JEAN LACROIX

E. LE PAGE

# Limites de quotients de fonctions harmoniques et espaces de Hardy associés à une marche aléatoire sur un groupe abélien

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 35-50
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A15_0>

# LIMITES DE QUOTIENTS DE FONCTIONS HARMONIQUES ET ESPACES DE HARDY ASSOCIES A UNE MARCHE ALEATOIRE SUR UN GROUPE ABELIEN

par J. LACROIX et E. LE PAGE


Sommaire.-

Nous nous proposons de prouver dans le cadre d'une marche aléatoire sur un groupe abélien des résultats analogues à ceux de la théorie classique des fonctions harmoniques dans le disque unité.

Dans la première partie de type probabiliste, nous démontrons un théorème de convergence des quotients de fonctions harmoniques le long des trajectoires du processus. Ce résultat était déjà établi par Neveu [3] dans le cas d'un groupe discret. Nous en déduisons par un argument de martingale une caractérisation des espaces de Hardy définis par majorante harmonique.

L'étude analytique de ces mêmes quotients fait l'objet de la seconde partie. Ce genre de résultat avait été obtenu par Doob, Snell et Williamson dans un cas très particulier de marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ [4] . Nous en déduirons une autre caractérisation des espaces de Hardy grâce aux propriétés du noyau de Poisson. Les travaux de Choquet-Deny [1] et Cartier, Azencott [2] constituent la base de cet exposé.


## Rappels et Notations.-

Soit $G$ un groupe L.C.D. abélien et $\sigma$ une probabilité transitoire sur $G$ telle que le plus petit semi-groupe fermé contenant son support soit égal à $G$ .

On dira qu'une fonction réelle $f$ définie sur $G$ appartient à $\mathcal{H}$ (on dira que $f$ est harmonique) si $f$ est localement intégrable pour la mesure de Haar $m$ de $G$ et $\hat{\sigma} * f = f$ $m$ presque partout (où $\hat{\sigma}$ désigne la mesure symétrique de $\sigma$). On note par $\mathcal{H}_c$ le sous-ensemble des fonctions continues de $\mathcal{H}$ et par $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}_c^+$ les cônes positifs. $\Gamma$ est l'ensemble des exponentielles sur $G$ (c'est-à-dire des homomorphismes continus de $G$ dans $(\mathbb{R}_*^+, \times)$) qui sont harmoniques. On note par $C_K^+$ les fonctions positives continues à support compact dans $G$ ; si $r \in C_K^+$, $\Gamma_r$ est la section du cone $\tilde{\Gamma}$ engendré par $\Gamma$, définie par $\int \tilde{\gamma}\, r\, dm = \langle \tilde{\gamma}, r \rangle_m = 1$ .

L'hypothèse faite sur le support de $\sigma$ implique que $\{\gamma m \mid \gamma \in \Gamma\}$ est relativement vaguement compact. Dans ce cas on peut énoncer le résultat principal de Choquet et Deny sous la forme suivante :

i) *Si* $h \in \mathcal{H}_c^+$ *il existe une mesure conique unique sur* $\tilde{\Gamma}$ *possédant des localisations uniques* $\mu$ *(resp.* $\mu_r$*) sur* $\Gamma$ *(resp.* $\Gamma_r$*) vérifiant*

$$h(x) = \int_\Gamma \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \quad \left(\text{resp } h(x) = \int_{\Gamma_r} \tilde{\gamma}(x)\, d\,\mu_r(\tilde{\gamma})\right)$$

ii) *L'application* $\nu \longrightarrow \int_\Gamma \gamma(x)\, d\nu(\gamma)$ *est une bijection entre les mesures finies sur* $\Gamma$ *et* $\mathcal{H}_c^+ - \mathcal{H}_c^+$

iii) *Si* $f \in \mathcal{H}^+$ *il existe* $f^*$ *dans* $\mathcal{H}_c^+$ *avec* $f = f^*$ $m$ *p.p.*

Dans toute la suite on fixe un élément $h$ de $\mathcal{H}_c^+$ non nul associé aux mesures $\mu$ et $\mu_r$ sur $\Gamma$ et $\Gamma_r$ . Si $Q$ est le noyau de transition défini par $Qf = \frac{1}{h}(\hat{\sigma} * fh)$, $\Pi^x$ (resp $\Pi^r$) désigne la probabilité sur $G^{\mathbb{N}}$ telle que les applications coordonnées $X_n$ de $G^{\mathbb{N}}$ dans $G$ forment une chaine de Markov de transition $Q$ et d'état initial $x$ (resp de loi initiale $hrm$ si $r \in C_K^+$ telle que $\langle h, r \rangle_m = 1$)

Une partie des résultats de Cartier Azencott peut alors s'énoncer de la façon suivante :

*Il existe une variable aléatoire stationnaire* $X_\infty$ *à valeurs dans* $\tilde{\Gamma}$ *dont la loi sous* $\Pi^r$ *est portée par* $\Gamma_r$ *et est égale à* $\mu_r$ .

Si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures sur $\Gamma$ on désigne par $D(\frac{\nu}{\mu})$ la densité de la partie absolument continue de $\nu$ par rapport à $\mu$ et enfin si $u$ est une fonction sur $\Gamma$ on définit $\tilde{u}$ sur $\tilde{\Gamma}$ par

$$\tilde{u}(\lambda\, x) = u(x) \quad \text{si} \quad \lambda > 0 \ .$$

<u>Théorème 1.</u>-

*Soit* $f \in \mathcal{H}_c^+$ *associée à* $\nu$ *sur* $\Gamma$ *et* $r \in C_K^+$ *avec* $\langle h, r\rangle_m = 1$ .

*Alors* :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(X_n)}{h(X_n)} = \widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty \qquad \Pi^r \ p.p.$$

(Ce théorème n'est pas démontré dans la théorie générale des chaines de Markov en raison de l'impossibilité d'obtenir une correspondance bijective entre fonctions harmoniques continues et mesures harmoniques dans le cas général).

La preuve résultera d'une suite de lemmes dans lesquels on a posé $f = f_1 + f_2$ où $f_1$ est la fonction associée à la partie absolument continue de $\nu$ par rapport à $\mu$ .

<u>Lemme a).</u>-

*Si on pose*

$$\varphi(x) = \Pi^x \left[ \widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty \right]$$

*Alors*

$$\varphi = \frac{f_1}{h} \quad m \ p.p.$$

<u>Preuve.</u>-

Soit $r \in C_K^+$ avec $\langle h,r\rangle_m = 1$

$$\langle \varphi h, r\rangle_m = \Pi^r[\widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty] = \int_{\Gamma_r} \widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} d\, \mu_r = \int_\Gamma D(\frac{\nu}{\mu})(\gamma) \ \langle \gamma, r\rangle_m \ d\mu(\gamma) = \langle f_1, r\rangle_m$$

<u>Lemme b).</u>-

*La suite* $\varphi(X_n)$ *converge* $\Pi^r$ *p.p. vers* $\widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty$

<u>Preuve.</u>-

L'invariance de $X_\infty$ et la propriété de Markov donnent :

$$\varphi \circ X_n = \Pi^r \left[ \widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty \mid \mathcal{F}_n \right]$$

où $\mathcal{F}_n$ est la tribu sur $G^{\mathbb{N}}$ engendrée par les $n$ premières coordonnées.

**Théorème 2.-**

*Soit $f$ appartenant à $H^1$ associée à la mesure finie $\nu$ sur $\Gamma$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes pour $p \in ]1 +\infty]$*

*i) $f \in H^p(h)$*

*ii) $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ et $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_p(\mu)$*

**Preuve.-**

ii) $\Longrightarrow$ i) est une conséquence de l'inégalité de Jensen (cette implication est encore vraie pour $p = 1$ mais se réduit à une trivialité).

i) $\Longrightarrow$ ii) Si $f \in H^p(h)$ $\frac{f}{h} \circ X_n$ est une $\Pi^r$ martingale bornée dans $L_p(\Pi^r)$ ; on en déduit d'après le théorème 1 que si $p > 1$,

$$\widetilde{D(\tfrac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty \in L_p(\Pi^r)$$

d'où pour $p \in ]1 +\infty[$

$$+\infty > \Pi^r \left[|\widetilde{D(\tfrac{\nu}{\mu})}|^p \circ X_\infty\right] = \int_\Gamma |D(\tfrac{\nu}{\mu})|^p(\gamma) \; \langle\gamma, r\rangle_m \, d\mu$$

or si l'on choisit $r \in C_K^+$ symétrique on a

$$\langle\gamma, r\rangle_m \geq \frac{1}{2} m(r) \quad \text{pour tout } \gamma \text{ de } \Gamma$$

on en déduit que $D(\frac{\nu}{\mu})$ est dans $L_p(\mu)$. Pour $p = +\infty$ on a évidemment le même résultat.

Il reste à montrer que $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ :

$$\Pi^r[\widetilde{D(\tfrac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty] = \Pi^r[\tfrac{f}{h}(X_o)]$$

d'après la convergence dans $L_1(\Pi^r)$ de la martingale $\frac{f}{h}(X_n)$ on en déduit avec les notations précédentes :

$$\langle f_1, r\rangle_m = \langle f, r\rangle_m \quad \text{pour tout } r$$

donc

$$f = f_1 .$$

Remarque : Une conséquence immédiate de ce théorème.

Si $\nu$ est une mesure finie sur $\Gamma$ définissant une fonction de $H^p$ alors $|\nu|$, $\nu^+$ et $\nu^-$ définissent aussi des fonctions de $H^p$. On en déduit que les espaces $H^p$ sont égaux à la différence de leurs cônes positifs (pour l'ordre ordinaire) et sont réticulés pour l'ordre induit par ces cônes positifs.

Lemme c).-

*La suite* $\frac{f_1(X_n)}{h(X_n)}$ *converge* $\Pi^r$ *p.p vers* $\widetilde{D(\frac{\nu}{\mu})} \circ X_\infty$

Preuve.-

Il suffit de prouver que

$$\Pi^r\left(\bigcup_{n\geq 0}\left(\frac{f_1}{h} - \varphi\right) \circ X_n \neq 0\right) = 0$$

Ceci résultera du fait que si $m(u) = 0$ alors :

$\Pi^r(u \circ X_n) = \langle Q^n(u), hr\rangle_m = \langle\hat{\sigma}^n * uh, r\rangle_m = \langle\sigma^n * r, uh\rangle_m = 0$ .

Lemme d).-

*La suite* $\frac{f_2(X_n)}{h(X_n)}$ *converge* $\Pi^r$ *p.p. vers* $0$ .

Preuve.-

On recopie la démonstration de Neveu [3] en écrivant :

$$\frac{f_2}{h} \wedge 1 = \frac{u}{h} + \frac{V}{h}$$

où $u \in \mathcal{H}^+$ avec $u = 0$ mpp et $V$ est un $\sigma$ potentiel.

$\frac{V}{h}$ étant un potentiel pour $Q$ , $\frac{V(X_n)}{h(X_n)}$ converge vers $0$ et $\frac{u(X_n)}{h(X_n)}$ est une $\Pi^r$ martingale bornée par 1 donc CV $\Pi^r$ p.p vers $0$ .

Le théorème 1 conduit à donner la définition suivante des espaces de Hardy :

Pour $p \in [1 \; +\infty[$ on définit $H^p(h)$ par :

$$H^p(h) = \{f \in \mathcal{H}_c \,/\, \exists\, u \in \mathcal{H}_c^+ \text{ avec } |\tfrac{f}{h}|^p \leq \tfrac{u}{h}\}$$

Pour $p = +\infty$

$$H^\infty(h) = \{f \in \mathcal{H}_c \,/\, |\tfrac{f}{h}| \text{ est bornée sur } G\}$$

On constate immédiatement que $H^1(h)$ est indépendant de $h$ et est égal à $\mathcal{H}_c^+ - \mathcal{H}_c^+$ .

Remarque : On ne peut se contenter de $h = 1$ pour définir des espaces $H^p$ car dans ce cas $H^p$ serait réduit aux constantes dès que $p > 1$ .

Pour l'étude du comportement analytique des quotients $\frac{f}{h}$ nous nous restreignons au cas $G = \mathbb{R}^d$, $(d \geq 2)$, le cas $G = \mathbb{R}^{d_1} \oplus Z^{d_2} \oplus K$ se traitant exactement de la même manière mais avec des notations plus encombrantes.

Posons

$$F(x) = \text{Log} \int e^{xy} \, d\,\sigma(y)$$

$F$ est strictement convexe s.c.i, et $\Gamma$ s'identifie à l'ensemble $\{F = 0\}$ qui n'est pas nécessairement fermé, c'est pourquoi nous ferons l'hypothèse supplémentaire : tout point de $\Gamma$ possède un voisinage dans lequel $F$ est finie. $\sigma$ étant transitoire il en résulte que sa moyenne est non nulle. Dans ces conditions $\Gamma$ est fermé dans $\mathbb{R}^d$ et est une variété de dimension $(d-1)$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait :

i) $\text{grad}\, F(\gamma) \neq 0$

ii) la forme quadratique $Q_\gamma$ définie par la matrice $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma)$ est définie positive.

Pour toutes ces questions on pourra consulter Hennequin [5].

Nous poserons $n(\gamma) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, F(\gamma)}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\, F(\gamma)\|}$ et pour $\lambda > 0$ on définit la base de voisinage $V_\lambda^\gamma$ de $\gamma$ dans $\Gamma$ par :

$$V_\lambda^\gamma = \{\beta \in \Gamma / n(\gamma)(\gamma - \beta) \leq \lambda\}$$

Définissons enfin le noyau de Poisson $P_\lambda(\alpha,\beta)$ pour $\lambda > 0$ et $\alpha,\beta \in \Gamma \times \Gamma$ par :

$$P_\lambda(\alpha,\beta) = \frac{1}{h(\lambda n(\alpha))} e^{\lambda n(\alpha).\beta}$$

Alors si $f \in H^1$ associée à $\nu$ sur $\Gamma$ on a :

$$\frac{f(\lambda n(\alpha))}{h(\lambda n(\alpha))} = \int_\Gamma P_\lambda(\alpha,\beta) \, d\,\nu(\beta) = P_\lambda\, \nu(\alpha) \, .$$

Remarquons que sauf dans le cas où $\Gamma$ est une sphère et $\mu$ la mesure de Lebesgue, $P_\lambda$ n'est pas symétrique en $\alpha$ et $\beta$, et que si l'on a toujours

$P_\lambda \mu(\alpha) \equiv 1$ , on n'a pas en général $\int_\Gamma P_\lambda(\alpha,\beta)\,d\mu(\alpha) \equiv 1$ (exemple : si $\mu = \varepsilon_{\alpha_0}$ $P_\lambda(\alpha_0,\beta) = e^{\lambda\, n(\alpha_0)(\beta-\alpha_0)}$ et comparer avec le lemme f).

Voici alors le théorème principal de ce chapitre :

<u>Théorème 3</u>.-

*Soit* $\nu$ *une mesure de Radon sur* $\Gamma$ . *Alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} P_\lambda \nu(\alpha) = D\left(\frac{\nu}{\mu}\right)(\alpha) \quad \mu.pp$$

Ce théorème se déduit immédiatement d'un théorème de dérivation si l'on remarque que :

$$P_\lambda\ \nu(\alpha) = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda u}\ \nu(V_u^\alpha)\,du}{\int_0^\infty e^{-\lambda u}\ \mu(V_u^\alpha)\,du}$$

et que si $\alpha$ est dans le support de $\mu$ alors dès que $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\nu(V_u^\alpha)}{\mu(V_u^\alpha)} = D\left(\frac{\nu}{\mu}\right)(\alpha)$ existe il en est de même de $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P_\lambda\, \nu(\alpha)$ et les limites sont égales.

Nous nous contenterons de dire brièvement comment l'on peut utiliser le théorème de dérivation de Morse [6] en donnant le lemme suivant dont la démonstration repose entièrement sur le fait que $Q_\gamma$ est définie positive et sur des calculs faciles à partir de la formule de Taylor appliquée à F :

<u>Lemme e)</u>.-

*Pour tout* $\alpha$ *de* $\Gamma$ *il existe des constantes* $\theta_1(\alpha)$ *et* $\theta_2(\alpha)$ *vérifiant* $0 < \theta_1(\alpha) \leq \theta_2(\alpha) < +\infty$ *et telles que*

*i)* $\exists\, \eta(\alpha) > 0$ *tel que si* $\lambda \in \left]0\ \eta(\alpha)\right]$ *on ait :*

$$\Gamma \cap B(\alpha, \theta_1(\alpha)\sqrt{\lambda}) \subset V_\lambda^\alpha \subset B(\alpha, \theta_2(\alpha)\sqrt{\lambda})$$

*ii)* $\exists\, \eta'(\alpha) > 0$ *tel que si* $\lambda \in \left]0\ \eta'(\alpha)\right]$ *on ait* { *en posant* $W_\lambda^\alpha = co\,(V_\lambda^\alpha,\ B(\alpha,\theta_1(\alpha)\sqrt{\lambda}))$ }

$$W_\lambda^\alpha \cap \Gamma = V_\lambda^\alpha$$

L'affirmation i) signifie que localement $\Gamma$ "est" un ellipsoïde ; $V_\lambda^\alpha$ ne contient aucune boule de centre $\alpha$ c'est pourquoi l'on introduit les ensembles $W_\lambda^\alpha$ dans ii).

Si A est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et si $x \in A$ on pose :

$$\delta(x,A) = \text{Inf } (r \;/\; B(x,r) \supset A)$$

$$\delta'(x,A) = \text{Sup } (r \;/\; B(x,r) \subset A) \; .$$

En utilisant la propriété i) du lemme e) on obtient :

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \frac{\delta(\alpha, W_\lambda^\alpha)}{\delta \;(\alpha, W_\lambda^\alpha)} \leq \overline{\lim_{\lambda \to 0}} \frac{\theta_2(\alpha)\sqrt{\lambda}}{\theta_1(\alpha)\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} < +\infty \; .$$

Il s'en suit d'après le théorème de Morse que les $(W_\lambda^\alpha)$ forment une couverture étoilée sur $\Gamma$ et par conséquent une base de Vitali pour toute mesure de Radon positive sur $\Gamma$.

La propriété ii) du lemme e) permet alors de conclure en constatant que si $\nu$ est portée par $\Gamma$ : $\nu(V_\lambda^\alpha) = \nu(W_\lambda^\alpha)$ pour $\lambda$ assez petit.

Remarques :

1) les preuves du lemme e) et du théorème 3 n'exigent pas que $\Gamma$ soit borné on peut donc supposer seulement que le groupe fermé engendré par le support de $\sigma$ est égal à $\sigma$ en conservant l'hypothèse supplémentaire du chapitre II car il nous suffit que F soit strictement convexe et différentiable au voisinage de chaque point de $\Gamma$.

2) on peut améliorer le théorème 3 en considérant des limites $\frac{f(x_n)}{n(x_n)}$ où $x_n$ est une suite de points de G qui converge non tangentiellement vers $\alpha \in \Gamma$ c'est-à-dire que $x_n = \lambda_n y_n$ avec $||y_n|| = 1$ et de plus

$$\begin{cases} \lim \lambda_n = +\infty \\ \lim ||y_n - n(\alpha)|| = 0 \\ \lambda_n ||y_n - n(\alpha)|| \text{ borné} \end{cases}$$

3) lorsque $\alpha$ décrit $\Gamma$, les vecteurs $n(\alpha)$ décrivent $S_{d-1}$ le théorème 3 affirme donc l'existence des limites de $\frac{f(x)}{h(x)}$ dans toute direction de $\mathbb{R}^d$ si $f \in H^1$.

Comme dans la partie I nous déduirons de ce théorème de convergence une caractérisation des espaces $H^p$ . Nous confondons $H^1$ et l'espace des mesures de Radon sur $\Gamma$ (ainsi nous dirons que $\nu \in H^p$ plutôt que $f \in H^p$).

Dans la théorie classique on caractérise les espaces $H^p$ par des conditions de la forme $\sup_{\lambda > 0} ||P_\lambda \nu||_{L_p(\mu)} < +\infty$ . Dans notre situation ceci est impossible pour $\mu$ quelconque. Par exemple si $\mu = \varepsilon_{\alpha_o}$ on aurait pour toute mesure $\nu$ :

$$||P_\lambda \nu||_{L_p(\varepsilon_{\alpha_o})} \leqslant \int e^{\lambda_n(\alpha_o)(\beta-\alpha_o)} \, d\,|\nu|(\beta) \leqslant |\nu|(\Gamma) \,.$$

Nous sommes donc conduits à introduire une classe particulière de mesures de référence $\mu$ , possédant des propriétés voisines de celles de la mesure de Lebesgue du cas classique.

__Définition__.-

*Nous dirons qu'une mesure positive* $\mu$ *sur* $\Gamma$ *est presque uniforme si :*

*i)* $\forall\, t \geqslant 1$ *il existe une constante* $K(t)$ *véfifiant :*

$$\mu(V^\alpha_{tu}) \leqslant K(t)\, \mu(V^\alpha_u) \qquad \forall\, \alpha \in \Gamma$$

*ii)* $\exists\, \delta > 0$ *et une constante* $c_o$ *tels que pour* $u \leqslant \delta$

$$\mu(V^\alpha_u) \leqslant c_o\, \mu(V^\beta_u) \qquad \forall\, \alpha,\beta \quad \text{tels que} \quad \beta \in V^\alpha_\delta$$

Par exemple la densité superficielle sur $\Gamma$ est presque uniforme ainsi qu'une mesure ayant une densité continue strictement positive par rapport à celle-ci.

Dans ces conditions après des majorations fastidieuses et une étude de plus précise des ensembles $V^\alpha_\lambda$ que dans le lemme e on peut prouver : (voir en annexe)

__Lemme f)__.-

*Si* $\mu$ *est presque uniforme il existe deux constantes* $c_1$ *et* $c_2$

V1 - 45

*telles que pour tout* $\beta$ *de* $\Gamma$ :

$$0 < c_1 \leqslant \int P_\lambda(\alpha,\beta)\, d\mu(\alpha) \leqslant c_2 < +\infty$$

Ce résultat permet alors de démontrer le théorème :

**Théorème 4.-**

*Si* $\mu$ *est presque uniforme et* $\nu$ *est une mesure sur* $\Gamma$ *on a l'équivalence pour* $p \in [1\ +\infty[$

*i)* $\nu \in H^p(h)$

*ii)* $\sup\limits_{\lambda>0} \| P_\lambda |\nu| \|_{L_p(\mu)} < +\infty$

**Preuve.-**

i) $\Longrightarrow$ ii) Si $\nu \in H^p(h)$ , il en est de même de $|\nu|$ par conséquent il existe $\theta$ mesure positive sur $\Gamma$ avec :

$$|P_\lambda|\nu||^p \leqslant P_\lambda\theta \ ;$$

en intégrant par rapport à $\mu$ on obtient :

$$\|P_\lambda|\nu|\|^p_{L_p(\mu)} \leqslant \int P_\lambda\ \theta(\alpha)\ d\mu(\alpha) \leqslant c_2\ \theta(\Gamma)$$

ii) $\Longrightarrow$ i) Il suffit de raisonner avec $p > 1$ car $\nu$ est toujours dans $H^1$ .

Le théorème 3 joint au lemme de Fatou montre que $D(\frac{|\nu|}{\mu})$ est dans $L_p(\mu)$ .

Il faut montrer que $|\nu|$ est absolument continue par rapport à $\mu$ ; pour ceci si $\zeta$ est la partie orthogonale de $|\nu|$ par rapport à $\mu$ , $\zeta$ vérifie :

$$\begin{cases} \lim P_\lambda\ \zeta(\alpha) = 0 \quad \mu\ p\ p \\ \sup\limits_\lambda \|P_\lambda\zeta\|_{L_p(\mu)} \leqslant \sup\limits_\lambda \|P_\lambda|\nu|\|_{L_p(\mu)} < +\infty \end{cases}$$

on en déduit que $P_\lambda\zeta$ converge vers 0 dans $L_1(\mu)$. Or

$$\int P_\lambda\ \zeta(\alpha)\ d\mu(\alpha) \geqslant c_1\ \zeta(\Gamma)$$

par conséquent $\zeta(\Gamma) = 0$ .

Le théorème 1 permet alors de conclure.

Remarque : la condition ii) du théorème 4 est-elle équivalente à :

$$\sup_{\lambda>0} \|P_\lambda\nu\|_{L_p(\mu)} < +\infty \quad ?$$

## ANNEXE

Pour prouver le lemme f) nous commençons par améliorer le lemme e) qui ne faisait pas intervenir la compacité de $\Gamma$.

*Il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que pour tout $\alpha$ de $\Gamma$ et tout $\lambda > 0$ on ait :*

$$B(\alpha, a\sqrt{\lambda}) \cap \Gamma \subset V_\lambda^\alpha \subset B(\alpha, b\,\lambda) \cap \Gamma$$

*(on a bien sûr $0 < a \leqslant b < +\infty$).*

De ce résultat facile on déduit les conséquences suivantes :

*i)* *Il existe une constante $k_1$ telle que pour $\beta \in V_u^\alpha$ et $v \geqslant u$ on ait $V_v^\alpha \subset V_{k_1 v}^\beta$*
*(on peut prendre $k_1 = \frac{4b^2}{a^2}$ en utilisant le résultat ci-dessus).*

*ii)* *Si l'on pose $U_u^\beta = \{\alpha \,/\, \beta \in V_u^\alpha\}$ il existe des constantes $k_2$ et $k_3$ telles que :*

$$V_{k_2 u}^\beta \subset U_u^\beta \quad et \quad U_u^\beta \subset V_{k_3 u}^\beta$$

*(on peut prendre $k_2 = \frac{a^2}{b^2}$ et $k_3 = \frac{b^2}{a^2}$).*

Remarquons enfin que si $\mu$ est presque uniforme, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\inf\limits_{\alpha\in\Gamma} \mu(V_\varepsilon^\alpha) > 0$ car si $\Delta$ est le diamètre de $\Gamma$ on a

$$\mu(V_\varepsilon^\alpha) \geqslant \frac{\mu(\Gamma)}{K(\frac{\Delta}{\varepsilon})}$$

Nous poserons alors :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda v}\, \mu(V_v^\alpha)\,dv$$

$$J(u,\beta) = \int_{U_u^\beta} [I(\alpha)]^{-1}\, d\mu(\alpha)$$

Avec ces notations

$$\int_\Gamma P_\lambda(\alpha,\beta)\, d\mu(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u}\, J(u,\beta)\,du .$$

Nous utiliserons dans la suite d'inégalités ci-dessous les notations $K$, $c_o$, $\delta$ introduites dans la définition d'une mesure presque uniforme.

① *Pour* $u \leq \delta$ *et* $\alpha \in U_u^\beta$ *on a :*

$$I(\alpha) \leq A\, I(\beta) \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

Preuve.-

$$I(\alpha) = \int_0^u e^{-\lambda v} \mu(V_v^\alpha)\,dv + \int_u^{+\infty} e^{-\lambda v} \mu(V_v^\alpha)\,dv$$

$$\leq c_o \int_0^u e^{-\lambda v} \mu(V_v^\beta)\,dv + \int_u^{+\infty} e^{-\lambda v} \mu(V_{k_1 v}^\beta)\,dv$$

$$\leq c_o \int_0^u e^{-\lambda v} \mu(V_v^\beta)\,dv + K(k_1) \int_u^{+\infty} e^{-\lambda v} \mu(V_v^\beta)\,dv$$

on prend $A = \mathrm{Sup}(c_o, K(k_1))$ .

② *Pour* $u \leq \delta$ *on a*

$$J(u,\beta) \geq B \frac{\mu(V_u^\beta)}{I(\beta)} \quad \text{où } B \text{ est une constante.}$$

Il suffit en utilisant 1 de remarquer que :

$$\mu(U_u^\beta) \geq \mu(V_{k_2 u}^\beta) \geq \frac{1}{K(\frac{1}{k_2})} \mu(V_u^\beta)$$

③ *Il existe une constante* $c_1$ *avec*

$$\int_0^{+\infty} J(u,\beta)\, e^{-\lambda u}\, du \geq c_1$$

Preuve.

D'après ② on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} J(u,\beta)\,du \geq B \frac{\int_0^\delta e^{-\lambda u} \mu(V_u^\beta)\,du}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mu(V_u^\beta)\,du} = B\frac{H(\delta)}{H(+\infty)}$$

or
$$\frac{H(\infty)}{H(\delta)} = 1 + \frac{\int_\delta^{+\infty} e^{-\lambda u} \mu(V_u^\beta)\,du}{H(\delta)}$$

de plus en supposant que $\mu$ est une probabilité :

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\lambda u} \mu(V_u^\beta)\,du \leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\delta}$$

$$\int_0^{\delta} e^{-\lambda u}\,\mu(V_u^{\beta})\,du \geqslant \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} e^{-\lambda u}\,\mu(V_u^{\beta})\,du \geqslant \frac{1}{\lambda}\,\mu(V_{\frac{\delta}{2}}^{\beta})\,e^{-\lambda\delta}\,[e^{\lambda\frac{\delta}{2}}-1]$$

Par conséquent :

$$\frac{H(\infty)}{H(\delta)} \leqslant 1 + K(\tfrac{2\Delta}{\delta}) \times \frac{1}{[e^{\lambda\frac{\delta}{2}}-1]}$$

Ceci donne le résultat si $\lambda \geqslant \lambda_o > 0$ ; mais l'intégrale proposée est continue en $\lambda$ et vaut 1 pour $\lambda = 0$ d'où la conclusion.

4. *Pour* $u \leqslant \frac{\delta}{k_3}$ $\quad J(u,\beta) \leqslant A' \dfrac{\mu(V_u^{\beta})}{\int_o^{\frac{\delta}{k_3}} e^{-\lambda v}\,\mu(V_v^{\beta})\,dv}$

Preuve.-

Dans ce cas si $\alpha \in U_u^{\beta}$ alors $\beta \in U_{k_3u}^{\alpha} \subset U_{\delta}^{\alpha}$ , donc $\alpha \in V_{\delta}^{\beta}$ .

On en déduit que

$$I(\alpha) \geqslant \int_o^{\frac{\delta}{k_3}} e^{-\lambda v}\,\mu(V_v^{\alpha})\,dv \geqslant \frac{1}{c_o}\int_o^{\frac{\delta}{k_3}} e^{-\lambda v}\,\mu(V_v^{\beta})\,dv$$

d'autre part :

$$\mu(U_u^{\beta}) \leqslant \mu(V_{k_3u}^{\beta}) \leqslant K(k_3)\,\mu(V_u^{\beta})$$

5. *Pour tout* $u$ *on a la majoration :*

$$J(u,\beta) \leqslant B'\lambda\, e^{\lambda\frac{\delta}{2k_3}} \quad \textit{où } B' \textit{ est une constante.}$$

Preuve.-

$$J(u,\beta) \leqslant \int_{\Gamma} \frac{d\mu(\alpha)}{I(\alpha)}$$

or $$I(\alpha) \geqslant \mu(V^{\alpha}_{\frac{\delta}{2k_3}})\,\frac{e^{-\lambda\frac{\delta}{2k_3}}}{\lambda} \geqslant \frac{1}{K(\frac{2k_3\Delta}{\delta})} \cdot \frac{e^{-\lambda\frac{\delta}{2k_3}}}{\lambda}$$

6. *Il existe une constante* $c_2$ *telle que*

$$\int_o^{+\infty} e^{-\lambda u}\,J(u,\beta)\,du \leqslant c_2$$

Preuve.-

En utilisant les majorations ④ et ⑤ on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u}\, J(u,\beta)\,du \leqslant A' + B'\, e^{+\frac{\lambda\ \delta}{2k_3}} \int_{\frac{\delta}{k_3}}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda u}\, du$$

$$= A' + B'\, e^{\frac{\lambda\ \delta}{2k_3}} \leqslant A' + B'$$

cqfd.

## REFERENCES

[1] G. CHOQUET et J. DENY. *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$ . C.R. Acad. Sci. Paris, série A, vol. 250 (1960), 799-801

[2] R. AZENCOTT et P. CARTIER. *Martin boundaries of random walks on locally compact groups*. 6th Berkeley Sympos. Proc. Math. Statist. Probab. 3, Univ. Calif. Press, (1972), 87-123

[3] J. NEVEU. *Chaînes de Markov et théorie du potentiel*. Ann. Univ. Clermont, vol. 24, (1964), 37-89

[4] J.L. DOOB, J.L. SNELL et R. WILLIAMSON. *Applications of boundary theory to sums of independant random variables*. Contributions to Proba. and Stat., Stanford Univ. Press, (1960), 182-197

[5] P. HENNEQUIN. *Processus de Markov en cascade*. Ann. Inst. H. Poincaré sect. B, vol. 19, (1963), 109-196

[6] MORSE. *Perfect Blankets*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 61, (1947), 418-442

[7] P. NEY et F. SPITZER. *The Martin boundary for random walks*. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 121, (1966), 116-132