Publications mathématiques et informatiques de Rennes

H. Hennion

Théorème central limite et théorème central limite fonctionnel sur un groupe de Lie nilpotent

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 20-34
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A14_0>

$$(S'') \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\ (G_n))} = +\infty$$

. Dans les hypothèses de (S"), sans que la condition (A) soit vé ifiée, (6) donne, pour n assez grand

$$\int_{\Gamma_n - \Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) \leqslant \frac{\alpha_{n+1}^{-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}} \frac{1}{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_{k-1}))}$$

une condition nécessaire de récurrence est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} = +\infty$$

(S") est donc alors une condition nécessaire et suffisante de récurrence.

REFERENCES

1. SPITZER F. and KESTEN H. *Random walk on countable infinite abelian groups*. Acta Math. 5(1963), 237-264
2. FLATTO L. and PITT J. *Recurrence criteria for random walks on countable abelian groups*.Illinois J. of Maths 18 (1974), 1-19
3. HEWITT E. and ROSS K. *Abstract Harmonic Analysis*. Springer-Verlag vol. 1 (Berlin)

THEOREME CENTRAL LIMITE ET THEOREME CENTRAL LIMITE FONCTIONNEL SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

par H. HENNION

Le but de ce travail est de donner des démonstrations complètes des théorèmes limites obtenus par V.N. Tutubalin [1] , puis de prolonger l'un d'eux en un théorème central limite fonctionnel. Il n'a pas été possible jusqu'ici d'en déduire des lois limites explicites pour les marches aléatoires par application du principe d'invariance.

Hypothèses générales et notations.-

1. G est le groupe de Lie nilpotent de classe 1 obtenu en munissant $\mathbb{R}^3$ du produit

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z'+\tfrac{1}{2}(xy'-yx'))$$

2. On considère sur G la distance invariante par translation à gauche (induisant la topologie initiale) définie par

$$\sigma,\rho \in G \qquad d(\sigma,p) = q(\sigma^{-1}\rho)$$

où

$$q(\tau) = \sup\{|x|,|y|,|z|^{1/2}\} \qquad \text{si } \tau = (x,y,z) .$$

3. Les éléments aléatoires $(U_n,V_n,W_n)_n$ désignent les accroissements successifs d'une marche aléatoire droite issue de $e = (0,0,0)$, la position à l'instant n de cette marche est

$$(X_n,Y_n,Z_n) = (U_1,V_1,W_1)\ldots(U_n,V_n,W_n)$$

avec

$$X_n = U_1 + \ldots + U_n$$
$$Y_n = V_1 + \ldots + V_n$$
$$Z_n = W_1 + \ldots + W_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}V_i - Y_{i-1}U_i)$$

4. On se propose d'étudier des convergences en loi sous les hypothèses :

- la marche aléatoire n'est pas portée par un sous-groupe abélien de G
- $E[U_1^2]<+\infty$, $E[V_1^2]<+\infty$, $E[|W_1|]<+\infty$

5. On pose

$$E[U_1]=m_1 \quad , \quad E[V_1]=m_2 \quad , \quad E[W_1]=m_3$$
$$\sigma^2(U_1) = \sigma_1^2 \ , \ C(U_1,V_1) = \sigma_{12} \ , \ \sigma^2(V_1) = \sigma_2^2$$

La première condition ci-dessus, qui équivaut à la non proportionnalité des variables U_1 et V_1 , se traduit alors par :

$$\sigma_1^2 . \sigma_2^2 > \sigma_{12}^2 \qquad \text{dans le cas } m_1 = m_2 = 0$$
$$m_2^2 \sigma_1^2 - 2m_1 m_2 \sigma_{12} + m_1^2 \sigma_2^2 > 0 \qquad \text{dans le cas } m_1 \text{ ou } m_2 \neq 0$$

6. Nous utiliserons à plusieurs reprises l'inégalité de Tchevitchev : Si U,V ont des moments d'ordre p et W a un moment d'ordre p/2 , pour tout $\lambda > 0$

$$P[q(U,V,W)\geq\lambda] \leqslant \frac{3^p}{\lambda^p} \{E[|U|^p] + E[|V|^p] + E[|W|^{p/2}]\}$$

7. Enfin un calcul facile montre que : si $m_1 = m_2 = o$

$$\sigma^2(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} W_{i-1}V_i - Y_{i-1}U_i) = \frac{(n-2)(n-1)}{4} (\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)$$

I. THEOREME CENTRAL LIMITE -

Le calcul de la variance $\sigma^2(Z_n)$ montre que celle-ci est un infiniment grand d'ordre n^3 , si m_1 ou $m_2 \neq 0$, d'ordre n^2 , si $m_1 = m_2 = 0$. Ces deux situations donnent lieu à des études distinctes : dans le second cas, à la différence du premier, la normalisation nécessaire à assurer la convergence sera obtenue en appliquant un automorphisme de G .

I.1. Le cas où m_1 ou $m_2 \neq 0$

Théorème 1.-

Si m_1 ou $m_2 \neq 0$, l'élément aléatoire

$$(\frac{X_n - n\ m_1}{\sqrt{n}} , \frac{Y_n - n\ m_2}{\sqrt{n}} , \frac{Z_n}{n\sqrt{n}})$$

converge vers une loi gaussienne centrée de $\mathbb{R}^3$ de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \sigma_3^2 = \frac{5}{12} (m_2^2\sigma_1^2 - 2m_1m_2\sigma_{12} + m_1^2\sigma_2^2)$$

On remarque que la loi limite est indépendante des caractéristiques de la loi de W_1 .

Démonstration.- Posons

$$U_i' = U_i - m_1 \ , \ V_i' = V_i - m_2 \ , \ X_n' = \sum_{i=1}^{n} U_i' \text{ et } Y_n' = \sum_{i=1}^{n} V_i'$$

il vient

$$2\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} W_i + \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}'V_i' - Y_{i-1}'U_i') + (m_2X_n' + m_1Y_n') + \sum_{i=1}^{n} (n-2i)(m_2U_i' - m_1V_i') .$$

Les trois premiers termes ont des variances d'ordre n , n^2 et n respectivement, divisés par $n^{3/2}$ ils convergent donc vers 0 en probabilité, par suite, il nous suffit de déterminer la loi limite du vecteur aléatoire

$$(\frac{X_n'}{\sqrt{n}} , \frac{Y_n'}{\sqrt{n}} , \frac{Z_n'}{\sqrt{n}})$$

avec
$$Z_n' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n-2_i)(m_2\ U_i' - m_1\ V_i')$$

et nous sommes ramenés à l'étude d'une somme de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Si φ est la fonction caractéristique du couple (U_1',V_1') la fonction caractéristique φ_n de $(\frac{X_n'}{n} , \frac{Y_n'}{n} , \frac{Z_n'}{n\sqrt{n}})$ s'écrit :

$$\varphi_n(x,y,z) = \prod_{k=1}^{n} E[\exp i\{x\frac{U_1'}{n} + y\frac{V_1'}{n} + \frac{n-2k}{2n^{3/2}} z(m_2U_1' - m_1V_1')\}]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \varphi(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{n-2k}{2n^{3/2}} m_2 z , \frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{n'-2k}{2n^{3/2}} m_2 z) .$$

Pour u et v suffisamment proches de 0

$$\operatorname{Log} \varphi(u,v) = -\frac{1}{2} (\sigma_1^2u^2 + 2\sigma_{12}uv + \sigma_2^2 v^2) + \mathcal{O}(u^2+v^2) ,$$

par suite (x,y,z) étant fixé, pour n suffisamment grand et en posant

$$f(t) = x + \frac{m_2}{2} z(1-2t) , g(t) = y - \frac{m_1}{2} z(1-2t)$$

on a :

$$\operatorname{Log} \varphi_n(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} \varphi (\frac{1}{\sqrt{n}} f(\frac{k}{n}), \frac{1}{\sqrt{n}} g(\frac{k}{n}))$$

$$= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (\sigma_1^2f^2(\frac{k}{n}) +2\sigma_{12} f(\frac{k}{n})g(\frac{k}{n})+\sigma_2^2g^2(\frac{k}{n}))+R_n(x,y,z) .$$

Il est clair que le premier terme converge vers

$$-\frac{1}{2} \{\sigma_1^2 \int_0^1 f^2(t)dt + 2 \sigma_{12} \int_0^1 f(t) g(t)dt + \sigma_2^2 \int_0^1 g^2(t)dt\}$$

$$= -\frac{1}{2} \{\sigma_1^2(x^2+\frac{5m_2^2}{12} z^2) + 2 \sigma_{12}(x y-\frac{5m_1m_2}{12} z^2) + \sigma_2^2(y^2+\frac{5m_1^2}{12} z^2)\} ,$$

tandis que $R_n(x,y,z)$ est majorée par un multiple de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{3/2}} (f^2(\frac{k}{n})+g^2(\frac{k}{n}))$$

qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. La preuve est achevée ■

I.2. <u>Le cas où $m_1 = m_2 = 0$</u>

Le point important est ici la normalisation par les automorphismes $Q_{1/n}$ de G définis par

$$Q_{1/n} (x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{n}} , \frac{y}{\sqrt{n}} , \frac{z}{n})$$

<u>Théorème 2</u>.-

Si $m_1 = m_2 = 0$, l'élément aléatoire $(\frac{X_n}{\sqrt{n}} , \frac{Y_n}{\sqrt{n}} , \frac{Z_n}{n})$ converge vers la probabilité μ_1 du semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t>0}$ sur G , dont le générateur infinitésimal est défini sur $\mathcal{C}_0^2$ (espace des fonctions deux fois continument

différentiables, tendant vers 0 à l'infini) par

$$A = \frac{1}{2} [\sigma_1^2 \mathcal{X}^2 + \sigma_{12}(\mathcal{X}\mathcal{Y}+\mathcal{Y}\mathcal{X}) + \sigma_2^2 \mathcal{Y}^2] + m_3 \mathcal{Z}$$

où $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ sont les champs de vecteurs invariant à gauche associés aux sous-groupes à un paramètre $\{(t,0,0);t\in\mathbb{R}\}$, $\{(0,t,0);t\in\mathbb{R}\}$, $\{(0,0,t);t\in\mathbb{R}\}$.

Différons quelques instants la preuve de ce théorème pour quelques remarques sur la loi limite.

Le résultat suivant est rendu vraisemblable par le théorème central limite et la loi des grands nombres.

<u>Proposition 1</u>.-

La diffusion associée au semi-groupe $(\mu_t)_{t>0}$ est définie par $\beta_t = (X_t,Y_t,Z_t)$

où (X_t,Y_t) est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$ de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

et $$Z_t = m_3t + \frac{1}{2} (\int_0^t X_s\, d Y_s- \int_0^t Y_s\, d X_s)$$

<u>Démonstration de la proposition 1</u>.- (β_t) est continu, à accroissements (gauche) indépendants et stationnaires, son générateur infinitésimal est invariant à gauche et d'après [2] pour prouver que la loi de (β_t) est définie par le semi-groupe (μ_t), il suffit de montrer que pour $f\in\mathcal{C}_0^2$, $\frac{1}{t} \{E[f(\beta_t)]-f(e)\}$ converge vers $Af(e)$ lorsque t tend vers 0 .

D'après la formule de Ito ,

$$E[f(\beta_t)]-f(e)=m_3E[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(\beta_s)ds]$$
$$+\frac{1}{2} E \{\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial x^2}(\beta_s)d\langle X_s,X_s\rangle+2\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}(\beta_s)d\langle X_s,Y_s\rangle+\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial y^2}(\beta_s)d\langle Y_s,Y_s\rangle$$
$$+\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial z^2}(\beta_s)d\langle Z_s,Z_s\rangle+2\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}(\beta_s)d\langle X_s,Z_s\rangle+2\int_0^t\frac{\partial^2f}{\partial y\partial z}(\beta_s)d\langle Y_s,Z_s\rangle\}$$

or $\langle X_t,X_t\rangle = \sigma_1^2 t$, $\langle Y_t,Y_t\rangle = \sigma_2^2 t$, $\langle X_t,Y_t\rangle = \sigma_{12} t$

et l'on calcule d'après les formules habituelles

$$\langle Z_t,Z_t\rangle = \frac{1}{4}\left[\sigma_2^2 \int_0^t X_s^2\,ds + \sigma_1^2 \int_0^t Y_s^2\,ds - 2\,\sigma_{12}\int_0^t X_sY_s\,ds\right]$$

$$\langle Z_t,Y_t\rangle = \frac{1}{2}\left[\sigma_{12}\int_0^t X_s\,ds - \sigma_1^2\int_0^t Y_s\,ds\right]$$

$$\langle Z_t,Y_t\rangle = \frac{1}{2}\left[\sigma_2^2 \int_0^t X_s\,ds - \sigma_{12}\int_0^t Y_s\,ds\right] .$$

Divisant par t et passant à la limite en utilisant la convergence dominée, il vient

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{E[f(\beta_t)]-f(e)\}=\frac{1}{2}\{\sigma_1^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e)+2\sigma_{12}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e)+\sigma_2^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e)\}+m_3\,\frac{\partial f}{\partial z}(e)=Af(e)\ \blacksquare$$

<u>Proposition 2</u>.-

Le semi-groupe $(\mu_t)_{t>0}$ *est stable.*

Plus précisément soit Q_h *l'automorphisme de* G *défini par*

$$Q_h(x,y,z) = (\sqrt{h}\,x,\ \sqrt{h}\,y\ ,\ hz)$$

pour tout t *et* $h>0$

$$\mu_{th} = Q_h(\mu_t)$$

<u>Démonstration de la proposition 2</u>.- Les générateurs infinitésimaux des semi-groupes $(\mu_{th})_{t\geq 0}$ et $(Q_h(\mu_t))_{t\geq 0}$ valent sur $f\in\mathcal{C}_0^2$

$$h\,Af \quad \text{et} \quad A(f\circ Q_h)\circ Q_h^{-1}$$

Ces semi-groupes coincident [2] si pour tout $f\in\mathcal{C}_0^2$

$$h\,Af = A(f\circ Q_h)\circ Q_h^{-1}$$

Cette relation est aisément vérifiée. ■

<u>Démonstration du théorème 2</u>.-

A.- <u>Cas où U_1, V_1 et W_1 ont des moments d'ordre 4</u>

Posons $\Delta_n^k = \left(\frac{U_k}{\sqrt{n}},\frac{V_k}{\sqrt{n}},\frac{W_k}{n}\right)$, $\Pi_n = \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}},\frac{Y_n}{\sqrt{n}},\frac{Z_n}{n}\right)$,

pour $\sigma\in G$ et $f\in\mathcal{C}_0$ ($\mathcal{C}_0$ est l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini)

$$S_nf(\sigma) = E[f(\sigma\Delta_n^1)]\ ,\ T_tf(\sigma) = \int f(\sigma.\tau)\mu_t(d\tau)$$

Puisque $Q_{1/\sqrt{n}}$ est un automorphisme de G , l'on a

$$\Pi_n = \Delta_n^1\ldots\Delta_n^n \quad \text{et} \quad S_n^nf(\sigma) = E[f(\sigma.\Pi_n)]$$

et la convergence en loi de $(\Pi_n)_n$ vers μ_1 équivaut à :

pour tout $f\in\mathcal{C}_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n^nf-T_1f\| = 0$ où $\|f\| = \sup\limits_{\sigma\in G}|f(\sigma)|$.

Par un corollaire du théorème de Trotter-Kato [3] (théorème 2.13) ce résultat sera obtenu si

$$n(S_n-I)f \quad \text{converge vers} \quad Af$$

pour tout $f\in\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{C}_0$, tel qu'il existe un $\lambda_0>0$ avec $(\lambda_0 I-A)\mathcal{F}$ dense dans $\mathcal{C}_0$; d'après [2] ces conditions sont réalisées si $\mathcal{F} = \mathcal{C}K^\infty$ (espace des fonctions à support compact indéfiniment différentiables sur G).

Le reste de la démonstration est consacrée à la preuve de la convergence de $n(S_nf-f)$ vers Af pour $f\in\mathcal{C}K^\infty$.

Pour $\sigma,\tau\in G$ on pose $f_\sigma(\tau) = f(\sigma.\tau)$, et Δ_n désigne Δ_n^1 .

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne :

$$f_\sigma(\Delta_n) = f(e) + \frac{U}{\sqrt{n}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x}(e) + \frac{V}{\sqrt{n}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial y}(e) + \frac{W}{n}\frac{\partial f_\sigma}{\partial z}(e)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{U^2}{n}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(e) + 2\frac{UV}{n}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x\partial y}(e) + \frac{V^2}{n}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial y^2}(e)\right] + \frac{1}{2n}R_n(\sigma)$$

où

$$R_n(\sigma) = U^2\left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(\Delta_n')-\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(e)\right] + 2U.V\left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x\partial y}(\Delta_n')-\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x\partial y}(e)\right] + V^2\left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial y^2}(\Delta_n')-\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial y^2}(e)\right]$$
$$+ \frac{W^2}{n}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial z^2}(\Delta_n') + 2\,\frac{U.V}{\sqrt{n}}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x\partial z}(\Delta_n') + 2\,\frac{VW}{\sqrt{n}}\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial y\partial z}(\Delta_n')$$

$\Delta_n' = \theta_n.\Delta_n$, θ_n est une variable aléatoire réelle, $0<\theta_n<1$.

Compte-tenu des centrages, on a

$$n[S_nf(\sigma)-f(e)] = n[E[f_\sigma(\Delta_n)]-f(e)] = Af(\sigma) + \frac{1}{2}\,E[R_n(\sigma)] .$$

Nous devons prouver que $E[R_n(\sigma)]$ tend vers 0 uniformément en σ ; nous prouverons seulement :

Lemme 1.-

Si $f \in \mathcal{C}K^\infty$ $E[U^2(\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(\Delta_n') - \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(e))]$ *converge uniformément vers 0 .*

Démonstration du lemme.- Si $\sigma = (x,y,z)$

$$\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(\tau) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sigma.\tau) - y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\sigma.\tau) + \frac{y^2}{4}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\sigma.\tau)$$

et

$$E[U^2(\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(\Delta_n') - \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x^2}(e))]$$

s'écrit naturellement comme somme de trois différences, nous prouvons seulement que la dernière $\frac{1}{4}\,E[U^2(y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\sigma.\Delta_n') - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\sigma))]$ converge uniformément vers 0 .

Avec $V_n' = \Theta_n.V$ et en posant $g = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ on écrit :

$$E[U^2(y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\sigma\Delta_n') - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\sigma))]$$

$$= E[U^2\{(y+\frac{V_n'}{\sqrt{n}})^2 g(\sigma\Delta_n') - y^2 g(\sigma)\}] - 2E[U^2.\frac{V_n'}{\sqrt{n}}(y+\frac{V_n'}{\sqrt{n}})g(\sigma\Delta_n')] + E[U^2(\frac{V_n'}{\sqrt{n}})^2 g(\sigma\Delta_n')]$$

$$= I_1(n,\sigma) + I_2(n,\sigma) + I_3(n,\sigma)\ .$$

L'existence de moment d'ordre 4 et le fait que y est à support compact impliquent

$$I_3(n,\sigma) \leqslant \frac{1}{n}\,E[U^2V^2]\ .\ \sup_\sigma |g(\sigma)|$$
$$I_2(n,\sigma) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\,E[U^2|V|].\ \sup_\sigma |y\ g(\sigma)|$$

donc $I_3(n,\sigma)$ et $I_2(n,\sigma)$ convergent uniformément vers 0 .

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons η tel que

$\sigma = (x,y,z)$, $\sigma' = (x,y,z)$ et $d(\sigma,\sigma') \leqslant \eta$ impliquent $|y^2 g(\sigma) - y'^2 g(\sigma')| < \varepsilon$

$$I_3(n,\sigma) \leqslant \varepsilon.E[U^2; q(\Delta_n) \leqslant \eta\ ] + 2\sup_\sigma |y^2 g(\sigma)|.\ E[U^2; q(\Delta_n) > \eta]$$
$$\leqslant \varepsilon\ E[U^2] + 2\sup_\sigma |y^2 g(\sigma)|.E[(q(U,V,W))^2; q(U,V,W) > \eta\sqrt{n}\ ]\ ,$$

d'où il résulte que $I_3(n,\sigma)$ converge uniformément vers 0 .

Le théorème est donc démontré sous l'hypothèse d'existence de moment d'ordre 4 pour U, V, W .

B.- Extension au cas où U et V n'ont que des moments d'ordre 2 et W un moment d'ordre 1

Considérons les variables aléatoires bornées U_n^c , V_n^c, W_n^c obtenues par troncation à partir de U_n, V_n et W_n de façon que $E[U_n^c] = E[V_n^c] = 0$ et convergeant p.s. vers U_n, V_n et W_n respectivement lorsque $c \to +\infty$

D'après A , $\Pi_n^c = (\frac{X_n^c}{\sqrt{n}}, \frac{Y_n^c}{\sqrt{n}}, \frac{Z_n^c}{n})$ converge vers μ_1^c ($(\mu_t^c)_{t>0}$ est le semi-groupe correspondant aux coefficients $\sigma^2(U_n^c)$, $C(U_n^c,V_n^c)$, $\sigma^2(V_n^c)$ et $E(W_n^c)$ dans le générateur infinitésimal de l'énoncé) et, d'après le théorème de Trotter-Kato, μ_1^c converge faiblement vers μ_1 lorsque $c \to +\infty$

Soit $||.||$ la norme euclidienne de R^3 , puisque la topologie qu'elle définie est identique à celle associée à d , il suffit [4] (théorème 4.2), pour établir la convergence de Π_n vers μ_1 , de prouver que

$$\lim_{c\to+\infty}\ \limsup_n\ P[||\Pi_n^c - \Pi_n|| > \varepsilon] = 0$$

qui résultera de

$$\lim_{c\to+\infty}\ \limsup_n\ \{\sigma^2(\frac{X_n - X_n^c}{\sqrt{n}}) + \sigma^2(\frac{Y_n - Y_n^c}{\sqrt{n}}) + E[|\frac{Z_n - Z_n^c}{n}|]\} = 0\ .$$

Or $\sigma^2(\frac{X_n - X_n^c}{n}) = \sigma^2(U - U^c)$ et $\sigma^2(\frac{Y_n - Y_n^c}{n}) = \sigma^2(V - V^c)$,

tandis que

$$Z_n - Z_n^c = \sum_{i=1}^n (W_i - W_i^c) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_{i-1}V_i - Y_{i-1}U_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_{i-1}^c V_i^c - Y_{i-1}^c U_i^c)$$

$$= \sum_{i=1}^n (W_i - W_i^c) + \frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^n (X_{i-1} - X_{i-1}^c)V_i - \sum_{i=1}^n (Y_{i-1} - Y_{i-1}^c)U_i$$
$$+ \sum_{i=1}^n X_{i-1}^c (V_i - V_i^c) - \sum_{i=1}^n Y_{i-1}^c (U_i - U_i^c)\}$$

implique

$$E[|Z_n - Z_n^c|] \leqslant n\ E[|W - W^c|] + \frac{1}{2}(\frac{(n-1)(n-2)}{2}^{1/2})\{\sigma(U-U^c)\sigma(V) + \sigma(V-V^c)\sigma(U)$$
$$+ \sigma(U^c)\sigma(V-V^c) + \sigma(V^c\ \sigma(U-U^c)\}$$
$$\leqslant n\ E[|W - W^c|] + 2n\ \{\sigma(U-U^c)\ \sigma(V) + \sigma(U)\ \sigma(V-V^c)\}$$

La preuve est achevée ∎

<u>Remarque</u> : La démonstration précédente peut être légèrement modifiée, en notant que, puisque les éléments (O,O,W_n) sont centraux, il suffit de traiter le cas où les accroissements de la marche aléatoire sont (U_n,V_n,O).

II. THEOREME CENTRAL LIMITE FONCTIONNEL -

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étendre le théorème 2 en un théorème central limite fonctionnel, on suppose $m_\varepsilon = O$.

Posons

$$\Pi_n(k) = \Delta_n^1 \ldots \Delta_n^k \quad \text{pour} \quad k \geq 1 \quad , \quad \Pi_n(O) = e$$
$$\tilde{\Pi}_n(t) = \Pi_n([nt]).(nt-[nt])\ \Delta_n^{[nt]+1}$$

et désignons par $C_G[0,1]$ l'espace métrique séparable et complet obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans G de la distance D définie par

$$\varphi,\psi \in C_G[0,1] \quad , \quad D(\varphi,\psi) = \sup_t d(\varphi(t),\psi(t))$$

<u>Théorème 3</u>.-

Lorsque n tend vers l'infini les probabilités (μ_n) induites par les processus $(\tilde{\Pi}_n(t))$ sur $C_G[0,1]$ convergent étroitement vers la probabilité μ induite par le processus (β_t) sur le même espace.

<u>Démonstration</u>.- Tous les éléments de cette démonstration sont contenus dans les résultats énoncés au chapitre 2 de [4] pour le cas d'une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. Nous indiquerons seulement les lignes générales en insistant sur les points qui ne se transposent pas immédiatement.

Deux assertions doivent être établiés :

(1) la convergence marginale des processus $(\tilde{\Pi}_n(t))$ vers le processus (β_t)

(2) la compacité étroite relative des probabilités μ_n , $n \geq 1$

A.- <u>Convergence marginale</u>

Posons $\tilde{\Delta}_n(s,t) = (\tilde{\Pi}_n(s))^{-1}.\tilde{\Pi}_n(t)$ et $\Delta_n(k,\ell) = (\Pi_n(k))^{-1}.\Pi_n(\ell)$

<u>Lemme 2</u>.-

Soit s,t , $0 \leq s < t \leq 1$

(a) $d(\Delta_n([ns],[nt])\ ,\ \tilde{\Delta}_n(s,t))$ converge vers 0 en probabilité ,

(b) $\Delta_n([ns],[nt])$ converge en loi vers $(\beta(s))^{-1}.\beta(t)$

<u>Démonstration du lemme</u>.-

$$\tilde{\Delta}_n(s,t) = ([ns]+1-ns)\Delta_n^{[ns]}\ .\Delta_n([sn],[tn]).(nt-[nt])\Delta_n^{[nt]+1}$$

et

$$\begin{aligned} d(\Delta_n([ns],[nt]),\Delta_n(s,t)) &\leq d(\Delta_n([ns],[nt]),([ns]+1-ns)\Delta_n^{[ns]}.\Delta_n([ns],[nt])) \\ &\quad + d(([ns]+1-ns)\Delta_n^{[ns]}.\Delta_n([ns],[nt]),\Delta_n(s,t)) \\ &\leq q[(\Delta_n([ns],[nt]))^{-1}([ns]+1-ns)\Delta_n^{[ns]}.\Delta_n([ns][nt])] \\ &\quad + q((nt-[nt])\ \Delta_n^{[nt]+1})\ . \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Tchebitchev le second terme tend vers O en probabilité.

Remarquons qu'en posant

$$\Delta_n([ns],[nt]) = (A_n,B_n,C_n) \quad \text{et} \quad ([ns]+1-ns)\Delta_n^{[ns]} = (D_n,E_n,F_n)$$

le premier terme s'écrit

$$q[(A_n,B_n,C_n)^{-1}(D_n,E_n,F_n)(A_n,B_n,C_n)] = q(D_n,E_n,F_n+D_n\ B_n-E_n\ A_n)\ .$$

Puisque (A_n,B_n,C_n) et (D_n,E_n,F_n) sont indépendantes centrées et que les variances de A_n,B_n,C_n sont bornées tandis que celles de D_n,E_n,F_n tendent vers O , l'inégalité de Tchebitchev montre que le premier terme tend vers O en probabilité. (a) est établi.

Prouvons maintenant (b).

$\Delta_n([ns],[nt])$ a même loi que $\Pi_n([nt]-[ns])$

d'autre part

$$\Pi_n([nt]-[ns]) = \varphi\frac{[nt]-[ns]}{n}(\Pi_{[nt]-[ns]}([nt]-[ns]) ,$$

et puisque $\varphi\frac{[nt]-[ns]}{n}$ converge uniformément sur tout compact vers Q_{t-s} , $\Pi_n([nt]-[ns])$ converge en loi vers $Q_{t-s}(\mu_1) = \mu_{t-s}$ d'après la proposition 2 ■

On dit que $(\tilde{\Pi}_n(t))$ converge marginalement vers $(\beta(t))$ si pour tout $t_1,\dots,t_k$

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_k \leqslant 1$$

le k-uple $(\tilde{\Pi}_n(t_1),\dots,\tilde{\Pi}_n(t_k))$ converge en loi vers le k-uple $(\beta(t_1),\dots,\beta(t_k))$.

Il est équivalent de prouver que $(\tilde{\Delta}_n(0,t_1),\dots,\tilde{\Delta}_n(t_{k-1},t_k))$ converge en loi vers $(\beta(t_1),\dots,(\beta(t_{k-1}))^{-1}.\beta(t_k))$; mais d'après le lemme $(\tilde{\Delta}_n(0,t_1),\dots,\tilde{\Delta}_n(t_{k-1},t_k))$ a même limite en loi que $(\Delta_n(0,[nt_1]),\dots,\Delta_n([nt_{k-1}],[nt_k]))$ qui d'après le lemme et l'indépendance des composantes de ce k-uple converge vers la limite annoncée.

B.- <u>L'ensemble des probabilités</u> μ_n <u>est étroitement relativement compact</u>

D'après [4] théorème 8.3. il suffit de vérifier que pour tout ε et $\eta > 0$, il existe δ , $0 < \delta < 1$ et n_o tels que pour $n \geqslant n_o$ et tout $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{\delta} P \{\omega: \sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta} d(\tilde{\Pi}_n^\omega(s),\tilde{\Pi}_n(t)) \geqslant \varepsilon \} \leqslant \eta$$

Le caractère affine par morceaux des trajectoires $\tilde{\Pi}_n^\omega(.)$ permet de remplacer dans cette condition les deux dernières lignes par : pour $n \geqslant n_o$ et tout k

$$\frac{1}{\delta} P \{\omega: \max_{i\leqslant n\delta} d(\Pi_n^\omega(k),\Pi_n^\omega(k+i)) \geqslant \varepsilon \} \leqslant \eta$$

<u>Lemme 3.-</u>

La condition ci-dessus est réalisée si : pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* λ , $\lambda > 1$, *et* n_o *tel que pour* $n \geqslant n_o$

$$P[\max_{i\leqslant n} q(\Pi_n(i)) \geqslant \lambda] \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

<u>Démonstration du lemme 3.-</u> Soit ε et η , $0<\varepsilon$, $\eta<1$, par hypothèse il existe $\lambda > 1$ et n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$

$$P[\max_{i\leqslant n} q(\Pi_n(i)) \geqslant \lambda] \leqslant \frac{1}{\lambda^2}(\eta\varepsilon^2)$$

Posons $\delta = \varepsilon^2/\lambda^2$, $0 < \delta < 1$, et soit $n_o = n_{1/\delta}$, si $n \geqslant n_o$, $[n\delta]\geqslant n_1$ et l'on a pour $n \geqslant n_o$

$$\frac{1}{\delta} P[\max_{i\leqslant [n\delta]} q(\Pi_{[n\delta]}(i)) \geqslant \lambda] \leqslant \eta$$

mais

$$q(\Pi_{[n\delta]}(i)) = (\frac{n}{[n\delta]})^{1/2} q(\Pi_n(i))$$

tandis que

$$\lambda.(\frac{[n\delta]}{n})^{1/2} \leqslant \lambda .\delta^{1/2} = \varepsilon$$

d'où (1) .■

Suivant toujours [4] nous établissons la condition du lemme 3 .

<u>Lemme 4.-</u>

Pour λ *suffisamment grand*

$$P[\max_{k\leqslant n} q(\Pi_n(k)) \geqslant \lambda] \leqslant 2P[q(\Pi_n(n)) \geqslant \lambda/_2]$$

<u>Démonstration du lemme 4.-</u> Soit

$$E_i = [\max_{k\leqslant i-1} q(\Pi_n(k)) < \lambda \leqslant q(\Pi_n(i))]$$

$$P[\max_{k\leqslant n} q(\Pi_n(k)) \geqslant \lambda] \leqslant P[q(\Pi_n(n)) \geqslant \lambda/_2] + \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i \cap [q(\Pi_n(n)) < \lambda/_2])$$

mais

$$P(E_i \cap [q(\Pi_n(n))<\lambda/_2]) \leqslant P(E_i \cap [|q(\Pi_n(i))-q(\Pi_n(n))|>\lambda/_2])$$
$$\leqslant P(E_i \cap [q(\Pi_n(i),\Pi_n(n)) > \lambda/_2])$$
$$\leqslant P(E_i).P[q(\Pi_n(n-i)) > \lambda/_2]$$

et d'après Thebitchev

$$P\left[q(\Pi_n(\ell)) > \frac{\lambda}{2}\right] \leqslant \frac{36}{\lambda^2 n}\left[\sigma^2(X_\ell)+\sigma^2(Y_\ell)+E[|Z_\ell|]\right]$$

mais

$$E[|Z_\ell|] \leqslant \ell\, E[|W_1|] + \sigma\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}V_i - Y_{i-1}U_i)\right) \leqslant \ell E[|W_1|] + \frac{1}{2}\left[\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\sigma_1\sigma_2$$

et pour $\ell \leqslant n$

$$P[q(\Pi_n(\ell)) > \lambda/_2] \leqslant \frac{36}{\lambda^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2\right]$$

qui est inférieur à $\frac{1}{2}$ pour λ suffisamment grand.

Finalement

$$P\left[\max_{k \leqslant n} q(\Pi_n(k)) \geqslant \lambda\right] \leqslant P[q(\Pi_n(n)) \geqslant \lambda/_2] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} P(E_i)$$

$$\leqslant P[q(\Pi_n(n)) \geqslant \lambda/_2] + \frac{1}{2} P\left[\max_{k \leqslant n} q(\Pi_n(k)) \geqslant \lambda\right]$$

ce qui achève la démonstration. ■

D'après le théorème 2 pour tout λ dans le complémentaire d'un ensemble dénombrable

$$\lim_n P\left[q(\Pi_n(n)) \geqslant \frac{\lambda}{2}\right] = P\left[q(\beta_1) \geqslant \frac{\lambda}{2}\right]$$

Les composantes du processus (β_t) ont des moments de tous les ordres : c'est clair pour les deux premiers, pour la troisième, il suffit , [5] proposition 19, de prouver que cette propriété a lieu pour le processus croissant associé à la martingale de carré intégrable

$$Z_t - m_\varepsilon t = \frac{1}{2}\left(\int_0^t X_s\, d\, Y_s - \int_0^{t'} Y_s\, d\, X_s\right)$$

or ce processus croissant s'écrit :

$$A_t = \frac{1}{4}\int_0^t \left[\sigma_1^2\, X_s^2 + 2\,\sigma_{12}\, X_s\, Y_s + \sigma_2^2\, Y_s^2\right] ds$$

et il est clair qu'il a des moments de tous les ordres.

L'inégalité de Thebitchev montre que

$$P[q(\beta_1) \geqslant \lambda] \leqslant \frac{27}{\lambda^3}\left\{E[|X_1|^3] + E[|Y_1|^3] + E[|Z_1|^{3/2}]\right\}$$

on conclut aisément.

<u>Corollaire</u>.-

Soit F une fonction continue bornée sur $C_G[0,1]$, $F(\tilde{\Pi}_n)$ converge en loi vers $F(\beta)$.

On peut espérer obtenir à partir de ce corollaire des résultats analogues à ceux établis pour les marches aléatoires sur $\mathbb{R}$ à partir du théorème de Donsker (cf [4], §11) ; par exemple on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{k \leqslant n} q(X_k, Y_k, Z_k) \quad \text{converge en loi vers} \quad \sup_{s \leqslant 1} q(\beta_s) \ ,$$

le problème reste d'obtenir une caractérisation plus explicite de la loi limite.

REFERENCES

[1] V.N. TUTUBALIN. *Composition of measures on the simplest nilpotent group*. Theory of Proba. Vol. IX, n° 3, (1964)

[2] M. DUFLO. *Semi-groupes de mesures complexes sur un groupe de Lie.* (à paraître)

[3] T.G. KURTZ. *Extensions of Trotter's Operator Semigroup Approximation Theorems*. Journal of Functional Analysis 3, (1969)

[4] P. BILLINGSLEY. *Convergence of Probability measures*. Wiley

[5] Cours de P. PRIOURET, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour III, (1973), Lecture Notes n° 390

<u>NOTE</u>.-

L'usage des distributions dissipatives associées au générateur infinitésimal des semi-groupes de convolution [2] permet de simplifier la démonstration du théorème 2 et d'en étendre la conclusion à des hypothèses plus générales sur la loi de probabilité du triplet (U_1, V_1, W_1) (A Paraître).