PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. MÉTIVIER

J. PELLAUMAIL

Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_o

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 16-37
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A2_0>

MESURES STOCHASTIQUES A VALEURS DANS DES ESPACES L_0

par M. METIVIER et J. PELLAUMAIL

Le but de cet exposé est d'étudier une notion d'intégrale stochastique qui inclut, notamment, l'intégrale stochastique $\int Y\, dX$ d'un processus réel Y par rapport à un processus X à valeurs dans un espace de Banach E. Dans [4] ou [6] , cette intégrale stochastique est définie comme l'intégrale d'une fonction réelle associée à Y par rapport à une "mesure stochastique" à valeurs dans un espace L_p^E avec $p \geqslant 1$. Ici, cette "mesure stochastique" est à valeurs dans un espace L_p^E avec $p \geqslant 0$: ceci conduit à utiliser des techniques de démonstration assez différentes de [4] ou [6] puisqu'on considère une intégrale par rapport à une "mesure" à valeurs dans un espace vectoriel non localement convexe.

De plus, ici, on considère le cas où l'ensemble T (ensemble des valeurs du temps dans le cas usuel) n'est pas totalement ordonné (cf. [5]).

A - DONNEES ET NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet.

T est un espace topologique.

$\mathcal{J}$ est une semi-algèbre de parties de T.

A chaque élément I de $\mathcal{J}$ est associé une sous-tribu $\mathcal{F}_I$ de $\mathcal{F}$ qui contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{F}$.

On suppose que, si I et J sont deux éléments de $\mathcal{J}$ tels que $I \subset J$, on a $\mathcal{F}_I \supset \mathcal{F}_J$ (pour des exemples d'une telle situation, cf. [5]).

On dira que A est un "rectangle prévisible" si A est une partie de $(\Omega \times T)$ de la forme $(H \times I)$ où I est un élément de $\mathcal{J}$ et H est un élément de $\mathcal{F}_I$. La famille de ces rectangles prévisibles sera notée $\mathcal{R}$

On vérifie facilement qu'elle constitue une semi-algèbre.

L'algèbre engendrée par cette famille $\mathcal{R}$ sera notée $\mathcal{A}$. On vérifie facilement que tout élément de $\mathcal{A}$ admet une partition finie constituée d'éléments de $\mathcal{R}$.

La tribu engendrée par $\mathcal{R}$, ou par $\mathcal{A}$, sera notée $\mathcal{F}'$ et sera appelée la tribu des prévisibles. On dira que Y est un processus réel prévisible si Y est une application réelle définie sur $(\Omega \times T)$ mesurable pour la tribu $\mathcal{F}'$.

E est un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$).

Pour tout réel p positif (zéro compris), on posera $L_p^E = L_p^E(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (espace vectoriel de variables aléatoires à valeurs dans E muni de la topologie usuelle).

Quand on dira qu'une partie $\mathcal{U}$ de L_p^E est une partie <u>bornée</u> de L_p^E , ce sera toujours au sens des espaces vectoriels topologiques (cf. par exemple [2]).

B - MESURE STOCHASTIQUE D'ORDRE p

B-1 : Définition

Soit $p \geqslant 0$. Soit x une fonction définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans L_p^E et telle que $x(H \times I) = 1_H \cdot x(\Omega \times I)$ si I est un élément de $\mathcal{J}$ et si H appartient à $\mathcal{F}_I$. On dira que x est une mesure stochastique d'ordre p si x se prolonge à la tribu $\mathcal{F}'$ en une fonction σ - additive pour la topologie usuelle de L_p^E.

Dans ce cas, ce prolongement sera encore noté x et sera aussi appelé mesure stochastique.

Dans la suite du présent paragraphe, on se propose de donner des conditions suffisantes pour que x soit une mesure stochastique (cf. théorème B-4 ci-après), puis d'étudier x.

Pour cela, on aura besoin du lemme suivant :

B-2 : <u>Lemme</u>

Soit v une fonction réelle positive définie sur $\mathfrak{A}$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) *si A et B appartiennent à $\mathfrak{A}$, $v(A) \leq v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$*

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout élément $A = H \times I$ de $\mathfrak{R}$, il existe un élément J de $\mathfrak{J}$ et un compact C de T tels que $J \subset C \subset I$ et, si $B = H \times J$, $v(A \setminus B) \leq \varepsilon$.*

(iii) *pour toute suite $(F_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathfrak{G}$ telle que $F_n \downarrow \emptyset$ et pour toute suite $(B_n)_{n > 0}$ associée d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que pour tout n, $B_n \subset (F_n \times T)$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} . v(B_n) = 0$.*

Alors v satisfait à la condition suivante :

(iv) *pour toute suite $(A_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$ on a $\lim\limits_{n \to \infty} . v(A_n) = 0$*

<u>Preuve</u>

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(A_n)_{n > 0}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$. On construit une suite associée $(B_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ de la façon suivante :

pour tout n, A_n admet une partition finie $\{ A(n,k) \}_{1 \leq k \leq m}$ constituée d'éléments de $\mathfrak{R}$, soit $A(n,k) = H(n,k) \times I(n,k)$; pour tout n et k, soit $B(n,k) = H(n,k) \times J(n,k)$ élément de $\mathfrak{R}$ tel que $B(n,k) \subset A(n,k)$,

$$v\left[A(n,k) \setminus B(n,k)\right] \leq \frac{\varepsilon \cdot 2^{-n}}{m}$$

et tel qu'il existe un compact C(n,k) de T avec $J(n,k) \subset C(n,k) \subset I(n,k)$; enfin, soit $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(n,k)$; on a, notamment,

$$v(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{k=1}^{m} v\left[A(n,k) \setminus B(n,k)\right]$$

$$\leq 2^{-n} . \varepsilon$$

Pour tout n, soit $E_n = \bigcap\limits_{k \leq n} B_k$. D'une part, on a :

$$v(A_n \setminus E_n) \leq \sum_{k=1}^{n} v(A_k \setminus E_k) \leq \varepsilon$$

Pour tout élément ω de Ω et pour tout entier j, soit $a(j,\omega)$ l'ensemble des entiers k tels que $\omega \in H(j,k)$; ensuite, pour tout entier n et tout élément ω de Ω, soit

$$D_n(\omega) = \bigcap_{j \leq n} \{ \bigcup_{k \in a(j,\omega)} C(j,k) \}$$

enfin, soit $F_n = \{ \omega : \omega \in \Omega , D_n(\omega) \neq 0 \}$

(pour tout n, F_n est un élément de $\mathfrak{G}$).

Pour ω fixé, $(D_n(\omega))_{n > 0}$ est une suite de compacts qui décroît vers vide, donc il existe un entier n tel que $D_n(\omega) = \emptyset$, ce qui signifie que l'on a $F_n \downarrow \emptyset$. Or, pour tout n, E_n est contenu dans $F_n \times T$ (puisque $B_n(\omega)$ est contenu dans $\bigcup\limits_{k=1}^{m} C(n,k)(\omega)$).

D'après la condition (iii), on a donc $v(E_n) \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Ceci implique $v(A_n) \leq v(A_n \setminus E_n) + v(E_n)$

$\leq 2\varepsilon$ pour n assez grand

Puisque ε est arbitraire, on a $\lim\limits_{n \to \infty} . v(A_n) = 0$.

B-3 : <u>Lemme</u>

Soit x une fonction définie et simplement additive sur une algèbre $\mathfrak{A}$, à valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{U}$ muni d'une F-norme que l'on notera $|| . ||$. On suppose que x satisfait à la condition suivante :

(i) *si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$,*

$$\lim_{n \to \infty} ||x(A_n)|| = 0$$

soit v la fonction définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$v(A) = \sup_{B \in \mathcal{A},\ B \subset A} ||v(B)||$$

alors, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $v(A) < +\infty$

<u>Preuve</u>

Notons d'abord que, si x admet un prolongement σ - additif à la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, la condition (i) ci-dessus est nécessairement satisfaite.

On va d'abord prouver que l'on a la propriété suivante :

(s) si A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que $v(A) = +\infty$, il existe une partition (B, C) de $\mathcal{A}$ telle que

$$||x(B)|| \geq 1 \quad \text{et} \quad v(C) = +\infty$$

On considère donc $A \in \mathcal{A}$ tel que $v(A) = +\infty$

Soient E et F deux éléments de $\mathcal{A}$ contenus dans $\mathcal{A}$ tels que $||x(E)|| \geq 2$ et $||x(F)|| \geq 2 + ||x(E)||$. On a nécessairement l'un des trois cas suivants (au moins)

a) $v(A \setminus F) = +\infty$

b) $v(A \setminus E) = +\infty$

c) $v(E \cap F) = +\infty$

Dans le cas a), on pose $C = A \setminus F$ et $B = F$; dans le cas b), on pose $C = A \setminus E$ et $B = E$; considérons le cas c) :

- si $||x(E \setminus F)|| \geq 1$, on pose $B = E \setminus F$ et $C = F \cup (A \setminus E)$;
- si $||x(E \setminus F)|| \leq 1$, on a :

$$||x(E \cap F)|| \leq ||x(E)|| + ||x(E \setminus F)|| \leq 1 + ||x(E)||$$

donc :

$$||x(F \setminus E)|| \geq ||x(F)|| - ||x(E \cap F)|| \geq 2 + ||x(E)|| - 1 - ||x(E)|| \geq 1$$

On peut donc poser, dans ce cas, $B = F \setminus E$ et $C = E \cup (A \setminus F)$.

Ceci achève la preuve de la propriété (s).

Raisonnons par l'absurde et supposons $v(A) = +\infty$.
On construit les suites $(B_n)_{n>0}$ et $(C_n)_{n\geq 0}$ par récurrence de la façon suivante : on pose $C_o = A$ puis, C_n étant déterminé tel que $v(C_n) = +\infty$, on se donne une partition (B_{n+1}, C_{n+1}) de C_n telle que $||x(B_{n+1})|| \geq 1$ et $v(C_{n+1}) = +\infty$ (propriété (s)). La suite $(B_n)_{n>0}$ ne satisfait pas à la condition (i), ce qui achève le raisonnement.

B-4 - <u>Théorème</u>

Soit $p \geq 0$. Pour toute variable aléatoire f appartenant à L_p^E, on pose :

$$||f||_p = \left[\int |f(\omega)|^p . P(d\omega)\right]^{1/p} \quad \text{si } p \geq 1 \quad \text{(norme usuelle)}$$

$$||f||_p = \int |f(\omega)|^p . P(d\omega) \quad \text{si } 0 < p \leq 1$$

$$||f||_p = \int \left[|f(\omega)| \wedge 1 \right] . P(d\omega) \quad \text{si } p = 0$$

$|| \ ||_p$ est une F - norme (cf. [3]) associée à la topologie usuelle de L_p^E.

Soit x une fonction définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans L_p^E et qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) si I appartient à $\mathcal{J}$ et si H appartient à $\mathcal{F}_I$, on a

$$x(H \times I) = 1_H . x(H \times I)$$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout élément $A = H \times I$ de $\mathcal{R}$, il existe un élément J de $\mathcal{J}$ et un compact C de T tels que $J \subset C \subset I$ et tels que, si D est un élément de $\mathcal{A}$ contenu dans $[H \times (I \setminus J)]$,

$$||x(D)||_p \leq \varepsilon$$

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, la suite $(x(A_n))_{n>0}$ converge vers zéro (pour la topologie usuelle de L_p^E).

Alors, x est une mesure stochastique d'ordre p. (cf. B-1 ci-dessus).

De plus, si la condition (iii) est satisfaite, la condition (ii) est une conséquence de l'ensemble des deux conditions suivantes :

(iv) pour tout élément I de $\mathcal{J}$, il existe une suite $(J_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{J}$ et une suite associée $(C_n)_{n>0}$ de compacts de T telles que, pour tout n, $J_n \subset C_n \subset I$ et telles que $J_n \uparrow I$.

(v) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$, $\lim\limits_{n\to\infty} x(A_n) = 0$ (pour la topologie usuelle de L_p^E).

Enfin, si E est un esapce vectoriel de dimension finie, la condition (iii) est satisfaite si x est simplement additive et si $x(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p^E.

<u>Preuve</u>

On notera $||\cdot||$ au lieu de $||\cdot||_p$.

1°/ Considérons d'abord le cas où $E = \mathbb{R}$: dans ce cas, les espaces $L_p^E = L_p^{\mathbb{R}}$ (pour $p \geq 0$) satisfont aux hypothèses du théorème 3 de [3] ; soit $(A_n)_{n>0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$; si x est additive et si $x(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p^R, la série de terme général $x(A_n)$ est "parfaitement bornée" (cf. [3]) ; elle est donc convergente. Ceci montre la dernière partie du théorème dans le cas $E = \mathbb{R}$. Le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie s'en déduit immédiatement.

2°/ Considérons maintenant le cas où E est un espace de Banach quelconque et montrons que la condition (ii) est une conséquence de l'ensemble des trois conditions (iii), (iv) et (v). Pour cela, raisonnons par l'absurde et considérons un $\varepsilon > 0$ et un élément $A = H \times I$ de $\mathcal{R}$ qui ne satisfassent pas à (ii).

Soit $(J_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{J}$ et une suite associée $(C_n)_{n>0}$ de compacts telles que, pour tout n, $J_n \subset C_n \subset I$ et telles que $J_n \uparrow I$. Pour tout n, on pose $J'_n = I \setminus J_n$. On construit alors la suite $(V_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et la suite associée d'entiers $(k(n))_{n>0}$ par récurrence de la façon suivante :

étant donné k(n), soit $W_{n+1} \subset [H \times J'_{k(n)}]$ avec $W_{n+1} \in \mathcal{A}$ et $||x(W_{n+1})|| \geq \varepsilon/2$

(rappelons qu'on raisonne par l'absurde)

ensuite, soit k(n+1) tel que $||x[W_{n+1} \cap (H \times J'_{k(n+1)})]|| \leq \varepsilon/4$

(k(n+1) existe d'après l'hypothèse (v) et le fait que W_{n+1}, comme tout élément de $\mathcal{A}$, admet une partition finie constituée d'éléments de $\mathcal{R}$).

enfin, soit $V_{n+1} = W_{n+1} \setminus [H \times J'_{k(n+1)}]$.

On a $||x(V_{n+1})|| \geq ||x(W_{n+1})|| - ||x[W_{n+1} \cap (H \times J'_{k(n+1)})]||$

$$\geq \varepsilon/2 - \varepsilon/4 = \varepsilon/4$$

De plus, les ensembles $(V_n)_{n>0}$ sont deux à deux disjoints, ce qui contredit la condition (iii) et achève le raisonnement par l'absurde.

3°/ On considère toujours le cas où E est un espace de Banach quelconque. Soit v la fonction réelle positive définie sur l'ensemble des parties de $\Omega \times T$ par :

$$v(A) = \sup_{B \in \mathcal{A},\, B \subset A} ||x(B)||_p$$

On veut prouver que, en restriction à $\mathcal{A}$, v satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) du lemme B-2. La condition (i) est évidemment satisfaite et la condition (ii) du lemme B-2 correspond à la condition (ii) de l'énoncé du présent théorème.

On se propose donc maintenant de prouver que v satisfait à la condition B-2-(iii). Là encore, nous allons raisonner par l'absurde : soit $(F_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{F}$ telle que $F_n \downarrow \emptyset$ et soit $(B_n)_{n>0}$ une suite associée d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que, pour tout n,

$$B_n \subset (F_n \times T) \quad \text{et} \quad ||x\ (B_n)|| \geq 2\ \varepsilon > 0.$$

Le lemme B-3 montre que $v\ (F_1 \times T) = a < +\infty$.

Soit $D \subset F_1 \times T$, $D \in \mathfrak{A}$ tel que $||x(D)||_p \geq a - \varepsilon/4$;

soit $k > 1$ tel que $||x\ (D) \cdot I_{F_k}||_p \leq \varepsilon/4$;

soit $E \in \mathfrak{A}$, $E \subset (F_k \times T)$ tel que $||x\ (E)||_p \geq 2\ \varepsilon$;

on a, soit $||x\ (E \setminus D)||_p \geq \varepsilon$, soit $||x\ (E \cap D)||_p \geq \varepsilon$;

dans le premier cas, on a $||x(E \cup D)||_p \geq a + \varepsilon/4 - \varepsilon/4 + (\varepsilon - \varepsilon/4) \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$

dans le deuxième cas, on a $||x(D \setminus E)||_p \geq a + \varepsilon/2$: dans les deux cas, on contredit donc l'hypothèse $v\ (F_1 \times T) = a < +\infty$, ce qui achève le raisonnement par l'absurde.

4°/ On a donc prouvé que v satisfait aux hypothèses du lemme B-2. Par suite, si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$, on a $\lim_{n \to \infty} x\ (A_n) = 0$. Ceci et la condition (iii) nous permet d'appliquer le th rème 3-3 de [ ]. (on peut, aussi, utiliser [ ]).

5°/ Notons enfin que la condition "$x\ (\mathfrak{A})$ partie bornée de L_p^E " est équivalente à la condition $v\ (\Omega \times T) < +\infty$ sauf si $p = 0$ (auquel cas cette dernière condition $v\ (\Omega \times T) < +\infty$ est nécessairement satisfaite).

B-5 : Lemme

Soit u un espace vectoriel muni d'une F-norme que l'on notera $||\cdot||$. *Soit* $\mathfrak{F}'$ *une tribu de parties d'un ensemble* Ω'. *Soit m une fonction définie sur* $\mathfrak{F}'$, *à valeurs dans u et σ - additive pour la topologie de u associée à la F-norme considérée. Soit v la fonction positive définie sur* $\mathfrak{F}'$ *par :*

$$v(A) = \underbrace{\text{Sup}}_{B \subset A,\ B \in \mathfrak{F}'} ||m\ (B)||$$

La fonction v satisfait alors aux deux conditions suivantes :

(i) si A et B appartiennent à $\mathfrak{F}'$, $v\ (A) \leq v\ (A \cup B) \leq v(A) + v\ (B)$

(ii) si $(A_n)_{n>0}$ *est une suite d'éléments de* $\mathfrak{F}'$ *telle que* $A_n \downarrow \emptyset$,

$$\lim_{n \to \infty} v\ (A_n) = 0$$

Preuve

La propriété (i) se vérifie immédiatement. Considérons alors une suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathfrak{F}'$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lim_{n \to \infty} v\ (A_n) \geq \varepsilon > 0$.

On construit la fonction croissante f et la suite $(B_n)_{n>0}$ par récurrence de la façon suivante :

$f(n)$ et B_n étant déterminés, soit C_n élément de $\mathfrak{F}'$ tel que $C_n \subset A_{f(n)}$ et $||m\ (C_n)|| \geq 2\varepsilon/3$, puis , soit $f(n+1)$ tel que

$$||C_n \setminus A_{f(n+1)}|| \geq \varepsilon/3$$

On pose $B_{n+1} = C_n \setminus A_{f(n+1)}$. Enfin, on pose $D_n = \bigcup_{k \geq n} B_k$.

On a $D_n \downarrow \emptyset$ et, $\forall\ n$, $||m\ (D_n \setminus D_{n+1})|| \geq \varepsilon/3$ donc $m\ (D_n)$ ne tend pas vers zéro, d'où la contradiction.

B-6 : Lemme

Soit $\mathfrak{F}'$ *une tribu de parties d'un ensemble* Ω' *engendrée par une algèbre* $\mathfrak{A}$. *Soit v une fonction positive définie sur* $\mathfrak{F}'$ *et satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(i) si A et B appartiennent à $\mathfrak{F}'$, $v\ (A) \leq v\ (A \cup B) \leq v\ (A) + v\ (B)$

(ii) si $(A_n)_{n>0}$ *est une suite d'éléments de* $\mathfrak{F}'$ *telle que* $A_n \downarrow \emptyset$,

$$\lim_{n \to \infty} v\ (A_n) = 0$$

Alors, pour tout élément C de $\mathcal{G}'$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément B de $\mathcal{F}'$ qui est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, qui contient C et tel que $v\ (B \setminus C) \leq \varepsilon$.

<u>Preuve</u>

Soit $\mathcal{C}$ la classe des éléments de $\mathcal{G}'$ qui satisfont aux conclusions du lemme. D'une part $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$.

Suivant un résultat classique, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone.

Soit $(C_n)_{n > 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ croissant vers C ; pour tout n, soit $B_n \supset C_n$ avec $v\ (B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon .\ 2^{-n}$. Soit $B = \bigcup_{n > 0} B_n$.

On a $v\ (B \setminus C) \leq \sum_{n > 0} v\ (B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon$ donc C appartient à $\mathcal{C}$.

Soit $(C_n)_{n > 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ décroissant vers C ; pour tout n, soit $B_n \supset C_n$ et $v\ (B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon$; soit $B = \bigcap_{n > 0} B_n$.

On a $C \subset B$ et $v\ (B \setminus C) \leq v\ (B_n \setminus C_n) + v\ (C_n \setminus C)$

ce qui peut être rendu plus petit que 2ε pour n assez grand

B-7 : <u>Proposition</u>

Soit x une fonction définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans L_p^E et qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème B-4. Soit H un élément de $\mathcal{G}$. Soit A un ensemble prévisible tel que $1_A = 1_A \cdot 1_{H \times T}$

On a alors $x\ (A) = 1_H \cdot x\ (A)$

<u>Preuve</u>

On se donne donc x, H et A comme indiqués dans l'énoncé de la proposition. Pour tout élément f de L_p^E, on définit la F-norme $||\cdot||$ comme dans le théorème B-4 puis la fonction v associée comme dans le 3°/ de la preuve de ce théorème B-4. Le lemme B-5 montre que v satisfait aux propriétés (i) et (iv) du lemme B-2. Le lemme B-6 montre alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite décroissante $(B_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que, si $B = \bigcap_{n>0} B_n$, $B \subset A$ et $v\ (A \setminus B) \leq \varepsilon$. Il suffit donc de démontrer que $x(B) = 1_h \cdot x\ (B)$ sachant que $B_n \downarrow B$, que $B \subset H \times T$ et que, pour tout n, B_n appartient à $\mathcal{G}'$.

Puisque v satisfait à la condition (ii) du lemme B-2, pour tout n, il existe une partie D_n de $\Omega \times T$ contenue dans B_n et réunion finie de rectangles à bases compacts dans Ω et un élément C_n de $\mathcal{A}$, tels que $C_n \subset D_n \subset B_n$ et $v\ (B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} .\ \varepsilon$.

Soit $C'_n = \bigcap_{k \leq n} C_k$ et $C' = \bigcap_{n > 0} C'_n$. On a $||x(B) - x(C')|| \leq \varepsilon$

Il suffit donc de démontrer que $x\ (C') = 1_H \cdot x\ (C')$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que la suite de variables aléatoires $(x(C'_n))_{n > 0}$ converge P.p.s. vers $x\ (C')$.

Pour tout n, soit $G_n = \{\ \omega\ :\ \exists\ t,\ 1_{C'_n}\ (t, \omega) \neq 0\ \}$

$$\text{et } F_n = \{\ \omega : x\ (C'_n)\ (\omega) \neq 0\ \}$$

D'une part, $F_n \subset G_n$ (propriété B-4 (i)) ; d'autre part $G_n \downarrow C \subset H$ (puisque, pour tout $\omega \notin H$, la "trace" de $C'_n\ (\omega)$ sur T est contenu dans un compact K_n avec $K_n \downarrow \emptyset$). Or 1_{F_n} converge P.p.s. vers 1_F, donc $F \subset H$ P.p.s , c'est-à-dire que $x\ (C') = 1_H \cdot x\ (C')$, c.q.f.d.

C - <u>CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE</u>

C-1 : <u>Introduction</u>

Soit x une mesure stochastique d'ordre p telle que $x\ (\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p^E. Soit Y un processus prévisible réel uniformément borné. Le problème est de donner un sens au symbole $\int Y \cdot dx$: pour cela, nous allons considérer cette intégrale comme l'intégrale, par rapport à la "mesure" x, de la fonction réelle Y, considérée comme fonction définie sur $(\Omega \times T)$ et mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}'$ des prévisibles.

Si $p \geq 1$, L_p^E est un espace de Banach et on peut utiliser [1]. Si $0 \leq p \leq 1$, L_p^E n'est plus un espace de Banach : néanmoins, dans le cas considéré ici, on peut encore définir $\int Y.dx$. (notons qu'on pourrait utiliser [11]).

C-2 : Processus $\mathcal{A}$- étagé

On dira que Y est un processus réel $\mathcal{A}$- étagé si Y est une fonction réelle définie sur $(\Omega \times T)$ telle que :

$$Y(\omega , t) = \sum_{i \in I} a_i \cdot 1_{A(i)} (\omega , t) \qquad (1)$$

où $\{a_i\}_{i \in I}$ est une famille finie de réels et où $\{A_{(i)}\}_{i \in I}$ est une famille finie associée d'éléments de $\mathcal{A}$.

On notera $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des processus $\mathcal{A}$- étagés.

Si Y appartient à $\mathcal{E}$ et satisfait à (1), on posera

$$\int Y \cdot dx = \sum_{i \in I} a_i \cdot x [A(i)]$$

On vérifie immédiatement que, pour une mesure stochastique d'ordre p donnée, ceci définit, sur $\mathcal{E}$, une application linéaire à valeurs dans L_p^E.

C-3 : Théorème et définition de $\int Y \cdot dx$

Soit $p \geq 0$.

Soit x une mesure stochastique d'ordre p telle que $x(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p^E.

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des processus prévisibles réels uniformément bornés.

Il existe alors une application (unique) définie sur $\mathcal{P}$, à valeurs dans L_p^E, qui, à Y élément de $\mathcal{P}$, associe $\int Y \cdot dx$, et qui satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) en restriction à $\mathcal{E}$, $\int Y \cdot dx$ est définie comme indiquée précédemment (cf. C-2)

(ii) si $(Y_n)_{n>0}$ est une suite de processus réels prévisibles uniformément bornée (en n, t et ω) qui converge simplement vers le processus Y, la suite $(\int Y_n \cdot dx)_{n>0}$ converge (pour la topologie usuelle de L_p^E) vers $\int Y \cdot dx$.

Notons qu'on peut parfois définir $\int Y \cdot dx$ si Y est un processus prévisible non uniformément borné.

Par ailleurs, si Y est un processus prévisible uniformément borné, l'application u, qui, à tout élément A de $\mathcal{A}$ (ou de $\mathcal{P}'$), associe $u(A) = \int 1_A \cdot Y \cdot dx$ est une mesure stochastique d'ordre p.

Preuve

1°/ Considérons les deux propriétés suivantes :

(a) si $(Y_n)_{n>0}$ est une suite de processus réels $\mathcal{A}$- étagés qui décroît simplement vers zéro (pour tout t et tout ω), alors la suite $(\int Y_n \cdot dx)_{n>0}$ converge vers zéro pour la topologie usuelle de L_p^E.

(b) si $(Y_n)_{n>0}$ est une suite de processus réels positifs $\mathcal{A}$- étagés telle que $\sum_{n>0} Y_n \leq 1_{(\Omega \times T)}$, alors la suite $(\int Y_n \cdot dx)_{n>0}$ converge vers zéro pour la topologie usuelle de L_p^E.

Si on sait prouver ces deux propriétés, le théorème énoncé se déduit immédiatement de [7]. On va donc, maintenant, prouver successivement ces deux propriétés.

2°/ Prouvons la propriété (a)

Notons d'abord que la famille des variables aléatoires $\int Y.dx$, quand Y parcourt l'ensemble des processus réels $\mathcal{A}$- étagés uniformément bornés par 1, est une partie bornée de L_p^E (compte-tenu de [10], des propriétés de la F-norme considérée et de l'hypothèse x ($\mathcal{A}$) partie bornée de L_p^E).

Soit $(Y_n)_{n > 0}$ une suite de processus réels (positifs) $\mathcal{A}$- étagés qui décroît vers zéro. D'après le paragraphe précédent, si $A(n) = [Y_n > \varepsilon]$, et $B(n) = \Omega \setminus A(n)$, $\int Y_n \cdot 1_{B(n)} \cdot dx$ peut être rendu aussi petit que l'on veut (uniformément en n) si on prend ε assez petit, $\varepsilon > 0$ (puisque $|Y_n \cdot 1_{B(n)}| \leq \varepsilon$).

Or, pour ε fixé, $A(n) \downarrow \emptyset$ donc $v(A_n) \downarrow 0$ (cf. lemme B-2) donc $\int Y_n \cdot 1_{A(n)} \cdot dx$ tend vers zéro (cf. [10]) ce qui prouve la propriété (a).

3°/ Prouvons la propriété (b)

Soit $(Y_n)_{n > 0}$ une suite de processus réels positifs $\mathcal{A}$- étagés telle que

$$\sum_{n > 0} Y_n \leq 1 \quad .$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$ (k entier). Pour tout $n > 0$, soit $A(n) = [Y_n > \varepsilon]$. Comme précédemment, on peut choisir ε assez petit pour que

$$\int Y_n \cdot 1_{\Omega \setminus A(n)} \cdot dx$$

soit aussi petit que l'on veut (uniformément en n). Il reste donc à prouver que, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\lim_{n \to \infty} \cdot \int Y_n \cdot 1_{A(n)} \cdot dx = 0 \ .$$

Pour cela, on définit par récurrence les ensembles suivants :

$B(0,0) = \Omega$, $B(n, -1) = \emptyset$ pour tout entier n avec $n \geq 0$

$B(0,j) = \emptyset$ pour tout entier j avec $j \geq 1$

et pour $n \geq 1$ et $j \geq 1$:

$B(n,j) = [B(n-1, j-1) \cap A(n)] \cup [B(n-1, j) \setminus A(n)]$

$C(n,j) = B(n-1, j-1) \cap A(n) = B(n,j) \cap A(n)$

On a $B(n,j) = \emptyset$ pour $j > k$; de plus, pour tout n fixé, $\{C(n,j)\}_{1 \leq j \leq k}$ constitue une partition de A(n). Enfin, pour tout j fixé, $\{C(n,j)\}_{n > 0}$ constitue une famille d'éléments deux à deux disjoints. Il résulte de [10] et de l'hypothèse B-3 (iii) (nécessairement satisfaite) que

$$\lim_{n \to \infty} \int Y_n \cdot 1_{C(n,j)} \cdot dx = 0 \qquad (\text{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq k).$$

On en déduit que $\lim_{n \to \infty} \int Y_n \cdot 1_{A(n)} \cdot dx = 0$ (puisque $\{C(n,j)\}_{1 \leq j \leq k}$ constitue une partition de A(n)), ce qui prouve la propriété (b) .

D - <u>THEOREME DE RIESZ</u>

D-1 - <u>L'espace $\mathcal{H}$</u>

Pour tout ce paragraphe D, en plus des hypothèses indiquées en A, on se donne un espace vectoriel $\mathcal{H}$ dont chaque élément h est un processus réel. On munit $\mathcal{H}$ de la norme uniforme, c'est-à-dire que

$$||h|| = \operatorname{Sup}_{t,\omega} \cdot |h(t,\omega)|$$

et on suppose que, muni de cette norme, $\mathcal{H}$ est un espace de Banach. Enfin, on suppose que tout élément de $\mathcal{H}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathfrak{F}'$ des prévisibles et que, inversement, la tribu $\mathfrak{F}'$ est engendrée par l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ (pour des exemples d'une telle situation, cf. [5]).

D-2 - Définition

On dira que m est une E-mesure de Radon stochastique d'ordre p (avec $p \geq 0$) si m est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ *dans* L_p^E *(* $\mathcal{H}$ *étant muni de la topologie associée à la norme uniforme et* L_p^E *étant muni de sa topologie forte usuelle) qui satisfait à la condition suivante :*

(i) si $h \in \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{F}$ *et* $1_F \cdot h \in \mathcal{H}$, *on a* $m(1_F . h) = 1_F . m(1_F . h)$

D-3 - Théorème

1°/ Soit $p \geq 0$.

Soit x une mesure stochastique à valeurs dans L_p^E, *d'ordre p et bornée (c'est-à-dire que* $x(\mathcal{X})$ *est une partie bornée de* L_p^E *).*

Soit m l'application linéaire définie sur $\mathcal{H}$

$$\text{par } m(h) = \int h .\, dx$$

Alors, m est une E-mesure de Radon stochastique d'ordre p.

2°/ Réciproquement, soit m une E-mesure de Radon sotchastique d'ordre p satisfaisant à la condition suivante :

(i) pour toute suite $(h_n)_{n>0}$ *d'éléments positifs de* $\mathcal{H}$ *tels que*

$$\sum_{n>0} h_n \leq 1 \qquad \text{on a } \lim_{n \to \infty} . \, m(h_n) = 0$$

Alors, il existe une mesure stochastique x (unique) à valeurs dans L_p^E, *d'ordre p, bornée et telle que* $m(h) = \int h . dx$ *pour tout élément h de* $\mathcal{H}$. *De plus, la condition (i) ci-dessus est nécessairement satisfaite si E est de dimension finie.*

3°/ Enfin, si E est de dimension finie et si $p > 1$, *toute partie bornée de l'espace des E-mesures de Radon stochastiques d'ordre p est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple,* L_p^E *étant muni de sa topologie faible.*

Preuve

1°/ Le 1°/ se déduit immédiatement de la proposition B-7 et du paragraphe C qui précède.

2°/ Soit m une E-mesure de Radon stochastique d'ordre p. On va d'abord prouver la propriété suivante :

(j) soit $(h_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $h_n \downarrow 0$ et telle que, si $H_n = \{\omega : \exists\, t \text{ avec } h_n(t,\omega) \neq 0\}$ on a $H_n \downarrow \emptyset$, alors $m(h_n)$ tend vers zéro dans L_p^E.

Pour prouver cette propriété (j), on va raisonner par l'absurde. On peut supposer $||h_1|| \leq 1$ (en désignant par $||\cdot||$ la norme uniforme sur $\mathcal{H}$). On suppose alors qu'il existe une suite $(h_n)_{n>0}$ comme indiquée dans la condition (j), suite telle que, pour tout n,

$$||m(h_n)||_p \geq \varepsilon > 0$$

(en désignant par $||\cdot||_p$ la F-norme sur L_p^E définie au début du théorème B-4).

Soient f et g les applications croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ construites de la façon suivante : $f(1) = 1 = g(1)$ puis $f(n)$ et $g(n)$ étant déterminés (avec $g(n) \geq f(n)$), soit

$$f(n+1) \geq g(n) \quad \text{tel} \quad ||m(h_{g(n)}) \cdot 1_{H_{f(n+1)}}||_p \leq \varepsilon/2$$

On pose $u_n = h_{g(n)} - h_{f(n+1)}$ et $v_n = m(u_n)$.

On a $||v_n||_p \geq \varepsilon/2$. Soit $g(n+1) \geq f(n+1)$ tel que

$$||v_n \cdot 1_{H_{g(n+1)}}||_p \leq \varepsilon \cdot 4^{-n}$$

(ce qui achève la construction par récurrence).

On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. D'une part, $w_n = m\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$

$$\text{avec } 0 \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq h_1$$

D'autre part, si $J(k) = H_{g(k)} \setminus H_{g(k+1)}$,

$$||w_n \cdot 1_{J(k)}||_p \geq ||v_k \cdot 1_{J(k)}||_p - \sum_{j=1}^{k-1} ||v_j \cdot 1_{J(k)}||_p$$

$$\geq \varepsilon/2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \varepsilon \cdot 4^{-j}$$

$$\geq \varepsilon/4$$

donc $\lim_{n \to \infty} \cdot ||w_n||_p = +\infty$

Mais ceci contredit l'hypothèse de continuité de l'application m, ce qui prouve la propriété (j) énoncée ci-dessus.

3°/ On se propose maintenant de prouver le 2°/ du théorème. On considère donc une E-mesure de Radon stochastique d'ordre p, soit m. On se propose de prouver que m satisfait à la condition suivante :

(j') soit $(g_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $g_n \downarrow 0$: alors $\lim_{n \to \infty} \cdot m(g_n) = 0$ dans L_p^E

On considère donc une suite $(g_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $g_n \downarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $H_n = \{\omega : \exists\, t$ avec $g_n(t,\omega) \geq \varepsilon\}$.

On pose $h_n = g_n \vee \varepsilon - \varepsilon$. On a $H_n = \{\omega : \exists\, t$ avec $h_n(t,\ ) \neq 0\}$.

Or $H_n \downarrow \emptyset$ et $h_n \downarrow 0$ donc la suite $(h_n)_{n>0}$ satisfait à la condition (j) du 2°/ qui précède, donc

$$\lim_{n \to \infty} \cdot m(h_n) = 0$$

Or, on a : $m(g_n) = m(h_n) + m(g_n - g_n \vee \varepsilon - \varepsilon)$

avec $||g_n - g_n \vee \varepsilon - \varepsilon|| \leq \varepsilon$

Ceci et l'hypothèse de continuité sur m montrent qu'on peut rendre $||m(g_n)||_p$ aussi petit que l'on veut en choisissant ε assez petit puis n assez grand. La condition (j') ci-dessus et la condition (i) du 2°/ de l'énoncé du théorème permettent d'affirmer l'existence

d'un prolongement de Daniell (cf. [7]), ce qui implique l'existence d'une mesure stochastique x à valeurs dans L_p^E , d'ordre p, bornée et telle que $m(h) = \int h \cdot dx$ pour tout élément h de $\mathcal{H}$.

4°/ Le fait que la condition (i) du 2°/ de l'énoncé est nécessairement satisfaite si E est de dimension finie se déduit de [3] comme dans le 1°/ de la preuve du théorème B-4.

5°/ Il reste à prouver le 3°/ du théorème ; la propriété de compacité qui y est indiquée se déduit de [2] corollaire 3 du théorème 1 et de ce que l'espace des mesures de Radon stochastiques est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, L_p)$.

D-4 - <u>Théorème</u>

On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que Ω est un espace compact. Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions réelles définies et continues sur Ω . On désigne par $\mathcal{M}$ l'espace des formes bilinéaires définies sur $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$, continues si on munit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ de leurs topologies uniformes et satisfaisant à la condition suivante :

(i) si $h \in \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{F}$ et $h \cdot 1_F = h$, la mesure de Radon (sur Ω) $m(h, .)$ ne charge pas $\Omega \setminus F$

On dira qu'un élément m de $\mathcal{M}$ est dominé par P si, pour tout élément h de $\mathcal{H}$, la mesure de Radon (sur Ω) $m(h, .)$ est dominée par P.

1°/ Soit x une mesure stochastique d'ordre 1 à valeurs dans L_1^R . Soit m l'application réelle définie sur $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$ par

$$m(h,k) = E\left[k \cdot \int h \cdot dx\right]$$

alors m appartient à $\mathcal{M}$ et est dominé par P.

2°/ *Réciproquement, soit m un élément de* $\mathcal{M}$ *dominé par P.*
Alors, il existe une mesure stochastique (unique) x d'ordre 1, à valeurs dans $L_p^{\mathbb{R}}$ *et telle que, pour tout élément (h,k) de* $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$, *on ait :*

$$m\,(h,k) = E\,\left[k \,.\, \int h \,.\, dx\right]$$

3°/ *Toute partie bornée de* $\mathcal{M}$ *est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple.*

Preuve

Le 1°/ est une conséquence immédiate du théorème D-3 qui précède.

Soit m un élément de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{K}'$ le dual fort de $\mathcal{K}$: m induit une application $\bar{m}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ définie par, quel que soit k élément de $\mathcal{K}$, $<\bar{m}\,(h), k> \; = m\,(h,k)$

Cette application $\bar{m}$, faiblement continue par hypothèse, est fortement continue (cf. [2] chapitre IV, paragraphe 5, proposition 7). Elle peut donc être considérée comme une application continue de $\mathcal{H}$ dans $L_1\,(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On peut alors appliquer le théorème D-3 qui précède.

Enfin, le 3°/ se prouve comme le 3°/ du théorème D-3 qui précède.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.G. BARTLE : *A general bilinear vector integral* Studia Math. 15, p. 337-352 (1956).

[2] N. BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques* Hermann. Paris 1967.

[3] W. MATUSZEWSKA and W. ORLICZ : *A note on modular spaces IX.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Vol XVI, N° 10, 1968.

[4] M. METIVIER : *Advances in the theory of stochastic integrals.* Invited lecture to appear in 7th Prague Conference on Information Theory.

[5] M. METIVIER : *Un théorème de Riesz pour les mesures multi-indices.* A paraître aux C.R.A.S.

[6] J. PELLAUMAIL : *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer.* Astérisque N° 9, Société Mathématique de France, 1973.

[7] J. PELLAUMAIL : *Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. Tome XVI, N° 8, p. 1227-1236, 1971.

[8] G. PISIER : *Séminaire Maurey-Schwartz.* 1973-1974, exposé N° VI, Ecole Polytechnique.

[9] M. SION : *Outer measures with values in a topological group.* Proc. London Math. Soc. (3) 19, 89-106, 1969.

[10] P. TURPIN : *Suites sommables dans certains espaces de fonctions mesurables.* C.R.A.S. t. 280, série A, 1975, pp. 349-352.

[11] P. TURPIN : *Convexité dans les espaces vectoriels topologiques généraux.* Thèse - Orsay 1974.