PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL MÉTIVIER

Mesures et intégrales stochastiques pour des champs aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MESURES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES POUR DES CHAMPS ALEATOIRES

-=-=-=-

Par Michel METIVIER

Le travail qui suit définit la notion d'intégrale stochastique pour des processus indexés par un ensemble d'indices qui est un espace localement convexe métrisable quelconque.

La notion de mesure stochastique due à J. PELLAUMAIL (cf. [5]) est étendue ici, et un théorème de J. PELLAUMAIL et Y. GLORENNEC (cf. [3]) sur la correspondance entre mesures stochastiques et applications linéaires continues sur l'espace des processus adaptés à trajectoires continues à support compact est étendu ici. La démonstration s'applique immédiatement au cas particulier de [3].

I - DEFINITIONS GENERALES

1 - Situation

- On se donne T localement compact métrisable.
- $\mathcal{J}$ est un semi-anneau de parties de T qui sont des G_δ dont les intérieurs constituent une base de la topologie de T.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilère donné une fois pour toutes.
- A chaque $t \in T$ est associée une tribu $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ et pour chaque I on pose :

$$\mathcal{F}_{I} \int= \bigcap_{t \in I} \mathcal{F}_t$$

2 - Hypothèse sur les tribus

On supposera toujours les hypothèses suivantes vérifiées :

$\forall I \in \mathcal{J}$ $\quad \exists\, t_o \in \bar{I}$ tel que $\mathcal{F}_{t_o} \subset \mathcal{F}_I$ $\qquad (\mathcal{C}_1)$

Un tel point t_o est appelé point initial de I .

$\forall I \in \mathcal{J}$ $\quad$ existe un ouvert $O \supset I$ avec $\mathcal{F}_I = \bigcap_{t \in O} \mathcal{F}_t$ $\qquad (\mathcal{C}_2)$

3 - Champs aléatoires ou processus stochastique

3-1 : On appellera champ aléatoire sur T ou processus indexé par T une famille $(x_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexées par T.

3-2 : Champ adapté :

Un champ aléatoire sera dit adapté si :

$$\forall t \qquad X_t \in \mathcal{F}_t$$

3-3 : Tribu des prévisibles :

On appellera **rectangle prévisible** toute partie I x F de T x Ω où $I \in \mathcal{J}$ et $F \in \mathcal{F}_I$. On notera $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles prévisibles. On appellera "ensemble prévisible" tout élément de la tribu de parties de T x Ω engendrée par $\mathcal{R}$.

3-4 : Proposition 1

Tout processus à trajectoires continues et adapté est prévisible.

Démonstration

Soit une suite (f_n) de recouvrements ouverts de $\bar{I} \in \mathcal{J}$, tels que $O \in f_n \Rightarrow O \in \mathcal{J}$ et diamètre $(O) \leq \frac{1}{n}$.

Soit $\Phi_n = (\varphi^n_O)_{O \in f_n}$ une partition de l'unité sur $\bar{I}$ associée à f_n. Soit t_o un point initial de O. On pose :

$$X^n(t,\omega) = \sum_{O \in f_n} X_{t_o}(\omega)\, \varphi^n_O(t)$$

Comme $\varphi^n_O(\cdot)$ est nulle en dehors de O, et approximable uniformément par des fonctions **étagées** sur I, nulles en dehors de O, comme également X_{t_o} est limite simple sur Ω de variables aléatoires étagées $\mathcal{F}_{t_o}$ mesurables, X^n est clairement prévisible.

Pour chaque ω soit α_ω un module de continuité de $t \leadsto \varphi(t,\omega)$ sur $\bar{I}$.

$$\forall\ t \in \bar{I} \qquad X^n(t,\omega) - X(t,\omega) = \sum_{O \in f_n} (X_{t_o}(\omega) - X_t(\omega))\, \varphi^n_O(t)$$

soit :

$$1_I(t)\ .\ |X^n(t,\omega) - X(t,\omega)| \leq \alpha_\omega(\tfrac{1}{n})$$

D'où la convergence de $X^n(t,\omega)$ vers $X(t,\omega)$ partout sur I x Ω, et par suite la prévisibilité de X.

Proposition 2

Tout processus prévisible est adapté.

Démonstration

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{R}$ est un semi-anneau : si $I_1 x F_1 \in \mathcal{R}$ et $I_2 x F_2 \in \mathcal{R}$ on a $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{I_1} \cup \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1 \cap I_2}$

d'où $$F_1 \cap F_2 \times I_1 \cap I_2 \in \mathcal{R},$$

et par suite la stabilité de $\mathcal{R}$ pour $\cap$.

De même si $I_1 x F_1 \subset I_2 x F_2$ on a :

$$I_2 x F_2 - I_1 x F_1 = (I_2 \setminus I_1) x F_2 \cup (I_1 x F_2 \setminus F_1)$$

Comme $I_2 - I_1 = \bigcup_{i=1}^{n} J_1$, $J_i \in \mathcal{J}$, $F_2 \in \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1}$ et $F_2 \setminus F_1 \in \mathcal{F}_{I_1}$,

on exprime $I_2 x F_2 - I_1 x F_1$ comme une union finie d'éléments de $\mathcal{R}$.

Les éléments de $\mathcal{R}$ sont trivialement adaptés. La proposition 2 résulte immédiatement d'un argument de classe monotone. ■

Proposition 3

La tribu des prévisibles est engendrée par l'ensemble des processus adaptés à trajectoires continues et à support compact.

Démonstration

Les processus adaptés à trajectoires continues étant prévisibles d'après la proposition 1, il suffit de montrer que tout rectangle prévisible IxF appartient à la tribu engendrée par les processus continus adaptés à trajectoires continues à support compact. Or si O est un ouvert contenant I tel que $\mathcal{F}_I = \bigcap_{t\in O} \mathcal{F}_t$, on peut considérer une suite (O_n) décroissante d'ouverts inclus dans O tels que $I = \bigcap_n O_n$. Comme $1_{O_n} = \sup_k \varphi_{nk}$ pour une suite convenable de fonctions continues $(\varphi_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ à supports dans O_n, les processus $(t,\omega) \rightsquigarrow 1_{F(\omega)}\, \varphi_{n,k}(t)$ étant par ailleurs adaptés, les processus $1_{O_n xF}$, et par suite le processus 1_{IxF} appartiennent à la tribu engendrée par les processus adaptés à trajectoires continues à support compact. D'où la proposition. ■

3-5 : Mesures stochastiques :

On appelle mesure stochastique d'ordre p une mesure μ définie sur $\mathcal{P}$, à valeurs dans $L^P(\Omega,\mathcal{F},P)$ possédant la propriété suivante :

$$\forall I \times F \in \mathcal{R}, \qquad \mu(IxF) = 1_F \cdot \mu(Ix\Omega) \quad (\text{dans } L^P(\Omega,\mathcal{F},P)) \qquad (S)$$

(Mesure signifie : fonction sur $\mathcal{P}$, additive, à valeurs dans L^P).

On notera $\int X d\mu$ l'intégrale d'un processus prévisible borné par rapport à μ (à valeurs dans $L^P(\Omega, \ ,P)$. Pour la définition d'une telle intégrale, cf. [5].[4] ou[1]). On rappelle seulement que si X est borné ≥ 0 et $X_n \nearrow X$ alors $\lim \int X_n d\mu = \int X d\mu$ (limite dans L^P).

3-6 : Mesures de Radon Stochastiques :

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des processus adaptés et bornés, dont les trajectoires sont continues et tendent vers zéro à l'infini, muni de la norme $||\cdot|| = \sup_{Ix\Omega} |.|$.

On appelle mesure de Radon stochastique d'ordre p, toute application linéaire continue ℓ de $\mathcal{C}$ dans $L^P(\Omega,\mathcal{F},P)$ possédant la propriété suivante

$$\varphi \in \mathcal{C}, \ F\in\mathcal{F}, \text{ et } 1_F.\varphi\in\mathcal{C} \Rightarrow \ell(1_F.\varphi) = 1_F.\ell(1_F.\varphi) \qquad (S')$$

II - THEOREME FONDAMENTAL

1 - Enoncé du théorème

Si μ est une mesure stochastique d'ordre p, l'application linéaire ℓ_μ de C dans L^P, définie par :

$$\ell_\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

est une mesure stochastique.

$\mu \to \ell_\mu$ est une isomètre algébrique de l'espace vectoriel de toutes les mesures stochastiques, sur l'espace vectoriel de toutes les mesures de Radon stochastiques.

2 - Lemme 1

Si X et Y sont prévisibles bornés, avec $0 \leq X \leq Y$:

$$F\in\mathcal{F} \text{ et } 1_F.Y \text{ prévisible} \Rightarrow 1_F.X \text{ prévisible}$$

Démonstration

$$1_F.X = \inf(1_F\, Y, X)$$

3 - Proposition

Si X est prévisible borné et μ une mesure stochastique :

$$F \in \mathcal{F} \text{ et } 1_F.X \text{ prévisible} \Longrightarrow \int 1_F.X\, d\mu = 1_F.\int 1_F X\, d\mu \qquad \text{p. 1}$$

Démonstration

Notons pour simplifier $< h,g > \; = \int h.gdP$.

Pour montrer la proposition nous montrons que si X est prévisible et $F \in \mathcal{F}$ est tel que $1_F.X = X$, alors pour tout $H \in \mathcal{F}$

$$P(H \cap F) = 0 \Longrightarrow < 1_H \,,\, \int Xd\mu > \; = \; 0$$

Comme :

$$< 1_H \,,\, \int Xd\mu > = \int Xd\mu_H$$

où μ_H est la mesure réelle

$$\mu_H(A) = < 1_H, \mu(A) >$$

en notant m_H la variation de cette mesure, nous avons finalement à montrer que si $1_F.X = X$ on a :

$$P(H \cap F) = 0 \Longrightarrow \int Xdm_H = 0$$

Ceci revient à prouver que, pour la mesure positive m_H sur $\mathcal{P}$, la mesure intérieure de $T \times \complement H$ est nulle. S'il n'en était pas ainsi on pourrait trouver une suite décroissante (A_n) extraite de l'anneau et engendrée par $\mathcal{R}$, telle que $\bigcap_n A_n \subset T \times \complement H$ et $m_H(A_n) > \delta$. Or nous allons montrer que :

$$(T\times H) \cap \bigcap_n A_n = \phi \Longrightarrow \lim_n m_H(A_n) = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

On commence par remarquer que chaque élément de $\mathcal{R}$, et donc de $\mathcal{A}$ peut être approché pour m_H par des unions finies d'ensembles prévisibles de la forme $1_{C \times G}$ où C est un compact de T.

L'implication (3-1) sera donc vraie si on prouve que pour une suite $\tilde{A}_n$ de prévisibles de ce type on a :

$$(T\times H) \cap \bigcap_n \tilde{A}_n = \phi \Longrightarrow \lim_n m_H(\tilde{A}_n) = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

Soit alors $\qquad H_n = \{ \omega : \bigcap_{k\leq n} \tilde{A}_k(\omega) \neq \phi \}$

On a d'une part $\tilde{A}_n \subset H_n \times T$
et d'autre part puisque les $(\tilde{A}_k(\omega))_k$ forment pour tout $\omega \in H$ une famille de compacts d'intersection vide :

$$H \cap \bigcap_n H_n = \phi.$$

Enfin, pour tout rectangle prévisible $R \subset \tilde{A}_n$:

$$\mu(R) = 1_{H_n} \cdot \mu(R_n)$$

et par suite :

$$m_H(\tilde{A}_n) = \sup_{R \subset \tilde{A}_n} | < 1_{H_n} \cdot \mu(R), 1_H > |.$$

Comme la famille $\{ \mu(R) : R \subset \tilde{A}_n \}$ est bornée dans L^p, $p > 1$ et comme $E(1_{H \cap H_n}) \to 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} m_H(\tilde{A}_n) = 0 \qquad \blacksquare$$

4 - Démonstration du Théorème

Le fait que ℓ_μ soit une mesure de Radon-Stochastique est évident d'après la proposition précédente et les propriétés de continuité de l'intégrale.

Pour montrer la réciproque il nous faut associer à ℓ, mesure de Radon stochastique une mesure stochastique μ telle que pour tout $v \in L^q$

$$< \ell(f), v > = \int f d < \mu, v > \qquad (4\text{-}1)$$

Nous allons construire une mesure μ, unique à valeurs dans L^p telle que (4-1) est vraie. Nous montrerons ensuite que c'est une mesure stochastique. Le théorème en résultera.

Considérons donc la forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$

$$\ell_v(\varphi) = < \ell(\varphi), v >$$

Nous allons monter qu'on peut lui associer une mesure réelle μ_v sur $\mathcal{P}$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C} \qquad \ell_v(\varphi) = \int \varphi d\mu_v .$$

D'après un théorème de prolongement de DANIELL classique, il suffit de montrer que pour toute suite $\varphi_n \downarrow 0$ dans $\mathcal{C}$, on a :

$$\lim_n \sup_{\substack{g \in \mathcal{C} \\ 0 \leq g \leq \varphi_n}} | \ell_v(g) | = 0 \tag{4-2}$$

Ceci implique en effet que la partie positive ℓ_v^+ et la partie négative ℓ_v^- de la décomposition de Rieg de ℓ_v se prolongent en des mesures positives.

Posons $\qquad F_{n,\varepsilon} = \{ \omega : \exists t \ \ \varphi_n(t,\omega) > \varepsilon \}$

D'après la continuité des trajectoires de φ_n, et la séparabilité de T', $F_{n,\varepsilon} \in \mathcal{F}$.

En outre

$$1_{F_{n,\varepsilon}}(\omega) \ . \ (\varphi_n(t,\omega) v \varepsilon - \varepsilon) = \varphi_n(t,\omega) v\varepsilon - \varepsilon$$

D'où :

$$(t,\omega) \rightsquigarrow 1_{F_{n,\varepsilon}}(\omega) \ . \ (\varphi_n(t,\omega) v\varepsilon - \varepsilon) \text{ est prévisible,}$$

Comme $0 \leq g \leq \varphi \implies 0 \leq gv\varepsilon - \varepsilon \leq \varphi_n v\varepsilon - \varepsilon$, le lemme I-2 ci-dessus montre que :

$$1_{F_{n,\varepsilon}} (gv\varepsilon - \varepsilon) \text{ est prévisible d'où}$$

$$\ell(1_{F_{n,\varepsilon}} \ . \ (gv\varepsilon - \varepsilon)) = 1_{F_{n,\varepsilon}} \ \ell(1_{F_{n,\varepsilon}} \ . \ (gv\varepsilon - \varepsilon))$$

Par suite :

$$\ell(g) = 1_{F_{n,\varepsilon}} \ \ell(gv\varepsilon - \varepsilon) + \ell(g - gv\varepsilon + \varepsilon)$$

$\forall v \in L^q$

$$< \ell(g), v > = < \ell(gv\varepsilon - \varepsilon), 1_{F_{n,\varepsilon}} \ . \ v > + \ \ell(g-gv\varepsilon+\varepsilon), v >$$

$$| < \ell(g), v > | \leq || \ \ell(gv\varepsilon-\varepsilon) \ ||_p \ . \ || \ 1_{F_{n,\varepsilon}} \ . \ v \ ||_q + || \ v \ ||_q \cap \ell(g-gv\varepsilon+\varepsilon) \ ||_p$$

La continuité de ℓ, le fait que :

$$|| \ gv\varepsilon-\varepsilon \ || \leq || \varphi_n v\varepsilon-\varepsilon \ || \leq || \varphi_p v\varepsilon-\varepsilon \ ||$$

et :

$$|| \ g-gv\varepsilon+\varepsilon \ || \leq \varepsilon$$

donnent, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\substack{0 \leq g \leq \varphi_n \\ g \in \mathcal{C}}} | < \ell(g), v > | \leq \text{Constante } \varphi \ || \ 1_{F_{n,\varepsilon}} \ . \ v ||_q + ||\ell|| \ ||v||_q . \varepsilon$$

La condition $\varphi_n \downarrow 0$ impliquant :

$$\forall \varepsilon \qquad \bigcap_n F_{n,\varepsilon} = \phi$$

On a démontré la relation (4-2).

Soit alors μ_v la mesure réelle associée à la forme linéaire ℓ_v. L'application $v \to \mu_v(A)$ étant clairement linéaire pour tout $A \in \mathcal{P}$, on notera $\mu(A)$ l'élément de $(L^q)^*$ (dual algébrique de L^q) associé à cette forme linéaire.

On voit immédiatement que si pour un $v \in L^q$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}}} < \mu(\varphi), v > \leqslant \alpha$$

on a :

$$< \mu(A), v > = \mu_v(A) \leqslant \alpha$$

Ceci montre que dans l'espace $(L^q)^*$, $\mu(A)$ appartient à l'enveloppe fermée de $\{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1\} \subset L^p \subset (L^q)^*$ pour la topologie $\sigma((L^q)^*, L^q)$.

Comme $\{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \}$ est continue dans une boule de L^p, qui est faiblement compacte pour $\sigma(L^p, L^q)$ on a $\mu(A) \in L^p$.

Nous avons donc construit une application additive de $\mathcal{P}$ dans L^p, telle que pour tout $v \in L^q$ $< \mu, v >$ soit une mesure réelle vérifiant (4-1). En vertu du théorème de PETTIS sur σ additive faible et σ additive forte, cf. [2], μ est une mesure à valeurs de L^p, pour laquelle (4-1) est vraie.

Reste à prouver que $\forall\, I{\times}F \in \mathcal{R}$ on a :

$$\mu(I{\times}F) = 1_F\, \mu(I{\times}F)$$

Soit φ_n une suite croissante telle que $\varphi_n \uparrow 1_I$ $\varphi_n \in \mathcal{C}$

En raisonnant comme dans le lemme $(t,\omega) \rightsquigarrow 1_F(\omega)\varphi_n(t)$ est adapté à trajectoires continues à support compact, donc dans $\mathcal{C}$. On en déduit immédiatement :

$$\mu(I{\times}F) = \lim_n (L_p)\ \ell(1_F \cdot \varphi_n) = 1_F \lim_n (L_p) \int 1.\varphi_n d\mu = 1_F\, \mu(1{\times}\Omega).$$

III - MESURES STOCHASTIQUES PRODUITS

1 - Bases de champs aléatoires - Bases produits

Considérons 2 systèmes :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P, T_1, \mathcal{J}_1 (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}_1}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T_1}) \tag{1-1}$$

et :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P, T_2, \mathcal{J} (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}_2}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T_2}) \tag{1-2}$$

tel que définis en I-1 et avec les propriétés I-2

Posons $T = T_1 {\times} T_2$

$$\mathcal{J} = \{ I_1{\times}I_2 : I_1 \in \mathcal{J}, I_2 \in \mathcal{J}_2 \}$$

$$\mathcal{F}_{(t_1,t_2)} = \mathcal{F}_{t_1} \vee \mathcal{F}_{t_2}$$

$$\mathcal{F}_{I_1{\times}I_2} = \bigcap_{(t_1,t_2) \in I_1{\times}I_2} \mathcal{F}_{(t_1,t_2)}$$

Il est immédiat que $(\Omega, \mathcal{F}, P, T, \mathcal{J}, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}} (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ satisfait I-2

Enfin si t_1 est un point initial de I_1, t_2 un point initial de I_2

$$\mathcal{F}_{(t_1,t_2)} = \mathcal{F}_{t_1} \vee \mathcal{F}_{t_2} = \mathcal{F}_{I_1} \vee \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1{\times}I_2}$$

D'où (t_1,t_2) est un point initial de $I_1{\times}I_2$.

Si on appelle base de champ aléatoire un système $(\Omega, \mathcal{F}, P, T, \mathcal{J}, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ tel que défini en (I-1) et vérifiant les hypothèses de I-2 le système

$$\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, P, T_1{\times}T_2 = T\ (\mathcal{F}_{I_1{\times}I_2}), (\mathcal{F}_{t_1} \vee \mathcal{F}_{t_2}))$$

est appelé base produit des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ définies par (1-1) et (1-2) respectivement. On notera $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \underset{s}{\otimes} \mathcal{B}_2$

2 - Mesures stochastiques produits

Si μ_i $(i = 1,2)$ est une mesure stochastique d'ordre $p_i > 2$ définie sur la tribu $\mathcal{P}_1$ des prévisibles d'une base $\mathcal{B}_i$, on dit qu'une mesure stochastique μ d'ordre p avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ définie sur la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles de la base $\mathcal{B}_1 \underset{s}{\otimes} \mathcal{B}_2$ est la mesure stochastique produit de μ_1 et μ_2 si pour tout $I_1xF_1 \in \mathcal{R}_1$, $I_2xF_2 \in \mathcal{R}_2$ on a :

$$\mu(I_1xI_2 \times F_1 \cap F_2) = \mu_1(I_1xF_1) \cdot \mu_2(I_2xF_2) \in L^p \qquad (2\text{-}1)$$

Les rectangles prévisibles particuliers $I_1xI_2 \times (F_1 \cap F_2)$ engendrant clairement la tribu $\mathcal{P}$ (puisque les ensembles $F_1 \cap F_2$ engendrent $\mathcal{F}_{I_1} \vee \mathcal{F}_{I_2}$), si la mesure produit de μ_1 et μ_2 existe,elle est unique.

Théorème 2

*Si μ_1 et μ_2 sont 2 mesures stochastiques d'ordre p_1 et $p_2 > 2$ sur 2 bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ associées au même espace fondamental $(\Omega,\mathcal{F},P)$, et si μ_2 **est à variation bornée**, il existe une mesure stochastique produit unique μ de μ_1 et μ_2 sur $\mathcal{B}_1 \underset{s}{\otimes} \mathcal{B}_2$, d'ordre p avec $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$.*

Démonstration

Soit $v \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Les rectangles $I_1xF_1xI_2xF_2$ engendrant la tribu $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ dans $T_1x\Omega_1xT_2x\Omega_2$, il est facile de voir que l'application

$$I_1xF_1xI_2xF_2 \rightsquigarrow \langle \mu_1(I_1xF_1) \cdot \mu_2(I_2xF_2), v \rangle$$

se prolonge en une mesure réelle $\tilde{\mu}_v$ sur $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Mais si $F_1 \cap F_2 = \phi$ on a $\tilde{\mu}_v(I_1xF_1xI_2xF_2) = 0$. Si Δ est la diagonale de $\Omega x\Omega$, la mesure intérieure de $T_1xT_2x\complement\Delta$ pour μ_v est donc nulle. Si on identifie de façon naturelle $T_1xT_2x\Delta$ et $T_1xT_2x\Omega$, par l'application bijective $(t_1,t_2,(\omega,\omega)) \overset{\Psi}{\longleftrightarrow} (t_1,t_2,\omega)$, la trace de $I_1xI_2xF_1xF_2$ sur Δ s'identifie à $I_1xI_2xF_1 \cap F_2$, la tribu trace sur $T_1xT_2x\Delta$ de $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ s'identifie à la tribu des prévisibles $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, et par suite, l'image par Ψ de la mesure trace de $\tilde{\mu}_v$ est une mesure μ_v sur $\mathcal{P}$ prolongeant la fonction μ_v définie sur les rectangles $I_1xI_2xF_1 \cap F_2$ par :

$$\mu_v(I_1xI_2xF_1xF_2) = \langle \mu_1(I_1xF_1) \cdot \mu_2(I_2xF_2), v \rangle .$$

On achève la démonstration de l'existence de μ en considérant l'application $A \rightsquigarrow \mu(A)$ à valeurs dans $(L^q)^*$ (Dual algébrique de L^q) définie par $\langle \mu(A), v \rangle = \mu_v(A)$, et en utilisant la réflexivité de L^p comme dans la fin de la démonstration du théorème 1.

REFERENCES

[1] R.G. BARTLE A general bilinear vector Integral
Studia Math. 15 p. 337-352 (1956)

[2] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ Linear Operators Part I - Interference

[3] P.Y. GLORENNEC et J. PELLAUMAIL Ann. Inst. Id. Poincaré
Vol. X n° 3 (1974) p. 355-367

[4] M. METIVIER Mesures vectorielles et Intégrale stochastique.
Séminaire Rennes - Juin 1972

[5] J. PELLAUMAIL Sur l'Intégrale Stochastique et la décomposition de
Doob-Meyer. Asterisque 1973 n° 9.