GILLES HAINRY

Décomposition en sous-réseaux indépendants d'un réseau de files d'attente markovien ergodique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A5_0>

DECOMPOSITION EN SOUS-RESEAUX INDEPENDANTS D'UN RESEAU DE FILES D'ATTENTE MARKOVIEN ERGODIQUE PAR Gilles HAINRY

SOMMAIRE :

On montre que la distribution de probabilité stationnaire d'un réseau markovien ergodique ouvert ou fermé est proportionnelle au produit des distributions de probabilités stationnaires de sous-réseaux ouverts canoniquement associés à une décomposition du réseau considéré en sous-réseaux; pour chaque sous-réseau canonique, la probabilité stationnaire ne dépend que du sous-réseau : notamment, elle ne dépend pas du nombre de "serveurs" dans les postes de service n'appartenant pas au sous-réseau considéré.

Le plan adopté est le suivant :

- A : Données
- B : Cas d'un seul élément en circulation
- C : Sous-réseau canonique associé à un sous-réseau
- D : Relation entre le réseau global et les sous-réseaux canoniques quand il n'y a qu'un seul élément en circulation
- E : Théorème

Le but est essentiellement de prouver le théorème donné au paragraphe E.

A - DONNEES

Le système que l'on considère est un réseau de files d'attente markovien fermé (resp. ouvert) ergodique dont on étudie la probabilité stationnaire. Plus précisément.

- Le réseau comprend m postes de services entre lesquels évoluent n éléments (resp. une infinité d'éléments) ; dans le cas d'un réseau ouvert, on suppose que dans le m-ième poste seulement il y a une infinité d'éléments.

- Pour le poste i, le taux de service de ce poste vaut $\mu_i(x_i)$ s'il y a x_i éléments dans ce poste (en attente ou en cours de service) à l'instant considéré ; dans le cas d'un réseau ouvert, μ_m ne dépend pas de x_m puisque x_m est infini.

- Un élément qui quitte le poste i va au poste j avec la probabilité $p_{i,j}$; la matrice P de terme général $p_{i,j}$ est une matrice stochastique puisqu'aucun élément ne quitte le système ; c'est aussi une matrice irréductible puisque le système est supposé ergodique. On notera $I = \{1,\dots,m\}$ l'ensemble des indices des postes de service.

On se donne une partition $\{J(k)\}_{1\leqslant k\leqslant s}$ de I ; pour tout élément k, $1\leqslant k\leqslant s$, l'ensemble des postes dont l'indice appartient à $J(k)$ constitue le sous-réseau **k**;

On notera $X = (x_1,\dots,x_m)$ un état du système, x_i représentant, pour $1\leqslant i\leqslant m$, le nombre d'éléments dans le poste d'indice i; on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des états possibles ; dans le cas d'un réseau ouvert, $\mathcal{H}$ est donc l'ensemble des X tel que $x_m = +\infty$ et tel que $\sum_{i=1}^{m-1} x_i < +\infty$; dans le cas d'un réseau fermé, $\mathcal{H}$ est l'ensemble des X tel que $\sum_{i=1}^{m} x_i = n$.

B - CAS D'UN SEUL ELEMENT EN CIRCULATION

On notera $U = (u_1,\dots,u_m)$ la matrice uni-ligne, telle que $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$ et solution de l'équation matricielle $UP = U$. Cette matrice est unique puisque le système est ergodique. S'il n'y a qu'un seul élément en circulation dans le système, u_i représente la fréquence de passage de cet élément dans le poste i ou encore, la probabilité stationnaire, pour cet élément, d'être dans ce poste i, quand tous les postes ont un service exponentiel de même paramètre. De même, $u_i . p_{i,j}$ représente la fréquence de passage du poste i au poste j.

Pour tout sous-réseau d'indice k, $1 \leq k \leq s$, on notera v(k) le vecteur $(v(k)_1,\dots, v(k)_m)$ défini par $(v(k))_i = 0$ si $i \notin J(k)$ et

$$(v(k))_i = \frac{1}{\sum_{j \in J(k)} u_j} \left\{ \sum_{j \in J(k)} p_{j,i} . u_j \right\} \quad \text{si } i \in J(k)$$

Dans le cas où il n'y a qu'un seul élément en circulation dans le système, si i appartient à J(k), c'est-à-dire si le poste i appartient au sous-réseau k, $(v(k))_i$ est la fréquence d'entrée dans le poste i sachant qu'on est à l'extérieur du sous-réseau k.

C - SOUS-RESEAU CANONIQUE ASSOCIE A UN SOUS-RESEAU

Pour tout sous-réseau k, on appellera sous-réseau canonique associé, le sous-réseau ouvert constitué du sous-réseau considéré k auquel on adjoint un poste extérieur avec les taux suivants : le taux d'entrée dans la station i en venant de l'extérieur vaut $(v(k))_i$; les taux de sortie du sous-réseau canonique et les taux de transfert à l'intérieur du sous-réseau canonique sont les mêmes que ceux du sous-réseau k considéré. Chaque sous-réseau canonique est irréductible et admet donc une probabilité d'équilibre unique $q_k(x)$.

D - RELATION ENTRE LE RESEAU GLOBAL ET LES SOUS-RESEAUX CANONIQUES QUAND IL N'Y A QU'UN SEUL ELEMENT EN CIRCULATION

On considère le cas où il n'y a qu'un seul élément en circulation et où tous les postes du réseau sont à service exponentiel de même paramètre.

Pour tout sous-réseau k et pour tout poste i, on désigne par $(w(k))_i$ la probabilité stationnaire d'être dans le poste i quand on se restreint au sous-réseau canonique associé au sous-réseau k ; par conséquent, $(w(k))_i = 0$ si la station i n'appartient pas au sous-réseau k ; si on considère la matrice uni-ligne F_k dont une coordonnée vaut $1 - \sum_{i \notin j(k)} (w(k))_i$ et dont les autres valent $(w(k))_i$ pour i appartenant à j(k), ceci revient à dire que F_k est solution de l'équation matricielle $F_k R_k = F_k$ où R_k est la matrice de transition du sous-réseau canonique associé au sous-réseau d'indice k.

On a alors pour tout i, $\sum_{k=1}^{s} (w(k))_i = u_i$.

En effet, si le poste i appartient au sous-réseau k, $(w(k))_i$ est la fréquence de passage dans le poste i dans le cas où il n'y a qu'un seul élément en circulation.

E - THEOREME

Pour toute décomposition en sous-réseaux d'un réseau ouvert ou fermé, la distribution de probabilité d'équilibre dans ce réseau est égale au produit des distributions de probabilités d'équilibre dans les sous-réseaux canoniques ouverts associés aux sous-réseaux de la décomposition considérée. Autrement dit, en utilisant les notations précédentes, pour tout état x du réseau, on a :

$$q(x) = \prod_{k=1}^{s} q_k(x)$$

où $q_k(x)$ ne dépend en fait que des valeurs x_i telles que i appartienne à J(k).

Ce théorème se vérifie formellement facilement en utilisant la relation $u = \sum_{k=1}^{s} w(k)$ prouvée au paragraphe D et la formule de Jackson (cf. [1]) donnant les probabilités stationnaires d'un réseau markovien irréductible ouvert ou fermé.

B I B L I O G R A P H I E

1 JACKSON *Job-Shop Like Queuing systems*, Management Science, Vol. 10, 1963, pp. 131-142.