

RAYMOND MARIE

Sur les réseaux de file d'attente fermés à services exponentiels

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1

« Séminaires de Rennes », , p. 5-23

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975__1_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES RESEAUX DE FILE D'ATTENTE
FERMES A SERVICES EXPONENTIELS

par Raymond MARIE

A - INTRODUCTION

Un réseau de file d'attente fermé à services exponentiels est caractérisé par sa "structure" (matrice de passage $\mathcal{P} = (p_{ij})$), par la nature des différentes stations qui le composent (en général, la station i , ($i=1, \dots, M$) possède s_i guichets de taux de service μ_i), par la discipline d'attente (ici : premier arrivé, premier servi) et par le nombre N de clients qu'il contient. Ici, nous supposons que la matrice \mathcal{P} ne dépend pas de l'état du réseau, c'est-à-dire que la probabilité p_{ij} d'aller dans la station j en quittant la station i , ne dépend pas de l'état du réseau.

Pour un tel réseau, l'expression des distributions asymptotiques des états du système a été mise en évidence par J.R. JACKSON [3] et par GORDON et NEWEL [2] :

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{\prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)}{C(N)}$$

où :

a) X_j est une solution de :

$$\mu_j \cdot X_j = \sum_{i=1}^{i=M} \mu_i \cdot X_i \cdot p_{ij}$$

b) $A_j(n_j)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_j(0) = 1 \\ A_j(n_j) = A_j(n_j - 1) \cdot \frac{\mu_j(n_j)}{\mu_j} \end{cases}$$

$\mu_j(n_j)$ représentant le taux de sortie de la station j dans l'état n_j .

On voit que, si $\mu_j(n_j) = (s_j \wedge n_j) \cdot \mu_j$, on retrouve le cas d'une station à s_j guichets dont les temps de service μ_j sont indépendants de n_j .

c) $C(N)$ est la constante de normalisation :

$$C(N) = \sum_N \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)$$

où $\mathcal{N} = \{ (n_1, n_2, \dots, n_M) / \forall j \in \{1, 2, \dots, M\}, 0 \leq n_j \leq N, \sum_{j=1}^{j=M} n_j = N \}$

Dans cette note, on donne d'une part, un algorithme de calcul de la constante $C(N)$ en fonction de la nature du réseau ; d'autre part, on met en évidence une décomposition du réseau en sous-réseaux ; chaque sous-réseau étant caractérisé par le nombre de clients dans ce sous-réseau.

Certains résultats sont applicables à des réseaux ouverts ou à des réseaux comportants des stations à services non exponentiels si, pour ces stations : $s_j \geq N$.

B - CALCUL DE LA CONSTANTE DE NORMALISATION

B.1. Généralités

Posons
$$P(v) = \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)$$

où $v = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ représente un état du réseau R défini par \mathcal{N} .

Décomposons le réseau R en sous-réseaux R_1, R_2, \dots, R_p dont les états respectifs sont associés aux domaines $\mathcal{N}_{1, m_1}, \mathcal{N}_{2, m_2}, \dots, \mathcal{N}_{p, m_p}$.

Ces derniers étant définis de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_{j,m_j} = \{(n_a, n_b, \dots, n_k) / \forall i \in \{a, b, \dots, k\}, 0 \leq n_i \leq m_j, \sum_{\{a, b, \dots, k\}} n_i = m_j\}$$

où $\{a, b, \dots, k\}$ représente les indices des stations formant le sous-réseau R_j .

On a toujours :
$$\sum_{j=1}^{j=P} m_j = N$$

En appelant $v_j = \{n_a, n_b, \dots, n_k\}$ l'état du sous-réseau R_j , et en définissant :

a)
$$P_j(v_j) = \prod_{\{a, b, \dots, k\}} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)$$

b)
$$\alpha_{j,m_j} = \sum_{v_j \in \mathcal{H}_{j,m_j}} P_j(v_j)$$

On peut écrire :

$$C(N) = \sum_{v \in \mathcal{H}_N} P(v) = \sum_{m_1=0}^{m_1=N} \alpha_{1,m_1} \left(\sum_{m_2=0}^{m_2=N-m_1} \alpha_{2,m_2} \left(\sum_{m_3=0}^{m_3=N-m_1-m_2} \alpha_{3,m_3} \dots \right) \right)$$

$$\dots \left(\sum_{m_{p-1}=0}^{m_{p-1}=N-\sum_{i=1}^{p-2} m_i} \alpha_{p-1,m_{p-1}} \cdot \alpha_{p,m_p} \right) \dots$$

avec $m_p = N - \sum_{i=1}^{p-1} m_i$

En définissant une fonction $\beta_j(i)$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{p-1}(i) &= \sum_{m_{p-1}=0}^{m_{p-1}=i} (\alpha_{p-1,m_{p-1}} \cdot \alpha_{p,m_p}) \quad \text{avec } m_p = i - m_{p-1} \\ \beta_j(i) &= \sum_{m_j=0}^{m_j=i} \alpha_{j,m_j} \cdot \beta_{j+1}(i-m_j) \quad \text{pour } \begin{cases} i=0,1,\dots,N \\ j=p-2,\dots,1 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

On obtient finalement :

$$C(N) = \sum_{v \in \mathcal{H}_N} P(v) = \beta_1(N)$$

L'intérêt de cette décomposition résidant essentiellement ici dans la rapidité du calcul numérique, il reste à connaître quel est le découpage optimal du réseau en sous-réseaux minimisant le nombre d'opérations élémentaires sur ordinateur. Dans la mesure où le seul problème posé consiste à calculer la constante $C(N)$ (et sans plus d'informations sur les types de stations formant le réseau), il est évident que la décomposition optimale correspond à la décomposition maximale. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, si un sous-réseau était formé de plusieurs stations, on améliorerait son calcul en le décomposant selon la méthode ci-dessus. Le réseau est donc décomposé en M sous-réseaux d'une seule station.

Compte-tenu de ce résultat :

$$\alpha_{j,m_j} = \frac{X_j^{m_j}}{A_j(m_j)} = \frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

(et la fonction α_{j,m_j} ne sera plus utilisée par la suite).

B.2. Simplifications possibles du calcul selon la nature du réseau

B.2.1. Cas des réseaux comportant des stations telles que le terme $\frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)}$ reste constant pour $n_j \geq s_j$.

En reprenant la fonction auxiliaire $\beta_j(i)$, on a :

$$\beta_j(i) = \sum_{n_j=0}^{n_j=i} \frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \cdot \beta_{j+1}(i-n_j)$$

Soit $\frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)} = r_j$ pour $r_j \geq s_j$.

Pour $i > s_j$, on peut écrire :

$$\beta_j(i) = \frac{X_j}{r_j} \beta_j(i-1) + \sum_{k=0}^{k=s_j-1} \left[\frac{r_j A_j(k-1) - A_j(k)}{r_j A_j(k-1)} \right] \frac{X_j^k}{A_j(k)} \beta_{j+1}(i-k) \quad (B.2.1.)$$

Cette expression permet d'obtenir plus rapidement les valeurs $\beta_j(i)$ pour $i > s_j$ puisque la sommation se fait sur s_j et non plus sur i .

Notons que, dans le cas fréquent où $\mu_j(n_j) = (s_j \wedge n_j) \mu_j$, l'expression (B.2.1.) s'écrit :

$$\beta_j(i) = \frac{X_j}{s_j} \beta_j(i-1) + \sum_{k=0}^{k=s_j} \left[\frac{s_j - k}{s_j} \right] \frac{X_j^k}{k!} \beta_{j+1}(i-k)$$

et en particulier, si $s_j = 1$:

$$\beta_j(i) = X_j \beta_j(i-1) + \beta_{j+1}(i)$$

B.2.2. Cas des réseaux comportant des stations telles que le nombre de guichets soit supérieur au nombre de clients ($s_j \geq N$), et que $\mu_j(n_j) = n_j \cdot \mu_j$.

Soit R_s le sous-réseau formé de toutes stations ainsi définies. Pour ces stations :

$$A_j(n_j) = n_j !$$

Supposons, pour simplifier l'écriture, que ces stations aient les indices $y+1, y+2, \dots, M$. On vérifie facilement en raisonnant par récurrence que :

$$\beta_{y+1}(i) = \frac{1}{i!} (X_y + X_{y+1} + \dots + X_M)^i$$

B.3. Algorithme de calcul

L'organigramme relatif au calcul de la constante est donné en annexe. Selon la nature du réseau, et aux initialisations près, le nombre d'opérations élémentaires varie de $(2N+M)$ à $M(\frac{3}{2} N(N+1) + N)$. Si M est supérieur à quelques unités, ce nombre devient très faible par rapport au résultat d'un calcul élaboré selon un processus décrivant tous les états possibles du réseau (en effet, un tel calcul conduirait à un

nombre d'opérations élémentaires supérieur à $(M+3) \times C_{N+M-1}^{M-1}$.

On trouvera aussi dans l'annexe la comparaison de cet algorithme avec les deux algorithmes donnés par Jeffrey - Buzen dans [4].

C - PROBABILITES MARGINALES - RESEAUX REDUITS

C.1. Probabilité marginale

Pour simplifier l'écriture, cherchons la distribution de la probabilité de l'état de la station d'indice 1, ce qui ne nuit pas à la généralité du calcul.

Par définition :

$$p_1(i) = \frac{\sum_{\substack{\text{et } n_1=i \\ \text{et } n_j \leq N}} \prod_{j=1}^M \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)}{C(N)}$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1(i) = \frac{\frac{X_1^i}{A_1(i)} \sum_{N-i} \prod_{j=2}^M \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)}{\beta_1(N)}$$

où

$$\sum_{N-i}' = \{ (n_2, n_3, \dots, n_M) / \forall j \in \{2, 3, \dots, M\}, 0 \leq n_j \leq N-i, \sum_{j=2}^M n_j = N-i \}$$

On obtient donc :

$$p_1(i) = \frac{\frac{X_1^i}{A_1(i)} \beta_2(N-i)}{\beta_1(N)}$$

C.2. Réseau réduit

Dans le paragraphe (B.2.2.), on a montré que l'expression de la fonction auxiliaire $\beta_{y+1}(i)$ relative à un sous-réseau R_S particulier (voir ci-dessus) pouvait s'écrire directement :

$$\beta_{y+1}(i) = \frac{1}{i!} (X_{y+1} + X_{y+2} + \dots + X_M)$$

Si un tel sous-réseau R_S existe et si on ne s'intéresse pas à la distribution des clients à l'intérieur de R_S , alors une simplification dans le calcul de $C(N)$ consiste à partir directement des valeurs $\beta_{y+1}(i)$. Dans la pratique, en effet, l'étude des réseaux de file d'attente est généralement motivée par l'examen du comportement des stations où il se produit réellement un phénomène d'attente.

On peut définir les probabilités "semi-marginales"

$$P(n_1, n_2, \dots, n_y, N_z) = \sum_{\{n_{y+1} + n_{y+2} + \dots + n_M = N_z\}} P(n_1, n_2, \dots, n_M)$$

Cette probabilité est égale à :

$$P(n_1, n_2, \dots, n_y, N_z) = \frac{\prod_{j=1}^y \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right) \cdot \beta_{y+1}(N_z)}{\beta_1(N)}$$

En remarquant que si l'on remplace, dans le réseau d'origine, le sous-réseau R_S par une station Z (avec $s_z \geq N$) de paramètres :

$$\begin{cases} X_z = X_{y+1} + X_{y+2} + \dots + X_M \\ A_z(N_z) = N_z ! \end{cases}$$

Le nouveau réseau admettant la même probabilité $P(n_1, n_2, \dots, n_y, n_z)$ on peut considérer que ce nouveau réseau constitue un réseau "réduit" du précédent.

Pour faire cette réduction, il suffit de calculer les $\{x_j\}$

solution de $\bar{x} \mathcal{S} = \bar{x}$ afin d'obtenir le paramètre :

$$x_z = \sum_{\{y+1, y+2, \dots, M\}} \frac{x_j}{\mu_j}$$

C.3. Extension

Soit un réseau stochastique fermé où les services obéissent à des lois exponentielles à l'exception de ceux d'un sous-réseau R'_S dans lequel les services obéissent à des lois non identifiées ⁽¹⁾ mais où les stations (de R'_S) sont telles que $s_j > N$. On ne connaît que les durées moyennes de service \bar{u}_j , $j = y+1, \dots, M$.

On peut toujours (pour l'étude, en régime stationnaire) trouver un sous-réseau R_S équivalent à R'_S mais formé de stations dont les services obéissent à des lois exponentielles (même si cela conduit théoriquement à une infinité de guichets) (cf. [1]). Les stations de R_S sont telles que les moyennes des temps de services restent égales à celles de R'_S .

Les probabilités "semi-marginales" d'état $P(n_1, n_2, \dots, n_y, N_z)$ seront encore données par la formule :

$$P(n_1, \dots, n_y, N_z) = \frac{\prod_{j=1}^y \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right) \cdot \beta_{y+1}(N_z)}{\beta_1(N)}$$

où :

$$\beta_{y+1}(N_z) = \frac{(x_{y+1} \cdot \bar{u}_{y+1} + x_{y+2} \cdot \bar{u}_{y+2} + \dots + x_M \cdot \bar{u}_M)^{N_z}}{N_z !}$$

avec x_j solution de $\bar{x} \mathcal{S} = \bar{x}$

(1). en toute rigueur, il faut supposer que les lois non identifiées ont des transformées de Laplace rationnelles.

Remarque : La décomposition de R'_S en une infinité éventuelle de guichets à loi exponentielle n'a qu'un but de démonstration et ne pénalise en rien les calculs effectués.

La discussion précédente peut être étendue au cas d'un réseau ouvert en supprimant le terme $\beta_1(N)$.

On peut donc dire, pour l'étude en régime stationnaire, qu'un réseau à service partout exponentiel sauf pour les stations comportant une infinité de serveurs ($s_j > N$ pour un réseau fermé) est "réductible" en un réseau exponentiel "réduit".

D - DECOMPOSITION EN SOUS-RESEAUX - REDUCTION GENERALISEE

D.1. Calcul du taux de sortie d'un sous-réseau

Considérons le réseau R décomposé en K sous-réseaux dis-joints R_A, R_B, \dots, R_K ($2 \leq K \leq M$).

Soit R_J l'un quelconque de ces sous-réseaux. Son état est défini par le vecteur $\{v_J\}$.

Définissons $v_J(i)$ le taux de sortie du sous-réseau R_J sachant qu'il y a i clients dans ce sous-réseau et cherchons à calculer $v_J(i)$.

Soit $\rho_J(v)$ le taux de sortie de R_J lorsque R est dans l'état $\{v\}$. On a, compte tenu du paragraphe (B.1) :

$$v_J(i) = \frac{\sum_{\substack{v \in \mathcal{X}_N \\ \text{et } N_J=i}} \rho_J(v) \cdot P(v)}{\sum_{\substack{v \in \mathcal{X}_N \\ \text{et } N_J=i}} P(v)}$$

$$= \frac{\sum_{v_J \in \mathcal{X}_{J,i}} \rho_J(v_J) \cdot P_J(v_J)}{\sum_{v_J \in \mathcal{X}_{J,i}} P_J(v_J)}$$

$\{v_J\}$ représentant l'état du réseau complémentaire à R_J par rapport à R, et compte tenu que :

$$\rho_J(v) = \rho_J(v_J) + \rho_J(v_{\bar{J}}) = \rho_J(v_J)$$

Désignons par $\{L\}$ l'ensemble des indices des stations de R, et par $\{L_J\}$ l'ensemble des indices d'un sous-réseau R_J .

On a :

$$\rho_J(v_J) = \sum_{j \in \{L_J\}} \mu_j(n_j) \left[\sum_{m \in \{L\} - \{L_J\}} P_{jm} \right]$$

ou
$$\rho_J(v_J) = \sum_{j \in \{L_J\}} \mu_j(n_j) \cdot q_{j\bar{J}}$$

si on pose
$$q_{j\bar{J}} = \sum_{m \in \{L\} - \{L_J\}} P_{jm}$$

Posons :

$$\theta_1^J(i) = \sum_{j,i} \rho_J(v_J) \cdot P_J(v_J)$$

La quantité $\theta_1^J(i)$ s'obtient par récurrence à l'aide des fonctions auxiliaires :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_j^J(i) &= \sum_{k=1}^{k=i} q_{j\bar{J}} \cdot \mu_j(k) \cdot \frac{X_j^k}{A_j(k)} \beta_{j+1}^J(i-k) \quad \text{si } q_{j\bar{J}} \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \\ \theta_j^J(i) &= \delta_j^J(i) + \sum_0^i \frac{X_j^k}{A_j(k)} \theta_{j+1}^J(i-k) \end{aligned} \right.$$

ayant pour conditions initiales, si la station d'indice r_J est la première station prise ne compte dans le calcul :

$$\theta_{r_J}^J(i) = \delta_{r_J}^J(i) = \sum_1^i q_{r_J\bar{J}} \mu_{r_J}(k) \cdot \frac{X_{r_J}^k}{A_{r_J}(k)} \cdot \beta_{r_J+1}^J(i-k)$$

La fonction $\beta_j^J(i)$ du sous-réseau R_J est évidemment équivalente à la fonction $\beta_j(i)$ du réseau R .

Recherchons maintenant une expression simplifiée de la fonction $\theta_1^J(i)$.

Remarquons que $\mu_j(n_j) = \frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)} \mu_j$

on a :

$$\begin{aligned} \delta_j^J(i) &= q_{j\bar{J}} \cdot x_j \sum_1^i \frac{x_j^{k-1}}{A_j(k-1)} \beta_{j+1}^J(i-k) \\ &= q_{j\bar{J}} \cdot x_j \beta_j^J(i-1) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\theta_{(r-1)J}^J(i) = \delta_{(r-1)J}^J + \sum_0^i \frac{x_{(r-1)J}^k}{A_{(r-1)J}(k)} \times \delta_{rJ}^J(i-k)$$

mais $\delta_j^J(0) = 0 \quad \forall j$ car $\mu_j(0) = 0 \quad \forall j$

Donc :

$$\theta_{(r-1)J}^J(i) = \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j \cdot q_{j\bar{J}} \right) \cdot \beta_{(r-1)J}^J(i-1)$$

Un raisonnement par récurrence permet donc de montrer que :

$$\theta_1^J(i) = \left(\sum_{j=1}^{r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}} \right) \cdot \beta_1^J(i-1)$$

D'où l'expression très simple de $v_J(i)$:

$$v_J(i) = \frac{\theta_1^J(i)}{\beta_1^J(i)} = \left(\sum_{j=1}^{r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}} \right) \cdot \frac{\beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(i)}$$

Simplifions l'écriture en écrivant :

$$v_J(i) = \alpha_J \frac{\beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(i)}$$

Le terme α_J représente (à 1 facteur multiplicatif près si le vecteur $\{x\}$ n'a pas été normalisé) le flux sortant du sous-réseau R_J ; il est donc égal au flux entrant dans R_J .

D.2. Probabilités d'état d'un réseau en fonction de l'état de ses sous-réseaux

Compte tenu du paragraphe précédent, nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème D.2.

Soit un réseau d'attente à lois exponentielles, décomposé en un ensemble disjoint de sous-réseaux R_A, R_B, \dots, R_K . Si N_J est le nombre de client dans le sous-réseau R_J , les probabilités d'état stationnaires sont données par :

1°) si le réseau est fermé

$$P(N_A, N_B, \dots, N_K) = \frac{\prod_{\{A, B, \dots, K\}} \frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)}}{\sum_{\{N_A + N_B + \dots + N_K = N\}} \prod_{\{A, B, \dots, K\}} \frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)}}$$

2°) si le réseau est ouvert :

$$P(N_A, N_B, \dots, N_K) = \prod_{\{A, B, \dots, K\}} \left(\frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)} \right)$$

avec $\Gamma_J(N_J)$ telle que :

$$\begin{cases} \Gamma_J(0) = 1 \\ \Gamma_J(N_J) = \Gamma_J(N_J-1) \cdot v_J(N_J) \end{cases}$$

et $\alpha_J = \sum_{j=1}^{r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}}$

représentant le flux entrant dans le sous-réseau R_J .

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} \Gamma_J(i) &= \frac{i}{1} v_J(j) = \alpha_j^i \frac{\beta_1^J(o) \cdot \beta_1^J(1) \dots \beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(1) \cdot \beta_1^J(2) \dots \beta_1^J(i)} \\ &= \alpha_J^i \times \frac{\beta_1^J(o)}{\beta_1^J(i)} \\ &= \frac{\alpha_J^i}{\beta_1^J(i)} \quad \text{car} \quad \beta_1^J(o) = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)} = \beta_1^J(N_J)$$

Démontrer le théorème dans le cas d'un réseau ouvert revient donc à démontrer qu'on a bien :

$$P(N_A, N_B, \dots, N_K) = \beta_1^A(N_A) \cdot \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)$$

ce qui se déduit immédiatement de la formule des produits.

Pour un réseau fermé il faut montrer que :

$$P(N_A, N_B, \dots, N_K) = \frac{\beta_1^A(N_A) \cdot \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)}{\sum_{N_A + N_B + \dots + N_K = N} \beta_1^A(N_A) \cdot \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)}$$

cela est vérifié, compte tenu de la démonstration relative au réseau ouvert et de ce que :

$$\sum_{\{N_A + N_B + \dots + N_K = N\}} \beta_1^A(N_A) \cdot \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K) = \beta_1(N)$$

Remarque : Dans la formule qui précède, on suppose fixée la "structure" du réseau R par la connaissance de la matrice \mathcal{P} . Donc, si la formule permet de changer les valeurs des paramètres de service de certains sous-réseaux sans remettre en cause les fonctions $\Gamma_J(i)$ des autres sous-réseaux, celle-ci appelle des précisions quant aux modifications de "structure" possibles.

Considérons dans ce sens un sous-réseau R_J ouvert et soumis à un flot d'arrivée constant λ_o . En régime permanent, les taux d'arrivée sur chacune des stations sont déterminés par :

$$\lambda_j = \sum_{i \in \{\ell_J, o\}} \lambda_i P_{ij} \quad j=0, \{\ell_J\}$$

λ_o étant connu a priori, il existe une solution unique :

$$\lambda_j = \omega_j \cdot \lambda_o$$

D'après le calcul de $v_J(i)$, on peut dire que ce dernier est indépendant de λ_o . ($\alpha_J \cdot \beta_1^J(i-1)$ et $\beta_1^J(i)$ sont proportionnels à λ_o^i).

Reconsidérant le sous-réseau R_J inclus dans un réseau R, définissons comme vecteur d'entrée dans R_J le vecteur v_J dont la k^{ème} composante a pour valeur :

$$v_{Jk} = \sum_{i \in \{\ell_J\}} x_i P_{ik}$$

On voit que la fonction $\Gamma_J(i)$ est conservée lors d'une inclusion de R_J dans R si le vecteur d'entrée est proportionnel au vecteur Ω_J de composante ω_j définie ci-dessus.

Dans ce cas, il n'est pas utile de calculer les valeurs x_i de la solution $\bar{x} \cdot \mathcal{P} = \bar{x}$; il suffit de déterminer la valeur α_j en considérant la matrice de transition élaborée à l'aide des probabilités de transition de sous-réseau à sous-réseau.

A N N E X E

Algorithme de calcul de la constante :

Toute station de service à loi exponentielle et de discipline "premier arrivé - premier servi" peut être classée dans l'un des 4 types suivants :

type A = $(s_j \geq N, \mu_j(n_j) = n_j \cdot \mu_j)$

type B = $(s_j = 1, \mu_j(n_j) = (1 - \delta_{0,n_j}) \mu_j)$

type C = $(A_j(n_j) = r_j \cdot A_j(n-1) \text{ pour } s_j \leq n_j < N)$

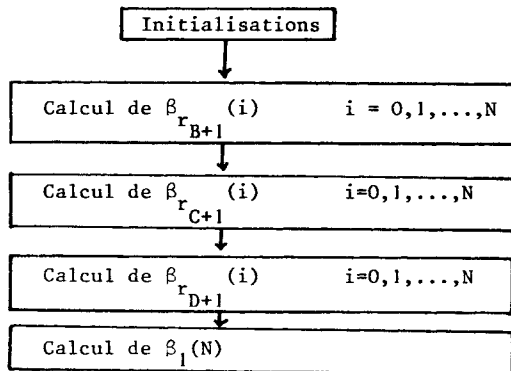
type D = stations qui ne sont ni du type A, ni B, ni C.

Supposons que, dans le réseau, les indices des stations soient ordonnés selon le type de celles-ci:

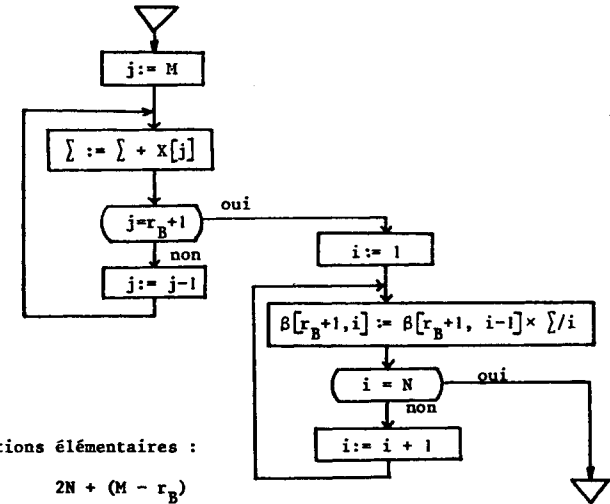
$r_k = \text{Sup \{indices des stations de type k\}}$

avec $0 < r_D < r_C < r_B < r_A = M$

l'organigramme général est le suivant :

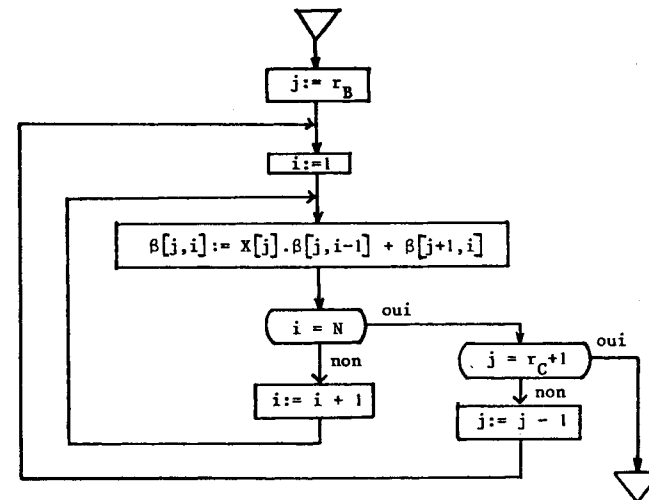


Organigramme relatif à $\beta_{r_B+1}(i)$



Nombre d'opérations élémentaires : $2N + (M - r_B)$

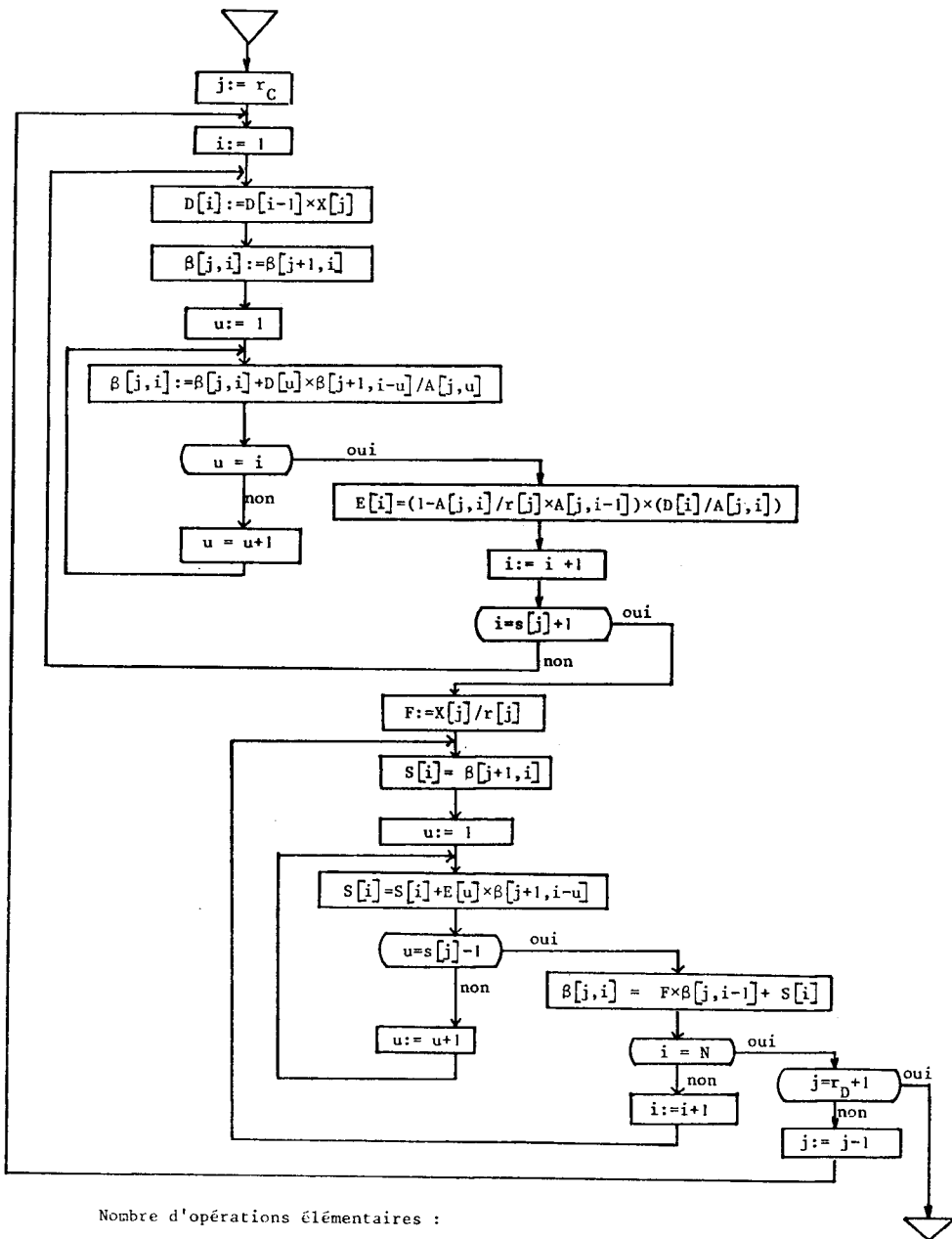
Organigramme relatif à $\beta_{r_C+1}(i)$



Nombre d'opérations élémentaires : $2(r_B - r_C) \times N$

Nota : Cet organigramme est similaire à celui de Buzen dans [3] relatif au premier algorithme ; et le nombre d'opérations élémentaires est identique.

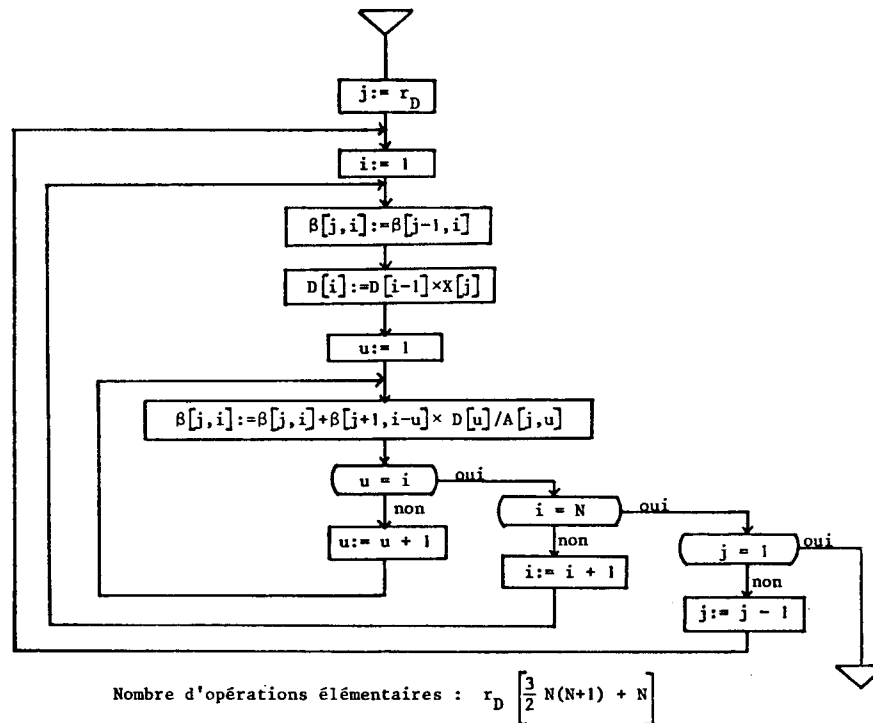
Organigramme relatif à $\beta_{r_D+1}(i)$



Nombre d'opérations élémentaires :

$$\sum_{j=r_D+1}^{j=r_C} (s[j] \left[2s[j] - \frac{1}{2} s[j] + \frac{15}{2} \right] + 1)$$

Organigramme relatif à $\beta_j(N)$



Nombre d'opérations élémentaires : $r_D \left[\frac{3}{2} N(N+1) + N \right]$

Nota : Cet organigramme est très voisin de celui utilisé par Buzen [3] dans son deuxième algorithme. Ce dernier donnerait un nombre de $r_D \times 2N(N+1)$ opérations élémentaires (car ici on calcule $D[u]$ directement avec la variable i).

Revenant à l'algorithme global, on voit donc que, selon la nature du réseau (et aux initialisations près), le nombre d'opérations élémentaires varie de $(2N+M)$ à $\frac{3}{2} M.N. (N + \frac{5}{2})$.

Cet algorithme sera d'autant plus intéressant que le réseau étudié ne comprendra que des stations de type A, B, et C (ce qui est souvent le cas).

Si dans un réseau ouvert, on s'intéresse à des probabilités d'état de sous-réseaux telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe D, l'algorithme ci-dessus pourra être utilisé pour calculer les fonctions $\beta_j^T(i)$.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] D.R. COX A use of complex probabilities in the theory of
stochastic processus. Proc. Camb. Phil. Soc, 51 (1955)
- [2] GORDON and NEWEL Closed Queuing Systems with exponentials
servers. Oper. Res. 15.2 (1967), 254-265
- [3] JACKSON Job-Shop like queuing systems, Management Science,
Vol 10, Oct. 1963, 131-142.
- [4] JEFFREY - P.BUZEN Computational Algorithms for closed Queuing
Networks with Exponentials Servers. A.C.M. Volume 16,
Number 9. 1973.
-