J. C. NEDELEC

Approximation par éléments finis des équations de Riccati

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___S4_A7_0>

APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

DES EQUATIONS DE RICCATI

J.C. NEDELEC

Université de RENNES

Résumé. Nous donnons ici des estimations d'erreurs pour la méthode des éléments finis. Nous appliquons ceci à l'approximation des équations d'évolution paraboliques du second ordre par une méthode d'éléments finis avec intégration numérique. Nous en déduisons dans une dernière partie des estimations d'erreurs pour les schémas approchés des équations de Riccati par des méthodes d'éléments finis.

Nos techniques et résultats sont très proches des techniques de Ciarlet-Raviart [5], Raviart [12] et Wheeler [16]. Mais nous nous sommes efforcés de faire apparaître le minimum d'hypothèses de régularité (en particulier en utilisant des estimations d'erreurs dans des espaces de Sobolev d'indice négatif) nécessaires pour obtenir des estimations d'erreurs raisonnables pour les équations de Riccati.

Notations. C désignera toujours une constante.

Si Ω est un ouvert de R^n nous désignerons par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ , \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad |\alpha| \leq m \quad ;$$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \quad ;$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ ; \ u_{|\partial\Omega} = 0\} \quad .$$

I.1 Estimations d'erreurs duales dans les éléments finis.

Nous donnons ici des estimations d'erreurs pour les méthodes d'éléments finis dans des espaces de Sobolev d'indice négatif.

Soit Ω un ouvert borné polyédrique de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{C}_h$ une "triangulation" régulière de Ω par des éléments finis. Nous désignerons par h le diamètre d'un élément fini et par ρ le diamètre de la plus grande sphère inscrite dans cet élément. Nous supposerons désormais que le rapport $\frac{h}{\rho}$ est uniformément borné pour toute triangulation $\mathcal{C}_h$.

Nous supposons que, à chaque élément fini est associé un espace de polynômes de dimension finie, soit $\mathbb{P}$, et un opérateur d'interpolation π, défini pour les fonctions assez régulières, et qui est $\mathbb{P}$-unisolvant. Nous supposons les éléments finis de classe C^{0}. $\mathbb{P}_k$ désignera l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré k. Nous supposons enfin que chaque élément fini T est équivalent par une application linéaire affine F à un même élément de référence $\hat{T}$, auquel est associé un espace de polynômes $\hat{\mathbb{P}}$ et un opérateur d'interpolation $\hat{\pi}$.

Pour toutes ces notions et pour des compléments nous renvoyons au livre de Zienkievicz [17] et à divers articles de Ciarlet-Raviart [3].

Remarque 1.1. Tous les résultats qui suivent s'adaptent, au prix de complications techniques, au cas des éléments courbes. Dans ce cas F n'est plus une application affine et P n'est plus un espace de polynômes, mais $\hat{P}$ est encore un espace de polynômes.

Nous définissons un espace de dimension finie V_h par

$$V_h = \{u_h \in C^{0}(\bar{\Omega}) \quad ; \quad u_{h}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad u_{h}|_{T} \in P \quad , \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} .$$

Alors les éléments finis considérés étant de classe C^{0} nous savons que

$$V_h \subset H_0^1(\Omega).$$

Nous avons alors le lemme :

Lemme 1.1. Soit k le plus grand entier tel que :

$$P_k \subset P \quad , \quad k \geq 1 \quad ;$$

nous avons l'inégalité, pour toute fonction u assez régulière et dans l'espace $H^{k+1}(T)$

$$(1.1) \qquad ||u - \pi u||_{H^m(T)} \leq C\, h^{k+1-m}\, ||u||_{H^{k+1}(T)} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k+1 .$$

Lemme 1.2. Si Ω est assez régulier (par exemple convexe) et si

$$P_k \subset P,$$

Alors pour toute fonction u de $H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il existe v_h dans V_h tel que

$$(1.2)\quad \Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u-v_h||^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} \leq C\ h^{k+1-m}\, ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k+1 \ .$$

<u>Démonstration</u>. On désigne par π_h l'opérateur d'interpolation défini sur chaque élément fini comme π. Cet opérateur est défini pour les fonctions u assez régulières, et le lemme 1.1 montre alors que

$$\Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u-\pi_h\, u||^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} \leq C\, h^{k+1-m}\, ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k+1 \ .$$

Mais π_h n'est pas nécessairement défini pour toute fonction u de $H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$. Aussi nous procédons en deux étapes pour construire v_h en suivant une idée de Strang [13].

Tout d'abord nous cherchons u_ε tel que

$$(1.3)\quad \begin{cases} ||u-u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq C\ \varepsilon ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \\[2ex] ||u_\varepsilon||_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \end{cases}$$

et u_ε assez régulier pour que π_h soit défini. Alors nous choisissons

$$v_h = \pi_h\, u_\varepsilon \qquad ; \quad \varepsilon = h^{k+1} \ .$$

Nous avons alors par interpolation

$$||u-u_\varepsilon||_{H^m(\Omega)} \leq C\, h^{k+1-m} ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \ .$$

Nous concluons en majorant :

$$\Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u-v_h||^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u_\varepsilon-\pi_h u_\varepsilon||^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} + ||u-u_\varepsilon||_{H^m(T)}$$

$$\leq C\, h^{k+1-m} ||u||_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Il reste à construire u_ε.

Nous résolvons le problème :

(1.4) $$u_\varepsilon + \varepsilon A u_\varepsilon = u \quad ; \quad u_\varepsilon \in H_o^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega) ,$$

où A est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ sur $H_o^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$ positif et régularisant c'est-à-dire tel que :

$$A u_\varepsilon \in H^{k+1}(\Omega) \Longrightarrow u_\varepsilon \in H^{2(k+1)}(\Omega) .$$

(1.5) $$\langle Au,u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

Alors nous avons :

(1.6) $$\varepsilon A.Au_\varepsilon = Au-Au_\varepsilon$$

en multipliant (1?6) par Au et utilisant (1.5) nous déduisons

$$|Au_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq |Au|_{L^2(\Omega)} \leq C||u||_{H^{k+1}(\Omega)} .$$

D'où :

$$||u_\varepsilon||_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C||u||_{H^{k+1}(\Omega)} .$$

En reportant alors cette majoration dans (1.4), nous avons

$$|u-u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \varepsilon||u||_{H^{k+1}(\Omega)} .$$

Nous pouvons choisir comme opérateur A l'opérateur défini par :

$$(Au,v)_{L^2(\Omega)} = ((u,v))_V \quad ; \quad \forall\, u, v \in V.$$

$$V = [L^2(\Omega), H_o^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)]_{1/2} .$$

<u>Lemme 1.3</u>. Nous avons les "inégalités inverses"

(1.7) $$\Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u_h||^2_{H^s(T)}\Big)^{1/2} \leq \frac{C}{h^{s-t}} \Big(\sum_{T\in \mathcal{C}_h} ||u_h||^2_{H^t(T)}\Big)^{1/2} ;$$

$0 \leq t \leq s \leq k+1 \quad ; \quad s, t$ entiers.

<u>Lemme 1.4.</u> Soit s_h le projecteur dans $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace fermé V_h. Alors sous les hypothèses du lemme 1.2 nous avons

$$(1.8)\qquad \Big(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u-s_h u\|^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} \le C\, h^{k'+1-m}\|u\|_{H^{k'+1}(\Omega)} \quad ;$$

pour toute fonction u dans l'espace $H^1_o(\Omega) \cap H^{k'+1}(\Omega)$ et pour $0 \le m \le k'+1 \le k+1$.

<u>Démonstration</u>. Nous avons :

$$\|u-s_h u\|_{L^2(\Omega)} \le \|u-v_h\|_{L^2(\Omega)} \le C\, h^{k+1}\, \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} .$$

$$\Big(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u-s_h u\|^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u-v_h\|^2_{H^m(T)}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|s_h u-v_h\|^2_{H^m(T)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\le C\, h^{k+1-m}\, \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{C}{h^m}\|s_h u - v_h\|_{L^2(\Omega)} \quad ;$$

$$\le C\, h^{k+1-m}\, \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad .$$

Le résultat est encore vrai pour tout entier k' inférieur à k, car on a : $P_{k'} \subset P_k \subset P$.

<u>Proposition 1.1</u>. Sous les hypothèses du lemme 1.2, nous avons :

$$(1.9)\qquad \|u - s_h u\|_{(H^1_o(\Omega)\cap H^m(\Omega))^*} \le C\, h^{k'+1+m}\, \|u\|_{H^{k'+1}(\Omega)} \quad ;$$

$$1 \le m \le k+1 \quad ; \quad 0 \le k' \le k$$

<u>Démonstration</u>.

Soit :

$\varphi \in H^1_o(\Omega) \cap H^m(\Omega)$.

$$(u-s_h u,\varphi)_{L^2(\Omega)} = (u-s_h u,\ \varphi - s_h\varphi)_{L^2(\Omega)} .$$

D'où :

$$\|u-s_h u\|_{(H^1_o(\Omega)\cap H^m(\Omega))^*} = \sup_{\varphi\in H^1_o(\Omega)\cap H^m(\Omega)} \frac{(u-s_h u,\varphi)}{\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}} \le C\, h^{k'+1+m}\, \|u\|_{H^{k'+1}(\Omega)}$$

I.2. Estimations des erreurs dues à l'intégration numérique pour les problèmes elliptiques.

Nous donnons ici des résultats d'erreurs pour une classe non générale de formules d'intégration numérique. Nous obtenons des résultats très semblables à ceux de Ciarlet-Raviart [5] mais avec une technique un peu différente, qui permet de faire le minimum d'hypothèses sur la solution du problème que l'on approche.

Lemme 1.5. Soit π' un opérateur d'interpolation sur un élément fini T, de diamètre h, qui est exact pour les polynômes de degré k'. Alors

$$(1.10)\quad \left|\int_T auv\,d\omega-\int_T \pi'(auv)\,d\omega\right| \leq C\, h^{k'+1}\|a\|_{W^{k'+1,\infty}(T)} \sum_{i,j\in I}\|D^i u\|_{L^2(T)}\,\|D^j v\|_{L^2(T)}$$

$$I = \{i,j\ ;\ i \geq 0\ ,\ j \geq 0\ ;\ i \leq k''\ ,\ j \leq k'''\ ,\ i+j \leq k'+1\}\ ;$$

$$\forall u\in P_{k''}\ ,\ v\in P_{k'''}\ ,\ a\in W^{k'+1,\infty}(T)\ .$$

Démonstration. Soit :

$$\varphi = a\,u\,v$$

Considérons :

$$\hat{\varphi} = \varphi\circ F\quad ;\quad \hat{\pi}'\hat{\varphi} = \widehat{\pi'\varphi} = \pi'\varphi\circ F\ .$$

Alors d'après le lemme de Bramble-Hilbert, nous avons :

$$|(\hat{\varphi}-\hat{\pi}'\hat{\varphi})(\hat{x})| \leq C\|\hat{I}-\hat{\pi}'\|_{\mathcal{L}(W^{k'+1,\infty}(\hat{T}),L^\infty(\hat{T}))}\,\|D^{k'+1}\hat{\varphi}\|_{L^\infty(\hat{T})}\quad ;\ \forall x\in\hat{T}$$

D'où en revenant à l'élément T par la transformation F :

$$(1.11)\quad |(auv-\pi' auv)(x)| \leq C\,h^{k'+1}\sup_{y\in T}|D^{k'+1}(auv)(y)|\quad ;\ \forall x\in T\ .$$

En utilisant la formule de Leibnitz et en majorant, nous obtenons :

$$\sup_{y\in T}|D^{k'+1}(auv)(y)| \leq C\|a\|_{W^{k'+1,\infty}(T)}\left(\sum_{i=0}^{k'+1}\|D^i(uv)\|_{L^\infty(T)}\right)\ .$$

D'où en intégrant sur l'élément T :

$$\left|\int_T auvd\omega - \int_T \pi'(auv)d\omega\right| \leq C\, h^{k'+1}||a||_{W^{k'+1,\infty}(T)} \text{ mes}(T) \left(\sum_{i=0}^{k'+1} ||D^i uv||_{L^\infty(T)}\right).$$

Il est facile de voir en utilisant à nouveau la transformation F et le fait que sur l'espace $\hat{P}_{k''+k'''}$ toutes les normes sont équivalentes, que

$$\text{mes}(T)\ ||\varphi||_{W^{k'+1,\infty}(T)} \leq C||\varphi||_{W^{k'+1,1}(T)} .$$

D'où

$$(1.12)\qquad \left|\int_T auvd\omega - \int_T \pi'(auv)d\omega\right| \leq C\, h^{k'+1}||a||_{W^{k'+1,\infty}(T)} \left(\sum_{i=0}^{k'+1} \int |D^i uv|d\omega\right).$$

Nous obtenons alors la majoration (1.10) en majorant le second membre de (1.12) par Cauchy-Scharz et en remarquant que :

$$D^i u = 0 \quad ; \qquad i > k'' \quad ;$$
$$D^j v = 0 \quad ; \qquad j > k''' \quad .$$

Soit la forme bilinéaire sur $H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$ définie par

$$(1.13)\qquad a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\omega + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, d\omega + \int_\Omega c(x)\, uvd\omega .$$

Nous définissons alors la forme bilinéaire sur $V_h \times V_h$ suivante :

$$(1.14)\qquad a_h(u_h,v_h) = \sum_{T\in\mathcal{C}_h} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_T \pi'\left(a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}\right)d\omega + \sum_{i=1}^{n} \int_T \pi'\left(b_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} v_h\right) d\omega + \int_T \pi'(C\, u_h\, u_h)\, d\omega\right]$$

et le "produit scalaire" approché :

$$(1.15)\qquad (u_h, v_h)_h = \sum_{T\in\mathcal{C}_h} \int \pi'(u_h\, v_h)\, d\omega \quad .$$

Nous avons alors la proposition suivante :

<u>Proposition 1.2</u>. Si :

$$P_k \subset P \subset P_{k''} \quad ;$$

(1.16) $\pi' p = p \quad ; \quad \forall p \in P_{k'} \quad ; \quad k' \geq 2k'' - 1 \quad ;$

alors nous avons les majorations :

$$
(1.17)\quad \begin{cases}
|(u_h,v_h)_{L^2(\Omega)} - (u_h,v_h)_h| \leq C\, h^{k+1} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u_h\|^2_{H^2(T)}\right)^{\frac12} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|v_h\|^2_{H^{k-1}(T)}\right)^{\frac12} ; \text{si } k \geq 2 \\
\quad '' \qquad\qquad '' \qquad \leq C\, h^{k+1} \|u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|v_h\|^2_{H^k(T)}\right)^{\frac12} ; \\
\quad '' \qquad\qquad '' \qquad \leq C\, h^{k} \|u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|v_h\|^2_{H^{k-1}(T)}\right)^{\frac12} ; \\
\quad '' \qquad\qquad '' \qquad \leq C\, h^{k} \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|v_h\|^2_{H^k(T)}\right)^{\frac12} .
\end{cases}
$$

$$
(1.18)\quad \begin{cases}
|a(u_h,v_h) - a_h(u_h,v_h)| \leq C\, h^{k+1} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u_h\|^2_{H^k(T)}\right)^{\frac12} \times M(a,b,c) ; \\
\quad '' \qquad\qquad '' \qquad \leq C\, h^{k} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u_h\|^2_{H^{k-1}(T)}\right)^{\frac12} \; M(a,b,c) ; \\
\quad '' \qquad\qquad '' \qquad \leq C\, h^{k} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{T\in\mathcal{C}_h} \|u_h\|^2_{H^k(T)}\right)^{\frac12} \; M(a,b,c) .
\end{cases}
$$

$$
(1.19)\quad M(a,b,c) = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{W^{k'+1,\infty}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{W^{k'+1,\infty}(\Omega)} + \|c\|_{W^{k'+1,\infty}(\Omega)}
$$

Démonstration. Nous raisonnons sur chaque élément fini T de la triangulation $\mathcal{C}_h$.

D'après le lemme 1.5, nous avons

$$
\left| \int_T (u_h\, v_h - \pi'(u_h\, v_h))\, d\omega \right| \leq C\, h^{k'+1} \sum_{i,j\in I} \|D^i u_h\|_{L^2(T)} \|D^j v_h\|_{L^2(T)}
$$

nous utilisons alors les inégalités inverses du lemme 1.3 pour ne faire apparaître que :

$$
\|u_h\|_{H^2(T)} \quad , \quad \|v_h\|_{H^{k-1}(T)} \quad ;
$$

ceci amène à diviser pour établir la première inégalité de (1.17) par $C\,h^{\alpha}$, avec

$$\alpha = [i-r]^+ + [j+1-k]^+$$

Il est facile de voir que

$$\alpha \leq 2\,k'' - 1 - k\ ,$$

sauf si

$$k'' = k = 1 \qquad \alpha \leq 1\ .$$

Il vient

$$\int_T |u_h\, v_h - \pi'\, u_h\, v_h| d\omega \leq C\, h^{k'+1-\alpha}\ ||u_h||_{H^2(T)}\ ||v_h||_{H^{k-1}(T)}\ ;$$

$$k' \geq 2\,k'' - 1 \Longrightarrow k' + 1 - \alpha \geq k + 1\ ;$$

sauf si

$$k'' = k = 1\ ,$$

et alors le résultat est encore vrai pour :

$$k' \geq 2.$$

Pour obtenir les inégalités suivantes dans (1.17) nous procédons de manière analogue, ce qui amène à diviser par $C\,h^{\alpha}$ avec

$$\alpha = [i-1]^+ + [j-k]^+\ .$$

Il est facile de voir que :

$$k' \geq 2\,k'' - 1 \Longrightarrow k' + 1 - \alpha \geq k + 1\ .$$

Le résultat global pour tout l'ouvert Ω se déduit du résultat local en sommant sur tous les éléments finis et en majorant par Cauchy-Scharz . Pour établir les inégalités (1.18) nous procédons de la même manière en utilisant la technique ci-dessus pour chacun des termes de la forme bilinéaire a, et en tenant compte du fait que

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} \in P_{k''-1}\ .$$

<u>Remarque 1.2.</u> Pour adapter les théorèmes ci-dessus au cas des éléments courbes, il suffit de faire des démonstrations directement sur l'élément de référence. Mais il faut faire attention alors au fait que :

$$\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial x_i} \notin \hat{P}_{k''-1} \quad ,$$

mais à un espace de polynômes de plus haut degré en général. C'est ce degré qui jouera le rôle de k"-1, ce qui nécessite en général une formule d'intégration numérique plus précise, au moins pour les termes contenant des dérivées.

Nous supposons maintenant que

(1.20) $$a(u,u) \geq \alpha ||u||^2_{H^1_o(\Omega)} \quad ; \quad \forall u \in H^1_o(\Omega) \quad ; \quad \alpha > 0 \quad ;$$

(1.21) $$a(u,v) = \langle Au,v \rangle \quad ; \quad \forall\, u,\, v \in H^1_o(\Omega) \,.$$

et que nous avons aussi :

(1.22) $$a_h(u_h,u_h) \geq \alpha ||u_h||^2_{H^1_o(\Omega)} \quad ; \forall u_h \in V_h \quad ; \quad \alpha > 0 \quad .$$

Nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [5] où l'on trouvera des conditions suffisantes pour que l'inégalité (1.21) ait lieu.

Nous définissons alors l'opérateur :

(1.23) $$\begin{cases} a_h(t_h\, v,\, w_h) = a(v,w_h) \; ; \quad \forall w_h \in V_h \quad , \\ t_h \in \mathcal{L}(V,V_h) \end{cases}$$

Nous avons la proposition :

<u>Proposition 1.3.</u> Sous les hypothèses des propositions 1.1 et 1.2, et si l'opérateur A^*, adjoint de A défini en (1.21) est un isomorphisme de l'espace $H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ sur l'espace $L^2(\Omega)$, nous avons les estimations :

(1.24) $$||v-t_h\, v||_{H^1_o(\Omega)} \leq C\, h^k ||v||_{H^{k+1}(\Omega)}$$

$$(1.25) \qquad ||v-t_h\, v||_{L^2(\Omega)} \leq C\, h^{k+1} ||v||_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Si de plus, l'opérateur A^* est un isomorphisme de l'espace $H_o^1(\Omega)$ sur un sous-espace fermé de $H^3(\Omega)$ et si

$\underline{k \geq 2}$:

$$(1.26) \qquad ||v - t_h\, v||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\, h^{k+1} ||v||_{H^k(\Omega)} .$$

<u>Démonstration</u>. Nous calculons la quantité :

$$a_h(s_h\, v - t_h\, v,\; s_h\, v - t_h\, v) = a(s_h\, v - v,\; s_h\, v - t_h\, v)$$

$$+\, a_h(s_h\, v,\; s_h\, v - t_h\, v) - a(s_h\, v,\; s_h\, v - t_h\, v).$$

D'où en utilisant le lemme 1.4 et la majoration (1.18) :

$$(1.27) \qquad ||s_h\, v - t_h\, v||_{H_o^1(\Omega)} \leq C\, h^k ||v||_{H^{k+1}(\Omega)} + C\, h^k \Big(\sum_{T \in \mathcal{C}_h} ||s_h\, v||^2_{H^{k-1}(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\, h^k ||v||_{H^{k+1}(\Omega)} .$$

La majoration (1.25) s'obtient par un argument classique de dualité du à Aubin et Nitzche :

$$||v - t_h\, v||_{L^2(\Omega)} = \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)} \frac{(v-t_h v, \varphi)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi|_{L^2(\Omega)}}$$

Posons

$$\varphi = A^* \,\psi \qquad ; \qquad \psi \in H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

$$||v-t_h\, v||_{L^2(\Omega)} \leq C \sup \frac{a(v-t_h v, \psi)}{||\psi||_{H^2(\Omega)}} \quad ;$$

$$a(v - t_h\, v, \psi) = a(v - t_h\, v,\; \psi - s_h\, \psi) + a_h(t_h\, v,\; s_h\, \psi) - a(t_h\, v,\; s_h\, \psi) .$$

D'où en utilisant les majorations (1.8) et (1.18) :

$$|a(v-t_h v,\Psi)| \leq C||v-t_h v||_{H_0^1(\Omega)} \quad h||\Psi||_{H^2(\Omega)} + C\, h^{k+1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{E}_h}||t_h v||^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}||s_h\Psi||_{H^1(\Omega)}$$

mais nous avons :

$$||s_h\, \Psi||_{H^1(\Omega)} \leq C||\Psi||_{H^2(\Omega)} \quad ;$$

$$\Big(\sum_{T\in\mathcal{E}_h}||t_h v||^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{T\in\mathcal{E}_h}||s_h v-t_h v||^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{T\in\mathcal{E}_h}||s_h v||^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{C}{h^{k-1}}\, ||s_h v-t_h v||_{H_0^1(\Omega)} + C||v||_{H^{k+1}(\Omega)} \quad .$$

En utilisant alors la majoration déjà établie (1.27) nous déduisons (1.25).

De même nous avons

$$||v - t_h\, v||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} \frac{(v-t_h v,\varphi)_{L^2(\Omega)}}{||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}} \quad .$$

Posons

$$\Psi = A^* \varphi \quad ; \quad \Psi \in W = \{\Psi\in H^3(\Omega) \;\; ; \;\; A^* \;\Psi \in H_0^1(\Omega), \;\; \Psi\in H_0^1(\Omega)\}$$

D'où

$$||v-t_h\, v||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \sup_{\Psi\in W} \frac{|a(v-t_h v,\Psi)|}{||\Psi||_{H^3(\Omega)}}$$

Nous avons cette fois si $\underline{k \geq 2}$:

$$|a(v-t_h v,\Psi)| \leq C||v-t_h v||_{H_0^1(\Omega)}\, h^2||\Psi||_{H^3(\Omega)} + C\, h^{k+1}||s_h\Psi||_{H^1(\Omega)}\Big(\sum_{T\in\mathcal{E}_h}||t_h v||^2_{H^k(T)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Nous concluons alors de la même façon mais en utilisant la majoration

$$||v-t_h\, v||_{H_0^1(\Omega)} \leq C\, h^{k-1}||v||_{H^k(\Omega)} \quad ;$$

Cette majoration résulte de (1.24) en choisissant $k' = k-1$.

Remarque 1.3. L'hypothèse de régularité sur l'opérateur A^* est liée à une hypothèse de régularité de l'ouvert Ω. Nous savons qu'elle est vérifiée si l'ouvert Ω est convexe. Mais nous avons supposé que l'ouvert Ω est la réunion d'éléments finis et donc peu régulier. Dans le cas où l'ouvert Ω est non convexe nous serons donc amené à tenir compte de l'erreur d'approximation de l'ouvert Ω par une réunion d'éléments finis. Nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [5] et Strang - G. Fix [14] pour ce point.

II.1. Etude de l'erreur d'approximation dans les équations paraboliques d'évolution.

Nous considérons le problème d'évolution variationnel suivant :

Trouver la fonction :

$$u \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \; ; \quad T > 0 \; ;$$

telle que :

$$(2.1) \quad \begin{cases} <\frac{\partial u}{\partial t},v> + a(u,v) = <f,v> & ; \quad \text{p.p. en } t \; ; \; \forall v \in H_o^1(\Omega) \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

$<,>$, désigne la dualité entre l'espace $H_o^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$.

Nous savons que l'hypothèse (1.20) entraîne l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème pour :

$$u_o \in L^2(\Omega) \; , \quad f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Nous approchons ce problème par le problème suivant :

Trouver :

$$u_h \in C^1(0,T;V_h)$$

tel que

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\frac{\partial u_h}{\partial t},v_h)_h + a_h(u_h,v_h) = (f_h,v_h)_h & ; \; \forall v_h \in V_h \quad ; \quad t \in (0,T) \; ; \\ u_h(0) = u_{oh} & ; \qquad u_{oh} \; , \; f_h(t) \in V_h \quad . \end{cases}$$

Nous ferons l'hypothèse :

$$(2.3) \qquad (u_h,u_h)_h \geq \alpha |u_h|^2_{L^2(\Omega)} \; ; \; \forall u_h \in V_h \quad .$$

Par abus de notation, nous noterons :

$$||\varphi_h||_{H^m(\Omega)} \quad ; \quad m > 1 \quad ; \quad \forall \varphi_h \in V_h \; ;$$

la norme dans l'espace produit : $\prod_{T \in \mathcal{C}_h} H^m(T)$.

Théorème 2.1. Si les hypothèses (2.3) et (1.22) ont lieu et si :

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))\quad (\text{ou } H_0^1(\Omega)\cap H^{k-1}(\Omega) \text{ si } k-1 \geq 1)$$

et sous les hypothèses des propositions 1.1 et 1.2, nous avons

$$\|u-u_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u-u_h\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\, h^k \Big(\|u\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))} + \|f_h\|_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega)}\Big)M(a,b,c) + \|u_o-u_{oh}\|_{L^2(\Omega)} + \|f-f_h\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

où u désigne la solution du problème (2.1) et u_h désigne la solution du problème (2.2).

Démonstration. Nous considérons la quantité :

$$I_h(t) = \Big(\frac{\partial}{\partial t}u_h - \frac{\partial}{\partial t} s_h\, u,\ u_h - s_h\, u\Big)_h + a_h(u_h - s_h\, u,\ u_h - s_h\, u)$$

Alors

$$I_h(t) = \Big<\frac{\partial u}{\partial t} - s_h \frac{\partial u}{\partial t},\ u_h - s_h\, u\Big> + a(u - s_h\, u,\ u_h - s_h\, u)$$

$$+ (f_h,\ u_h - s_h\, u)_h - (f_h,\ u_h - s_h\, u)$$

$$+ <f - f_h,\ s_h\, u - u_h>$$

$$+ \Big(s_h \frac{\partial u}{\partial t},\ u_h - s_h\, u\Big) - \Big(s_h \frac{\partial u}{\partial t},\ u_h - s_h\, u\Big)_h$$

$$+ a(s_h\, u,\ u_h - s_h\, u) - a_h(s_h\, u,\ u_h - s_h\, u)\ .$$

Nous utilisons alors les propositions 2.1 et 2.2 et le lemme 1.4.

D'où :

$$<\frac{\partial u}{\partial t} - s_h \frac{\partial u}{\partial t}, u_h - s_h u> \leq C h^k ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{k-1}(\Omega)} ||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)}$$

$$a(u - s_h u, u_h - s_h u) \leq C h^k ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} ||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)}$$

$$|(f_h, u_h - s_h u)_h - (f_h, u_h - s_h u)| \leq C h^k ||f_h||_{H^{k-1}(\Omega)} ||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)}$$

$$|(s_h \frac{\partial u}{\partial t}, u_h - s_h u) - (s_h \frac{\partial u}{\partial t}, u_h - s_h u)_h| \leq C h^k ||s_h \frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{k-1}(\Omega)} ||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)}$$

$$|a_h(s_h u, u_h - s_h u) - a(s_h u, u_h - s_h u)| \leq C h^k ||s_h u||_{H^{k-1}(\Omega)} ||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)} \times M(a,b,c)$$

En utilisant le lemme 1.4, il est facile de voir que

$$||s_h \frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{k-1}(\Omega)} \leq C ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{k-1}(\Omega)}$$

$$||s_h u||_{H^{k-1}(\Omega)} \leq C ||u||_{H^{k-1}(\Omega)}$$

Nous obtenons donc :

$$I_h(t) \leq C\Big[h^k M(a,b,c)(||u||_{H^{k+1}(\Omega)} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{k-1}(\Omega)} + ||f_h||_{H^{k-1}(\Omega)}) + ||f-f_h||_{H^{-1}(\Omega)})||u_h - s_h u||_{H^1(\Omega)}\Big].$$

En intégrant alors sur l'intervalle $(0,t)$ nous en déduisons

$$\frac{1}{2} ||u_h(t) - s_h u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_0^t ||u_h(\tau) - s_h u(\tau)||^2_{H^1(\Omega)} d\tau \leq C ||u_\circ - u_{oh}||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t I_h(\tau) d\tau$$

Le résultat (2.4) se déduit alors facilement.

<u>Remarque 2.1.</u> De même que l'on peut affaiblir l'hypothèse (1.20), on peut affaiblir l'hypothèse (1.22) sous les formes :

(2.5) $\quad a(u,u) + \lambda\, |u|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha ||u||^2_{H^1_0(\Omega)} \quad ;$

$$(2.6) \qquad a_h(u_h,u_h) + \lambda\, |u_h|_h^2 \geq \alpha ||u_h||^2_{H_0^1(\Omega)} \quad ; \quad \alpha > 0 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

La majoration (2.4) reste inchangée.

On peut de même considérer une famille de formes bilinéaires dépendant du paramètre t et vérifiant (2.5). Le résultat est encore identique.

Théorème 2.2. Sous les hypothèses du théorème 2.1, nous avons

si $k' \geq 2$

$$(2.7) \quad |u-u_h|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(M(a,b,c,))\Big[h^{k+1}(||f_h||_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))} + ||u||_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}$$

$$+ ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))} + ||u_o-u_{oh}||_{H^{-1}(\Omega)} + h^{k+1}||u_o||_{H^k(\Omega)}$$

$$+ \int_0^T (\sup_{\varphi_h \in V_h} \frac{(f-f_h,\varphi_h)}{||\varphi_h||_{H^2(\Omega)}})^2 \, d\tau + h||f-f_h||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + h||u_o-u_{oh}||^2_{L^2(\Omega)}\Big].$$

Démonstration. Soit

$$g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

et soit la solution φ de :

$$(2.8) \quad \begin{cases} -\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t},v\rangle + a(v,\varphi) = \langle g,v\rangle \quad ; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad ; \quad \text{p.p. en } t \ ; \\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

Alors l'application $g \longrightarrow \varphi$, est un isomorphisme de

$$L^2(0,T;L^2(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$$

et donc

$$(2.9) \qquad ||\varphi||_{L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} + ||\varphi(0)||_{H_0^1(\Omega)} \leq C||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} .$$

Nous calculons

$$(2.10) \qquad ||u-u_h||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))} \frac{(u-u_h,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \ ;$$

$$(u-u_h,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = (u-u_h,g-s_h\,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + (u-u_h,s_h\,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

Posons alors :

$$(2.11)\quad \begin{cases} -\left(\dfrac{\partial\varphi_h}{\partial t}, v_h\right)_h + a_h(v_h,\varphi_h) = (s_h\,g, v_h)_h \quad ; \quad \forall\, v_h \in V_h \ ; \text{ p.p. en } t \ ; \\ \\ \varphi_h(T) = 0 \ . \end{cases}$$

Majorons en utilisant la proposition 1.1. :

$$(u-u_h,g-s_h\,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq ||u-u_h||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\ ||g-s_h\,g||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

$$\leq C\,h||u-u_h||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\ ||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

D'autre part :

$$(u-u_h,s_h\,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T\Big[(u-s_hu,s_hg)_{L^2(\Omega)} + (s_hu-u_h,s_hg)_{L^2(\Omega)} - (s_hu-u_h,s_hg)_h\Big]d\tau$$

$$+ \int_0^T (s_h\,u - u_h,\ s_h\,g)_h\,d\tau$$

Nous avons :

$$(u - s_h\,u,\ s_h\,g)_{L^2(\Omega)} = 0 \ .$$

Majorons en utilisant la proposition 1.2. :

$$|(s_h\,u - u_h,\ s_h\,g)_{L^2(\Omega)} - (s_h\,u - u_h,\ s_h\,g)_h| \leq C\,h||s_h\,u-u_h||_{H_0^1(\Omega)}\ ||s_h\,g||_{L^2(\Omega)},$$

$$\leq C\,h||s_h\,u-u_h||_{H_0^1(\Omega)}\ ||g||_{L^2(\Omega)}$$

Enfin majorons le dernier terme :

$$\int_0^T (s_hu - u_h,s_h\,g)_h\,d\tau = \int_0^T \Big[\Big(\frac{\partial s_h u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \varphi_h\Big)_h + a_h(s_h\,u-u_h, \varphi_h)\Big]\,d\tau$$

$$+ (s_h\,u_o - u_{oh}, \varphi_h(0))_h \qquad ,$$

$$= \int_0^T \langle f-f_h, \varphi_h\rangle \, d\tau + \int_0^T [(f_h,\varphi_h) - (f_h,\varphi_h)_h] \, d\tau$$

$$+ \int_0^T [(\frac{\partial s_h \dot{u}}{\partial t}, \varphi_h)_h - (\frac{\partial s_h u}{\partial t}, \varphi_h)] \, d\tau + \int_0^T \langle \frac{\partial s_h u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_h\rangle \, d\tau$$

$$+ \int_0^T (a_h(s_h u, \varphi_h) - a(s_h u, \varphi_h)) \, d\tau + \int_0^T a(s_h u - u, \varphi_h) \, d\tau$$

$$+ (s_h u_o - u_{oh}, \varphi_h(0))_h \ .$$

D'où en utilisant à nouveau les propositions 1.1 et 1.2 dans le cas où $k' \geq 2$:

$$\left|\int_0^T (s_h u - u_h, s_h g)_h \, d\tau\right| \leq C \, [\int_0^T (\sup_{\varphi_h \in V_h} \frac{|(f-f_h,\varphi_h)|}{||\varphi_h||_{H^2(\Omega)}})^2 \, d\tau + h^{k+1} ||f_h||_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))}$$

$$+ h^{k+1} \, ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega))} + M(a,b,c) h^{k+1} ||u||_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}] ||\varphi_h||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$$

$$+ (||u_o - u_{oh}||_{H^{-1}(\Omega)} + C \, h^{k+1} ||u_o||_{H^k(\Omega)}) \, ||\varphi_h(0)||_{H_o^1(\Omega)} \ .$$

Le résultat (2.7) se déduit alors de l'égalité (2.10) en majorant le second membre et en remarquant que, d'après le théorème 2.1 nous avons :

$$||s_h \varphi - \varphi_h||_{L^2(0,T;H_o^1(\Omega))} + |s_h \varphi(0) - \varphi_h(0)|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C \, M(a,b,c) \, h \, [\, ||\varphi||_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}]$$

et en utilisant les inégalités inverses :

$$||\varphi_h||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||\varphi_h(0)||_{H_o^1(\Omega)} \leq C \, M(a,b,c) \, [\, ||\varphi||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}]$$

<u>Remarque 2.2.</u> Le théorème ci-dessus donne une erreur en h^{k+1}, avec des hypothèses qui correspondent exactement aux hypothèses qui assurent la régularité de la solution du problème initial.

Pour obtenir une erreur en h^{k+1}, mais dans l'espace $C(0,T;L^2(\Omega))$, il est nécessaire de supposer une erreur en h^{k+1} sur la condition initiale u_o. Ceci n'est réaliste que si cet élément u_o est dans l'espace $H^{k+1}(\Omega)$ au moins. Et donc il faudra supposer plus de régularité sur la solution u que dans le théorème précédent pour obtenir l'erreur dans l'espace $C(0,T;L^2(\Omega))$.
C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.3. Sous les hypothèses du théorème 2.1 et si de plus nous avons :

$$u_o \in H_o^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega) \;;\; \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^k(\Omega)) \;;\; u \in C(0,T;H^{k+1}(\Omega)) \;;\; \text{si } k \geq 2$$

et

$$u_o \in H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \;;\; \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \;;\; u \in C(0,T;H^2(\Omega)) \;;\; \text{si } k = 1 \;;$$

Alors nous avons :

si $k \geq 2$

$$(2.12) \quad ||u-u_h||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C[||u_o-u_{oh}||_{L^2(\Omega)} + h^{k+1}||u_o||_{H^{k+1}(\Omega)} + $$
$$+ ||f-f_h||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + h^{k+1}||u||_{C(0,T;H^{k+1}(\Omega))} +$$
$$+ h^{k+1}||f_h||_{L^2(0,T;H^k(\Omega))} + h^{k+1}\, ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^k(\Omega))}] .$$

$k = 1$

$$(2.13) \quad ||u-u_h||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C[||u_o-u_{oh}||_{L^2(\Omega)} + ||f-f_h||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$
$$+ h^2(||u_o||_{H^2(\Omega)} + ||f_h||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$$
$$+ ||u||_{C(0,T;H^2(\Omega))}] .$$

Démonstration. Considérons la quantité :

$$I_h(t) = (\frac{\partial u_h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} t_h u, u_h - t_h u)_h + a_h(u_h - t_h u, u_h - t_h u)$$

$$= (f_h, u_h - t_h u)_h - \langle f, u_h - t_h u\rangle$$

$$\langle\frac{\partial u}{\partial t}, u_h - t_h u\rangle - (\frac{\partial}{\partial t} t_h u, u_h - t_h u)_h \quad .$$

$$|I_h(t)| \leq C||u_h - t_h u||_{H_0^1(\Omega)} (||f_h - f||_{H^{-1}(\Omega)} + h^{k+1}||f_h||_{H^k(\Omega)} + ||\frac{\partial u}{\partial t} - t_h\frac{\partial u}{\partial t}||_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$+ h^{k+1} ||t_h \frac{\partial u}{\partial t}||_{H^k(\Omega)}).$$

En utilisant alors la proposition 1.3, nous en déduisons

$$|I_h(t)| \leq C||u_h - t_h u||_{H_0^1(\Omega)} \left[||f - f_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h^{k+1}||f_h||_{H^k(\Omega)} + h^{k+1}||\frac{\partial u}{\partial t}||_{H^k(\Omega)}\right].$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $(0,t)$ nous obtenons alors :

$$||u_h - t_h u||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||u_h - t_h u||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\Big[||u_{oh} - t_h u_o||_{L^2(\Omega)}$$

$$+ ||f_h - f||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + h^{k+1}||f_h||_{L^2(0,T;H^k(\Omega))} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^k(\Omega))}\Big].$$

Le résultat (2.12) se déduit facilement de la majoration ci-dessus en utilisant à nouveau la proposition 1.3.

Dans le cas où $k = 1$, nous ne pouvons pas utiliser de majoration dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$ aussi nous utilisons des majorations dans $L^2(\Omega)$, et la modification est évidente.

Remarque 2.3. Dans le cas où l'on affaiblit les hypothèses de coercivité uniforme pour ne conserver que :

(2.6) $\quad a_h(u_h,u_h) + \lambda\ |u_h|_h^2 \geq \alpha||u_h||^2_{H_0^1(\Omega)} \quad ; \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(2.14) $\quad (u_h,u_h)_h \geq 0$,

le théorème précédent donne cependant une erreur en h^{k+1} mais dans l'espace $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, au lieu de $C(0,T;L^2(\Omega))$.

Remarque 2.4. Nous avons tout au long de l'exposé parlé de problèmes avec conditions de Dirichlet. Ceci n'est pas fondamental et les résultats seraient très semblables pour d'autres types de conditions aux limites qui conduisent à des problèmes variationnels.

III - Approximation par une méthode d'éléments finis des équations de Riccati.

Nous rappelons d'abord quelques résultats relatifs aux équations de Riccati que nous considérons, équations qui interviennent dans la résolution de problèmes de filtrage d'équations aux dérivées partielles. Nous renvoyons à Lions [9] et à Bensoussam [2] pour des compléments pour ces équations.

Nous considérons, en outre des données et hypothèses précédentes deux espaces de Hilbert K et G et les opérateurs

$$C(.) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),K)) \quad ; \tag{3.1}$$

$$F(.) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(G,H^{-1}(\Omega))) \quad ; \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} Q_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega)) \ ; \quad Q_0 = Q_0^* \quad ; \\ (Q_0 \chi,\chi)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ , \quad \forall \chi \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous définissons alors pour tout s dans l'intervalle $[0,T]$ un opérateur $Q(s)$ comme la solution du système d'équations :

$$\begin{cases} -\frac{dy}{dt} + Ay = -C^* C \ p \\ \frac{dp}{dt} + A^* \ p = F F^* \ y \\ p(0) = Q_0 \ y(0) \\ y(s) = \chi \quad , \ \chi \in L^2(\Omega), \\ p(s) = Q(s).\chi \quad . \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous savons qu'alors l'opérateur Q est la solution formelle de l'équation :

(3.5) $$\begin{cases} Q(0) = Q_o \\ \frac{dQ}{dt} + A^* Q + QA + Q\, C^* C\, Q = F\, F^* \end{cases}$$

Nous avons alors la proposition :

<u>Proposition 3.1</u>. Pour chaque

$$s \in]0,T] \quad , \quad \chi \in L^2(\Omega),$$

le système d'équations (3.4) admet une solution unique :

$$y,p \in W(0,T) = \{\varphi \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega)),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

ce qui définit un opérateur linéaire Q(s) vérifiant :

(3.6) $$(Q(s)\,\chi\,,\chi)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad ; \quad \forall\chi \in L^2(\Omega) \quad ;$$

(3.7) $$|Q(s)\,\chi\,|_{L^2(\Omega)} \leq C|\chi|_{L^2(\Omega)}; \quad \forall\chi \in L^2(\Omega) \quad ;$$

(3.8) $$Q(s) = Q^*(s) \ .$$

Pour prouver cette proposition, il est commode d'utiliser un problème de contrôle associé au système (3.4) et qui est le suivant :

(3.9) $$\begin{cases} -\frac{dy}{dt} + Ay = +\, C^*\, u \quad ; \quad t \in [0,s] \\ y(s) = \chi \end{cases}$$

(3.10) $$\min_{u \in L^2(0,s;K)} \quad I(u) = \int_0^s |u(\tau)|_K^2\, d\tau + \int_0^s |F^* y(u)|_G^2\, d\tau + (Q_o\, y(0),\, y(0))_{L^2(\Omega))} \ .$$

De manière analogue afin d'introduire une solution approchée de l'opérateur nous introduisons d'abord une équation d'état approchée qui sere l'équivalent de l'équation (3.9) et un problème de contrôle approché. Soit

$$\text{(3.11)}\quad \begin{cases} -(\frac{\partial y_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(y_h,z_h) = (C^* u_h,z_h) \quad ; \quad \forall z_h \in V_h \quad ; \\ y_h(s) = \chi_h \quad ; \quad \chi_h \in V_h \quad . \end{cases}$$

$$\text{(3.12)}\quad \min_{u_h \in L^2(0,s;K_h)} \quad I_h(u_h) = \int_0^s |u_h|_K^2 \, d\tau + \int_0^s |F^* y_h(u_h)|_G^2 \, d\tau + (Q_{oh}\, y_h(0), y_h(0))_h$$

Nous introduisons le système adjoint approché soit

$$\text{(3.13)}\quad \begin{cases} (\frac{\partial p_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(z_h,p_h) = (F\, F^*\, y_h, z_h) \quad ; \quad \forall z_h \in V_h \\ p_h(0) = Q_{oh}\, y_h(0) \quad . \end{cases}$$

Il est facile de voir alors que le problème de contrôle approché admet une solution unique qui est caractérisée par :

$$\text{(3.14)}\quad (u_h,v_h) + (C \;\; p_h(u_h), v_h) = 0 \quad ; \quad \forall v_h \in K_h \; .$$

Si nous avons l'hypothèse supplémentaire que :

$$C(V_h) \subset K_h \; ,$$

nous pouvons éliminer u_h et nous obtenons le système qui définit l'opérateur approché $Q_h(s)$:

$$\text{(3.15)}\quad \begin{cases} y_h(s) = \chi_h \\ -(\frac{\partial y_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(y_h,z_h) = (C^* C\, p_h, z_h) \\ p_h(0) = Q_{oh}\, y_h(0) \\ (\frac{\partial p_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(z_h,p_h) = (F\, F^*\, y_h, z_h) \\ p_h(s) = Q_h(s)\, \chi_h \quad . \end{cases}$$

Nous supposons que :

$$(3.16)\quad \begin{cases} (Q_{oh}\cdot y_h, z_h)_h = (Q_{oh}\, z_h, y_h) & ; \quad \forall\, y_h,\ z_h \in V_h \\ (Q_{oh}\, y_h,\ y_h)_h \geq 0 & ; \quad \forall\, y_h \in V_h \end{cases}$$

$$(3.17)\quad |Q_{oh}\, y_h|_{L^2(\Omega)} \leq C|y_h|_{L^2(\Omega)} \quad ; \quad \forall\, y_h \in V_h$$

Alors nous avons la proposition équivalente à la proposition 3.1.

Proposition 3.2. Sous les hypothèses (3.16) (3.17) et (1.22) et (2.3), l'opérateur $Q_h(s)$ défini comme l'unique solution du système (3.15) vérifie :

$$(3.18)\quad \begin{cases} (Q_h(s)\, y_h, z_h)_h = (y_h,\ Q_h(s)\, z_h)_h & ; \quad \forall\, y_h,\ z_h \in V_h\ , \\ (Q_h(s)\, y_h,\ y_h)_h \geq 0 & ; \quad \forall\, y_h \in V_h\ ; \\ |Q_h(s)\, y_h|_{L^2(\Omega)} \leq C|y_h|_{L^2(\Omega)} & ; \quad \forall\, y_h \in V_h\ . \end{cases}$$

Pour obtenir une estimation d'erreur entre l'opérateur Q et l'opérateur Q_h nous allons utiliser les problèmes de contrôle associés aux deux systèmes d'équations (3.4) et (3.15).

Introduisons quelques notations.

Nous appelons Ψ la solution de :

$$(3.19)\quad \begin{cases} \Psi(s) = \chi \\ -(\frac{\partial\Psi}{\partial t}, z) + a(\Psi, z) = 0 \quad ; \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

et de même Ψ_h' la solution de :

$$(3.20)\quad \begin{cases} \Psi_h(s) = \chi_h \\ -(\frac{\partial\Psi_h}{\partial t}\ , z_h)_h + a_h(\Psi_h, z_h) = 0 \quad ; \quad \forall\, z_h \in V_h\ . \end{cases}$$

Soit d'autre part ε la solution de

(3.21) $$\begin{cases} \varepsilon(0) = Q_o \, \Psi(0) \\ (\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, z) + a(z,\varepsilon) = (F \cdot F^* \Psi, z) \quad ; \quad \forall z \in H_o^1(\Omega) \end{cases}$$

et ε_h la solution de :

(3.22) $$\begin{cases} \varepsilon_h(0) = Q_{oh} \, \Psi_h(0) \\ (\frac{\partial \varepsilon_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(z_h,\varepsilon_h) = (FF^* \, \Psi_h, z_h) \quad ; \quad \forall z_h \in V_h \end{cases}$$

Nous définissons également $\varphi(u)$ et $\varphi_h(u_h)$ par :

(3.23) $$\begin{cases} \varphi(s) = 0 \\ -(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, z) + a(\varphi, z) = (C^* u, z) \quad ; \quad \forall z \in H_o^1(\Omega). \end{cases}$$

(3.24) $$\begin{cases} \varphi_h(s) = 0 \\ -(\frac{\partial \varphi_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(\varphi_h, z_h) = (C^* u_h, z_h) \; ; \; \forall z_h \in V_h. \end{cases}$$

Ainsi que $\eta(u)$ et $\eta_h(u_h)$ par

(3.25) $$\begin{cases} \eta(0) = Q_o \; \varphi(0) \\ (\frac{\partial \eta}{\partial t}, z) + a(z,\eta) = (FF^* \varphi, z) \quad ; \; \forall z \in H_o^1(\Omega). \end{cases}$$

(3.26) $$\begin{cases} \eta_h(0) = Q_{oh} \; \varphi_h(0) \\ (\frac{\partial \eta_h}{\partial t}, z_h)_h + a_h(z_h,\eta_h) = (FF^* \varphi_h, z_h) \quad ; \quad \forall z_h \in V_h \, . \end{cases}$$

Nous pouvons alors vérifier facilement que le contrôle optimal u associé au système (3.5) est caractérisé par :

(3.27) $$u + C\,\eta(u) + C\,\varepsilon = 0 \,,$$

et que de même u_h est caractérisé par :

(3.28) $$u_h + C\;\eta_h(u_h) + C\,\varepsilon_h = 0 \,.$$

Nous avons alors le lemme :

Lemme 3.1. Nous avons l'estimation d'erreur :

$$\int_0^s |u(\tau)-u_h(\tau)|_K^2 \, d\tau \leq C\Big[\inf_{v_h \in L^2(0,s,K_h)} \Big[\int_0^s |u-v_h|_K^2 \, d\tau + \int_0^s |C(\varepsilon-\varepsilon_h)|_K^2 \, d\tau \tag{3.29}$$

$$+ \int_0^s |C(\eta(u) - \eta_h(v_h))|_K^2 \, d\tau\Big]\Big] \quad .$$

Démonstration. Nous avons

$$\int_0^s |u_h-v_h|_K^2 \, d\tau \leq \int_0^s (u_h-v_h, u_h-v_h)_K \, d\tau + \int_0^s (C\,\eta_h(v_h-u_h), v_h-u_h)_K \, d\tau$$

$$\leq \int_0^s (C\,\varepsilon_h, v_h-u_h) \, d\tau - \int_0^s (C\,\varepsilon, v_h-u_h) \, d\tau$$

$$+ \int_0^s (u-v_h, u_h-v_h) \, d\tau + \int_0^s (C(\eta(u)-\eta_h(v_h)), u_h-v_h) \, d\tau \quad .$$

Nous en déduisons le résultat en utilisant Cauchy-Schartz.

Nous rappelons la définition du domaine d'un opérateur dans un espace

$$D(A,H) = \{u \in H, \; A\,u \in H\}$$

Nous supposons ici que l'opérateur A défini par (1.21) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D(A^\ell, H) = D(A^{*\ell}, H) \quad ; \quad H = L^2(\Omega) \quad ; \quad \forall \ell \in N \; ; & (3.30) \\ D(A^\ell, V') = D(A^{*\ell}, V') \quad , \quad V' = H^{-1}(\Omega) \quad ; \quad \forall \ell \in N \; ; & (3.31) \end{array} \right.$$

et nous supposons d'autre part que A et A^* sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + A\,u = f \\ u(0) = u_o \end{array} \right. \tag{3.32}$$

est un isomorphisme de :

$$(3.33)\quad \begin{cases} u \in L^2(0,T;D(A^{\ell+1},H)) \cap H^{\ell+1}(H)\ , \text{ sur} \\ f \in L^2(0,T;D(A^{\ell},H)) \cap H^{\ell}(H) \times u_0 \in D(A^{\ell+1/2},H) \end{cases}$$

$$\forall \ell \in N$$

et également de :

$$(3.34)\quad \begin{cases} u \in L^2(0,T;D(A^{\ell+1},V')) \cap H^{\ell+1}(V') \quad \text{sur} \\ f \in L^2(0,T;D(A^{\ell},V')) \cap H^{\ell}(V') \times u_0 \in D(A^{\ell+1/2}, V') \end{cases}$$

$$\forall \ell \in N$$

Nous renvoyons à C. BARDOS [1] pour la définition de $A^{1/2}$ quand l'opérateur A n'est pas auto-adjoint et aussi pour des hypothèses suffisantes qu entraînent (3.33) et nous renvoyons à Madame M. TOUGERON-SABLE [15] pour des hypothèses qui entraînent (3.34).

Nous avons alors la proposition :

<u>Proposition 3.3.</u> Sous les hypothèses (3.30) à (3.34) et sous les hypothèses supplémentaires

1) $C^* C \in \mathcal{L}(L^2(0,T;D(A^{\ell},H)) \cap H^{\ell}(H),\ L^2(0,T;D(A^{\ell},V')) \cap H^{\ell}(V'))$
$\cap\ \mathcal{L}(L^2(0,T;D(A^{\ell+1},V')) \cap H^{\ell+1}(V')\ ;\ L^2(0,T;D(A^{\ell},H)) \cap H^{\ell}(H))$;
$F F^* \in \mathcal{L}(L^2(0,T;D(A^{\ell+1},H)) \cap H^{\ell+1}(H),\ L^2(0,T;D(A^{\ell},H)) \cap H^{\ell}(H))$
$\cap\ \mathcal{L}(L^2(0,T;D(A^{\ell+1},V')) \cap H^{\ell+1}(V'),\ L^2(0,T;D(A^{\ell},V')) \cap H^{\ell}(V'))$,
$Q_0 \in \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},H),\ D(A^{\ell+1/2},H)) \cap \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},V'),\ D(A^{\ell+1/2},V')$,

$$\forall \ell \in N$$

alors pour tout s, la solution Q(s) du système (3.4) vérifie :

$$(3.35)\quad Q(s) \in \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},H),\ D(A^{\ell+1/2},H)) \cap \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},V'),\ D(A^{\ell+1/2},V'))$$

2) Si on échange les hypothèses sur $C^* C$ et FF^* et si

$Q_0 \in \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},V'),\ D(A^{\ell+1/2},H)) \cap \mathcal{L}(D(A^{\ell-1/2},H),\ D(A^{\ell+1/2},V'))$.

alors pour tout s, nous avons :

(3.36) $Q(s) \in \mathcal{L}(D(A^{\ell+1/2},V'),\ D(A^{\ell+1/2},H)) \cap \mathcal{L}(D(A^{\ell-1/2},H),\ D(A^{\ell+1/2},V'))$.

Démonstration. Elle sefait par récurrence sur le système (3.4).

Nous supposons en outre que :

(3.37) $$\begin{cases} D(A^{\ell},H) \subset H^{2\ell}(\Omega) \ , \ D(A^{\ell},H) \text{ fermé dans } H^{2\ell}(\Omega). \\ D(A^{\ell},V') \subset H^{2\ell-1}(\Omega) \ , \ D(A^{\ell},V') \text{ fermé dans } H^{2\ell-1}(\Omega). \end{cases}$$

Nous avons les estimations d'erreurs suivantes :

Théorème 3.1. Sous les hypothèses de la proposition 3.2 et des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3, nous avons sous les hypothèses (3.30) à (3.34) et (3.37)

1) Si l'hypothèse 1) de la proposition 3.3 est vérifiée pour :

$$2\ell \geq k+1 \ ,$$

nous avons l'inégalité :

(3.38) $$|Q(s)\chi - Q_h(s)\chi_h|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big[h^k \|\chi\|_{H^k(\Omega)} + |\chi - \chi_h|_{L^2(\Omega)} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(Q_o - Q_{oh})w_h|_{L^2(\Omega)}}{\|w_h\|_{H^k(\Omega)}} \Big]$$

$\forall\, \chi \in D(A^{k/2},H)$ si k impair, $\chi \in D(A^{k+1/2},V')$ si k pair

la constante C étant indépendante de s pour $s \in [0,T]$.

2) Si l'hypothèse 2) de la proposition 3.3 est vérifiée pour

$$2\ell \geq k+1$$

nous avons pour $Q_o = 0$ (si $k' \geq 2$) :

(3.39) $$|Q(s)\chi - Q_h(s)\chi_h|_{L^2(\Omega)} \leq C\big[h^k \|\chi\|_{H^{k-1}(\Omega)} + \|\chi - \chi_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi - \chi_h|_{L^2(\Omega)}\big]$$

3) Si 2) est vérifié et si $k \geq 2$, et $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), K)$:

(3.40) $$|Q(s)\chi - Q_h(s)\chi_h|_{L^2(\Omega)} \leq C\big[h^{k+1} \|\chi\|_{H^k(\Omega)} + \|\chi - \chi_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi - \chi_h|_{L^2(\Omega)}\big]$$

$\forall\, \chi \in D(A^{k/2},H)$ si k impair, $\chi \in D(A^{k+1/2},V')$ si k pair.

Démonstration. Il faut séparer les deux cas selon que k est pair ou impair. Nous exposerons le cas impair, l'autre étant très semblable.

Nous savons d'après la proposition 3.3 que :

$$\chi \in D(A^{k/2},H) \subset H^k(\Omega)$$

entraîne que

$$\Psi \in L^2(0,s;D(A^{k+1/2},H)) \cap H^{k+1/2}(0,s;H)$$
$$\Psi(0) \in D(A^{k/2},H).$$

L'hypothèse sur Q_o entraîne alors :

$$\varepsilon(0) \in D(A^{k/2},H) \quad ,$$

$$\varepsilon \in L^2(0,s;D(A^{k+1/2},H)) \cap H^{k+1/2}(0,s;H) \ .$$

On voit alors facilement que la proposition 3.3 entraîne aussi :

$$y,\ p,\ \varphi,\ \eta \in L^2(0,s;D(A^{k+1/2},H)) \cap H^{k+1/2}(0,s;H)$$

les opérateurs correspondants étant continus, uniformément en $s \in [0,T]$.

Nous pouvons alors dans le lemme 3.1 choisir,

$$v_h = - C\ s_h\ p \qquad ; \qquad v_h \in K_h \subset C(V_h) \ ,$$

et alors nous avons

$$(3.41) \qquad \left(\int_0^s |u - v_h|_K^2\, d\tau\right)^{1/2} \leq C\ h^k ||\chi||_{H^k(\Omega)} \ .$$

En utilisant le théorème 2.1 nous avons par ailleurs :

$$||\Psi-\Psi_h||_{L^2(H^1_o(\Omega))} + |\Psi(0) - \Psi_h(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C[h^k||\chi||_{H^k(\Omega)} + |\chi - \chi_h|_{L^2(\Omega)}] \ .$$

En utilisant cette inégalité et à nouveau le théorème 2.1 nous avons

$$(3.42) \quad \begin{cases} ||\varepsilon-\varepsilon_h||_{L^2(H^1_o(\Omega))} + |\varepsilon(s)-\varepsilon_h(s)|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big[h^k||\chi||_{H^k(\Omega)} + |\chi - \chi_h|_{L^2(\Omega)} \\ \qquad\qquad + \sup\limits_{w_h \in V_h} \dfrac{|(Q_o-Q_{oh})w_h|_{L^2(\Omega)}}{||w_h||_{H^k(\Omega)}}\Big] \end{cases}$$

(avec la convention habituelle de notation si $V_h \not\subset H^k(\Omega)$) .

En utilisant le même théorème et les mêmes techniques et l'estimation (3.42) nous montrons aussi que

$$||\eta(u)-\eta_h(v_h)||_{L^2(0,s;H_0^1(\Omega))} \leq C\Big[h^k||\chi||_{H^k(\Omega)} + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|(Q_0-Q_{0h})w_h|_{L^2(\Omega)}}{||w_h||_{H^k(\Omega)}}\Big]$$

En utilisant alors la majoration (3.29) nous avons

$$(3.43) \qquad \int_0^s |u-u_h|_K^2\, d\tau \leq C\Big[h^k||\chi||_{H^k(\Omega)} + |\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)} + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|(Q_0-Q_{0h})w_h|_{L^2(\Omega)}}{||w_h||_{H^k(\Omega)}}\Big] .$$

Il reste à utiliser encore deux fois le théorème 2.1 et la majoration (3.43) pour obtenir :

$$|p(s)-p_h(s)|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big[h^k||\chi||_{H^k(\Omega)} + |\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)} + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|(Q_0-Q_{0h})w_h|_{L^2(\Omega)}}{||w_h||_{H^k(\Omega)}}\Big]$$

Pour établir la deuxième inégalité du théorème nous procédons de manière analogue mais en utilisant, quand il le faut, les théorèmes 2.2 et 2.3 au lieu du théorème 2.1.

Tout d'abord en utilisant la proposition 3.3. nous savons que

$$\chi \in D(A^{k/2},H)$$

entraîne que :

$$\Psi,\ \varphi,\ y \in L^2(0,s;D(A^{k+1/2},H)) \cap H^{k+1/2}(0,s;H)$$

et que

$$\varepsilon,\ \eta\ ,\ p \in L^2(0,s;D(A^{k+3/2},V')) \cap H^{k+3/2}(0,s;V')$$

les opérateurs correspondants étant continus, uniformément pour $s\in[0,T]$.

Si :

$$C^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega),K))$$

nous pouvons choisir

$$v_h = -C\, s_h\, p \quad ; \quad v_h \in K_h$$

et alors nous avons

$$(3.44) \qquad \int_0^s |u-v_h|_K\, d\tau \leq C\, h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} \qquad .$$

En utilisant alors le théorème 2.2, nous obtenons

$$(3.45)\quad |\Psi-\Psi_h|_{L^2(0,s;L^2(\Omega))} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right].$$

En utilisant alors le théorème 2.3, nous obtenons

$$(3.46)\quad |\varepsilon(s)-\varepsilon_h(s)|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right],$$

et aussi par la même technique,

$$|\varphi(u)-\varphi_h(v_h)|_{L^2(0,s;L^2(\Omega))} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right];$$

d'où,

$$(3.47)\quad |\eta(u)-\eta_h(u_h)|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right].$$

En utilisant alors le lemme 3.1 et les majorations (3.44), (3.46) et (3.47), nous obtenons

$$(3.48)\quad \left(\int_0^s |u-u_h|_K^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right].$$

En utilisant alors à nouveau les théorèmes 2.2 et 2.3, nous obtenons

$$|p(s)-p_h(s)|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[h^{k+1}||\chi||_{H^k(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right].$$

▨

Dans le cas où l'on a plus la propriété

$$C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega),K))$$

on peut encore obtenir un résultat, mais il faut utiliser alors k-1 au lieu de k, et l'on obtient en utilisant le théorème 2.2. et le théorème 2.1.

$$|p(s)-p_h(s)|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[h^{k}||\chi||_{H^{k-1}(\Omega)} + ||\chi-\chi_h||_{H^{-1}(\Omega)} + h|\chi-\chi_h|_{L^2(\Omega)}\right]$$

▨

<u>Corollaire 3.1</u>. Sous les hypothèses du théorème 3.1 nous avons

si 1) est vérifié et k impair

$$(3.49)\quad ||Q(s)-Q_h(s).s_h||_{\mathcal{L}(D(A^{k/2},H),L^2(\Omega))} \leq C\left[h^k + ||Q_0-Q_{0h}||_{\mathcal{L}(D(A^{k/2},H),L^2(\Omega))}\right]$$

si k pair

(3.50) $$\|Q(s)-Q_h(s)\, s_h\|_{\mathcal{L}(D(A^{\ +1/2}, V'), L^2(\Omega))} \leq C\left[h^k + \|Q_o - Q_{oh} s_h\|_{\mathcal{L}(D(A^{k+1/2}, V'), L^2(\Omega))}\right]$$

si 3) est vérifié

k pair et $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), K)$

(3.51) $$\|Q(s)-Q_h(s)\, s_h\|_{\mathcal{L}(D(A^{k/2}, H), L^2(\Omega))} \leq C\, h^{k+1}$$

k impair et $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), K)$

(3.52) $$\|Q(s)-Q_h(s)\, s_h\|_{\mathcal{L}(D(A^{k+1/2}, V'), L^2(\Omega))} \leq C\, h^{k+1} \quad .$$

Nous obtenons en particulier, si 2) ou 3) est vérifié :

(3.53) $$\|Q(s)-Q_h(s)\, s_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \leq C\, h \, .$$

Remarque 3.1. Si FF^* est plus régulier ainsi que Q_o, alors Q est aussi plus régulier. Ceci permet d'espérer l'obtention d'une majoration du type (3.53) en h^k. Mais il est indispensable pour cela d'obtenir l'équivalent du théorème 2.2 donnant une erreur dans un espace du type $L^2(0,T;H^{-k}(\Omega))$. La technique de démonstration de ce théorème permet certainement d'obtenir des résultats dans ce sens. Dans le même ordre d'idées, si nous voulons nous passer de l'hypothèse $Q_o = 0$, dans (3.51) ou (3.52) il faut dans le théorème 2.2 obtenir une erreur dans l'espace $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, ce qui ne permet pas, semble-t-il, la technique de démonstration utilisée.

Remarque 3.2. La majoration (3.53) montre en particulier que Q(s) est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ puisque nous l'approchons dans la norme des opérateurs bornés par un opérateur de rang fini. Ceci résulte aussi, bien sûr, des résultats de régularité et de l'hypothèse fondamentale que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Cette hypothèse nous a servi à établir les estimations d'erreurs initiales sur les éléments finis.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BARDOS — A regularity theorem for parabolic equations J. of Funct. Analysis 7-2 (1971) 311-322.

[2] A. BENSOUSSAM — Filtrage optimal des systèmes linéaires Dunod. Paris (1971).

[3] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART — General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 3 (1972) 177-199.

[4] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART — Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods. Comput. Meth. Appl. Mech. Engin. 1 (1972) 217-249.

[5] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART — The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametre finite element methods. Proc. of O.N.R. Regional symposium 1972. University of Maryland Baltimore county. Ac. Press.

[6] K. DOUGLASS - T. DUPONT — Galerkin methods for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970) 575-626.

[7] T. DUPONT — Some L^2 error estimates for parabolic equations Proc. of O.N.R. Regional symposium 1972. U.M.B.C. Ac. Press.

[8] J.L. LIONS et E. MAGENES — Problèmes aux limites non homogènes. Tomes 1 et 2. Dunod, Paris, 1968.

[9] J.L. LIONS — Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod. Paris, 1968.

[10] J.C. NEDELEC — Schémas d'approximations pour des équations intégro-différentielles de Riccati. Thèse. Université de Paris, 1970 .

[11] P.A. RAVIART — Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires.
J. Math. Pures et Appli. 46 (1967) 11-183.

[12] P.A. RAVIART — The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations.
Proc. of the conference on numerical analysis.
Dublin 1972.

[13] G. STRANG — Approximation in the finite element method.
Numer. Math. 19 (1972) 81-98.

[14] G. STRANG et G. FIX — An analysis of the finite element method.
Prentice Hall. 1973.

[15] Mme M. TOUGERON-SABLE — Régularité pour des équations d'évolution.
Application à la théorie spectrale.
Bollettino U.M.I (4) 7 (1973) 1-111

[16] M.F. WHEELER — A priori L^2 error estimates for Galerkin approximation to parabolic gartial differential equations.
Ph. D. Rice University. 1971.

[17] O.C. ZIENKIEWICZ — The finite element method in engineering science
Mc Graw Hill. London. 1971.

[18] L. TARTAR — Sur l'étude directe d'équations non-linéaires intervenant en théorie du contrôle optimal.
A paraître.