. of Math. Kyoto University, vol 11, N° 1-3