J. Descloux

Régularisation intérieure et convergence locale d'approximations d'équation elliptiques par éléments finis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___S4_A4_0>

REGULARISATION INTERIEURE ET CONVERGENCE LOCALE D'APPROXIMATIONS D'EQUATION ELLIPTIQUES PAR ELEMENTS FINIS

J. DESCLOUX

1. INTRODUCTION

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et le produit scalaire réel $(u,v) = \int_\Omega uv$. Soient $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta v$ une forme bilinéaire elliptique réelle et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On suppose que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ et f soient $C_\infty(\bar{\Omega})$.

On considère u satisfaisant à la relation

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall\ v \in \overset{o}{H}_m(\Omega) \ ; \tag{1}$$

d'après un résultat classique (cf [8]), on sait que pour tout entier k et tout $\Lambda \subset \Omega$, il existe c telle que

$$\|u\|_{k,\Lambda} \leq c(\|u\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega}) \ ; \tag{2}$$

en particulier cette relation implique que $u \in C_\infty(\Omega)$; ici $\| \ \|_j$ est la norme de Sobolev dans $H_m = W_2^m$; pour $k < 0$, on pose $\| \ \|_k = \| \ \|_0$.

On peut se poser la question de l'existence de relations similaires à (2) dans le cas de versions discrétisées de (1). Thomée et Westergren [13] ont obtenu des résultats importants pour des discrétisations par différences finies ; naturellement dans (2), les normes de Sobolev doivent être remplacées par des normes adéquates de fonctions définies sur des grilles ; les deux auteurs en ont déduit de plus des résultats de convergence pour les dérivées.

Ici, nous nous intéressons aux approximations de Galerkin de (1) par éléments finis. On remarque tout d'abord que l'on ne peut pas espérer qu'une approximation de Galerkin soit C_∞ ou même qu'elle appartienne à un espace de Sobolev d'ordre plus élevé que l'espace de type élément fini dans lequel on travaille ; en fait, on sait que l'on a tout intérêt (dans le cas "conforme") à choisir l'espace de type élément fini dans H_m. On est donc conduit à introduire un espace et des normes ad hoc.

DEFINITIONS

Pour $\Lambda \subset \Omega$ ouvert, $C_I(\Lambda)$ est l'ensemble des fonctions v telles que :

a) il existe les ensembles ouverts disjoints $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_N$ dépendant de v avec $\overline{\Lambda} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Lambda}_i$,

b) les restrictions v_i de v à Λ_i sont de classe $C_\infty(\overline{\Lambda}_i)$.

On pose alors $\|v\|^2_{k,\Lambda} = \sum_{i=1}^{N} \|v_i\|^2_{k,\Lambda_i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Lambda_i} (D^\alpha v)^2$

$\overset{o}{C}_I(\Lambda)$ est le sous-ensemble des fonctions de $C_I(\Lambda)$ dont le support est dans Λ .

Les espaces de type élément fini que nous considérerons seront des parties de C_I ce qui exclut en particulier les éléments rationnels ; toutefois la généralisation des résultats à ces éléments ne devrait pas poser de difficultés.

Les résultats de convergence locale sont en fait beaucoup plus intéressants que des relations du type (2) pour des approximations par éléments finis. Pour en saisir la portée, il faut imaginer que le problème considéré ne porte pas sur Ω lui-même mais sur un domaine $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de frontière arbitraire et tel que les fonctions $a_{\alpha\beta}$ et f ne sont pas nécessairement régulières sur $\tilde{\Omega} - \Omega$.
Si W_h est l'approximation de u par éléments finis (h paramètre de finesse), on montre que $\lim\limits_{h\to 0} \|u - W_h\|_{k,\Lambda} = 0$, $\Lambda \subset\subset \Omega$, $k = 1,2,\ldots,r$ où r dépend de l'espace de type élément choisi. Nitsche et Schatz [11] ont obtenu des résultats plus forts du type $\|u - W_h\|_{k,\Lambda} = O(h^{r-k})$ en faisant l'hypothèse supplémentaire que la frontière de $\tilde{\Omega}$ est régulière.

2. ELEMENTS FINIS

On considère une famille $\mathcal{S}$ d'espace S de type élément fini sur Ω. Si $\Lambda \subset \Omega$ et $S \in \mathcal{S}$, $\overset{o}{S}(\Lambda)$ désigne la partie de S à support dans Λ.

On introduit trois hypothèses relatives à $\mathcal{S}$. r désigne un nombre fixe $>m$.

<u>H1</u> Soit $\Lambda \subset\subset \Omega$. Alors il existe $h_0 > 0$ et c tels que pour tout $u \in \overset{o}{C}_\infty(\Lambda)$ et tout $S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ il existe $v \in \overset{o}{S}(\Omega)$ avec

$$\|u-v\|_{k,\Omega} \leq ch^{\ell-k} \|u\|_{\ell,\Lambda} \quad 0 \leq k \leq \ell \leq r \ ;$$

c est une constante absolue ; h_0 dépend de Λ .

H1 est une version particulière du théorème fondamental d'approximation par éléments finis ; voir par exemple [4], [12] pour les éléments de type "ingénieur".

H2 Soit $\Lambda \subset \Omega$, $\omega \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Lambda)$. Il existe $h_0 > 0$ et c tels que pour tout $S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ et tout $u \in S$ il existe $v \in \overset{\circ}{S}(\Lambda)$ avec

$$\|\omega u - v\|_{k,\Omega} \leq ch \|u\|_{k,\Lambda} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,r-1 \; ;$$

c et h_0 dépendent de ω .

Cette propriété a été introduite par Nitsche et Schatz [10]. Elle est discutée dans [6] pour des éléments triangulaires polynomiaux et pour d'autres types d'éléments par Nitsche et Schatz dans des papiers à paraître.

H3 (Inverse assumption ; voir [9], [6]).
Soit $\Lambda \subset\subset \Phi \subset\subset \Omega$. Il existe $h_0 > 0$ et c tels que pour tout $u \in S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ on a

$$\|u\|_{k+\rho,\Lambda} \leq ch^{-\rho} \|u\|_{k,\Phi} \quad , \quad k+\rho \leq r \; ;$$

c et h_0 dépendent de Λ et Φ .

A titre d'exemple, considérons une collection $\mathcal{S}$ d'éléments simpliciaux de l'un des types introduits par Zlamal [2], Ciarlet-Raviart [3], Dupuis - Goël [7]. Pour un simplexe σ , soient

$d_1(\sigma)$ son diamètre et $d_2(\sigma)$ le diamètre du cercle inscrit ; on introduit les trois propriétés : P1) $d_1(\sigma) / d_2(\sigma) \geq$ const pour tous les simplexes de tous les $S \in \mathcal{S}$; P2) $\forall S \in \mathcal{S}$, {polynômes degré r-1} $\subset S$; P3) $\forall S \in \mathcal{S}$, si σ_1 et σ_2 sont des simplexes relatifs au même S, alors $d_1(\sigma_1) / d_1(\sigma_2) \geq$ const (indépendante de S). Alors P1 et P2 impliquent H1 et H2 alors que P1 et P3 impliquent H3.

3. REGULARISATION INTERIEUR ET CONVERGENCE LOCALE

Les théorèmes qui suivent sont démontrés dans un papier à paraître.

Dans ce paragraphe on suppose :

a) la fonction f et les coefficients $a_{\alpha\beta}$ de la forme bilinéaire $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u\, D^\beta v$ sont $C_\infty(\bar\Omega)$;

b) $a(u,v)$ est elliptique, i.e $\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta > 0$ $\forall \xi \neq 0$, $x \in \bar\Omega$;

c) $a(u,v)$ est coercive sur $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ i.e $a(u,u) \geq \gamma\|u\|_{m,\Omega}$ $\forall u \in \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$, $\gamma > 0$.

Le premier résultat peut être interprété comme une propriété de consistance.

THEOREME 1

On suppose H1 et H2. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$. Il existe c et h_0 tels que pour tout $S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ et tout $w \in S$ tel que $a(w,u) = 0$ $\forall v \in \overset{\circ}{S}(\Omega)$ on a

$$|a(w,\varphi)| \leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega} \|\varphi\|_{m,\Omega} \quad \forall\ \varphi \in \dot{\overset{\circ}{H}}_m(\Gamma)\ .$$

Désignons pour la suite par c une constante générique indépendante de $S \in \mathcal{S}$. Plaçons-nous dans les conditions du théorème 1 et soit $\Lambda \subset\subset \Gamma$. Montrons qu'il existe $\dot{u} \in \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ tel que
1) $a(u,\varphi) = 0 \quad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{H}_m(\Lambda)$, 2) $\|u - w\|_{m,\Gamma} \leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega}$.
Soit $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$, $\psi(x) = 1 \quad x \in \Gamma$ et $\omega \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Gamma)$, $\omega(x) = 1 \quad x \in \Lambda$.
Vérifions que $u \in \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ défini par la relation $a(u,\varphi) =$
$= a(\psi w,(1-\omega)\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ satisfait bien aux conditions 1) et 2). Puisque $1-\omega = 0 \quad x \in \Lambda$, la condition 1) est satisfaite. Quant à la condition 2), elle est une conséquence de la coercivité de a et du théorème 1 :

$$\gamma\|u - \psi w\|^2_{m,\Omega} \leq a(u- \psi w, u- \psi w) = a(u,u- \psi w) - a(\psi w,u- \psi w)$$
$$= a(\psi w,(1-\omega)(1 - \psi w)) - a(\psi w,u- \psi w) = - a(\psi w, (u- \psi w))$$
$$= -a(w,\omega(u- \psi w)) \leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega}\|\omega(u- \psi w)\|_{m,\Omega}$$
$$\leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega} \|u- \psi w\|_{m,\Omega} \ ;$$

On en conclut que $\|u- \psi w\|_{m,\Omega} \leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega}$ et finalement que $\|u-w\|_{m,\Gamma} \leq ch^{r-m} \|w\|_{m,\Omega}$. Plus généralement, on a le théorème suivant.

THEOREME 2

On suppose H1, H2 et H3. Soit $\Lambda \subset\subset \Omega$. Alors il existe c et $h_0 > 0$ tels que si $w \in S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ satisfait à la relation $a(w,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{S}(\Omega)$, il existe $u \in \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ avec $a(u,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{H}_m(\Lambda)$ et $\|u-w\|_{k,\Lambda} \leq ch^{r-k}(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega})$
$k = m,m+1,\dots,r$.

REMARQUE

Pour $k = m$, le théorème 2 est valable sans H3.

Plaçons-nous dans les conditions du théorème 2, soit $\Gamma \subset\subset \Lambda$.

Le théorème 2 implique en particulier : $\|u\|_{m,\Lambda} \leq c(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega})$.

D'après le théorème classique de régularité, on a

$$\|u\|_{k,\Gamma} \leq c(\|u\|_{m,\Lambda} + \|f\|_{k-2m,\Omega}) \leq c(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega}) ;$$

par le théorème 2, on obtient

$$\|w\|_{k,\Gamma} \leq \|u\|_{k,\Gamma} + \|u-w\|_{k,\Gamma} \leq c(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega}) , \quad k = m, m+1, \dots, r .$$

Cette dernière relation est précisément l'analogue discrétisé de la relation (2) citée dans l'introduction.

Du théorème 2, on déduit également le théorème d'approximation locale suivant.

THEOREME 3

On suppose H1, H2, H3. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$. Il existe $h_0 > 0$ et c tel que si $u \in H_m(\Omega)$ avec $a(u,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{o}{H}_m(\Omega)$, $w \in S \in \mathcal{S}$ avec $h(S) < h_0$ et $a(w,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{o}{S}(\Omega)$, on a

$$\|u-w\|_{k,\Gamma} \leq c\{\|u-w\|_{m,\Omega} + h^{r-k}\{\|u\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega}\}\} .$$

DEMONSTRATION

Soit Λ tel que $\Gamma \subset\subset \Lambda \subset\subset \Omega$. D'après le théorème 2, il existe $v \in \overset{o}{H}_m(\Omega)$ tel que $a(v,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{o}{H}_m(\Lambda)$ et

$$\|v-w\|_{k,\Lambda} \leq ch^{r-k}(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega}), \quad k = m, \dots, r . \qquad (3)$$

Puisque $a(u-v,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{o}{H}_m(\Lambda)$ on a, d'après le théorème classique de régularité :

$$\|u-v\|_{k,\Gamma} \leq c\ \|u-v\|_{m,\Lambda}\ ,\ k = m,\ldots,r\ . \tag{4}$$

De (3) et (4), on déduit :

$$\|u-v\|_{k,\Gamma} \leq c\|u-v\|_{m,\Lambda} \leq c\{\|u-w\|_{m,\Lambda} + \|w-v\|_{m,\Lambda}\}$$

$$\leq c\{\|u-w\|_{m,\Lambda} + h^{r-k}(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega})\ ,\ k = m.,,,.r\ ;$$

$$\|u-w\|_{k,\Gamma} \leq \|u-v\|_{k,\Gamma} + \|v-w\|_{k,\Gamma} \leq c\{\|u-w\|_{m,\Lambda} + h^{r-k}(\|w\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega})\}$$

$$\leq c\{\|u-w\|_{m,\Omega} + h^{r-k}(\|u\|_{m,\Omega} + \|f\|_{k-2m,\Omega})\}$$

4. APPROXIMATION L^2

Pour le cas particulier $m = 0$, $a(u,v) = (u,v)$, on peut obtenir de façon simple un théorème plus fort que le théorème 3 (cf [10]).

Soit $\tilde{\Omega} \supset \Omega$, $\tilde{\mathcal{S}}$ une collection d'espaces $\tilde{S}$; à chaque $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{S}}$ est associé un $S \in \mathcal{S}$ tel que tout $\tilde{v} \in \tilde{S}$ est l'extension à $\tilde{\Omega}$ d'un $v \in S$; on pose $h(\tilde{S}) = h(S)$. Soit $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ dont la restriction f à Ω est de classe $C_\infty(\bar{\Omega})$. Soit $\tilde{w} \in \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{S}}$ la meilleure approximation L^2 de $\tilde{f}$ dans $\tilde{S}$, c'est-à-dire $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{w}\tilde{v} = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}\tilde{v}\quad \forall\ \tilde{v} \in \tilde{S}$. On a alors

THEOREME 4

Soit $\Lambda \subset\subset \Omega$. Si H1, H2 et H3 sont satisfaits, il existe $h_0 > 0$ et c tels que si $h(\tilde{S}) < h_0$ alors

$$\|\tilde{f}-\tilde{w}\|_{k,\Lambda} \leq ch^{r-k}(\|\tilde{f}\|_{0,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{f}\|_{r,\Omega})\ ,\ k = 0,1,\ldots,r\ .$$

DEMONSTRATION

a) Supposons $\tilde{f}(x) = 0 \quad x \in \Gamma$ où $\Lambda \subset\subset \Gamma \subset\subset \Omega$ et montrons que l'hypothèse H2 implique l'existence de constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ telles que $\|\tilde{w}\|_{0,\Lambda} \leq c_k h^k \|\tilde{f}\|_{0,\tilde{\Omega}}$, $k = 0,1,2,\ldots$. Soient Θ_1 et Θ_2 tel que $\Lambda \subset\subset \Theta_1 \subset\subset \Theta_2 \subset\subset \Gamma$ et $\omega \in \overset{o}{C}_\infty(\Theta_1)$ avec $\omega(x) = 1 \quad x \in \Theta_2$. On a $(\tilde{w}, v) = 0 \quad \forall\, v \in \overset{o}{S}(\Theta_1)$. D'autre part H2 implique l'existence de $\varphi \in \overset{o}{S}(\Theta_1)$ tel que $\|\omega\tilde{w} - \varphi\|_{0,\Theta_1} \leq ch\, \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_1}$. On a alors

$$\|\tilde{w}\|^2_{0,\Theta_2} \leq (\omega\tilde{w}, \tilde{w}) = (\omega\tilde{w} - \varphi, \tilde{w}) \leq \|\omega\tilde{w} - \varphi\|_{0,\Theta_1} \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_1} \leq ch\, \|\tilde{w}\|^2_{0,\Theta_1} ,$$

et par conséquent $\|\tilde{w}\|_{0,\Theta_2} \leq ch^{\frac{1}{2}} \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_1}$. En introduisant Θ_3 tel que $\Lambda \subset\subset \Theta_3 \subset\subset \Theta_2$ on obtient de même $\|\tilde{w}\|_{0,\Theta_3} \leq$ $\leq ch^{\frac{1}{2}} \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_2}$ et $\|\tilde{w}\|_{0,\Theta_3} \leq ch\, \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_1}$. Par un procédé d'induction, on obtient $\|\tilde{w}\|_{0,\Lambda} \leq c_k h^k \|\tilde{w}\|_{0,\Theta_1} \leq c_k h^k \|\tilde{f}\|_{0,\tilde{\Omega}}$.

b) Soit, pour le cas général, $\omega \in \overset{o}{C}_\infty(\Omega)$, $\omega(x) = 1 \quad x \in \Gamma$. On pose $f_1 = \omega\tilde{f}$, $f_2 = (1-\omega)\tilde{f}$ et l'on a $f_1 + f_2 = \tilde{f}$; soient w_1 et w_2 les approximation L^2 de f_1 et f_2 ; on a $\tilde{w} = w_1 + w_2$. Par un procédé classique, H1 et H3 impliquent $\|f_1 - w_1\|_{k,\Lambda} \leq ch^{r-k} \|\tilde{f}\|_{r,\Omega}$. H3 et a) impliquent $\|f_2 - w_2\|_{k,\Omega} \leq ch^{r-k} \|\tilde{f}\|_{0,\tilde{\Omega}}$.

R E F E R E N C E S

[1] BRAMBLE J.H. HILBERT S.R. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation.
SIAM J. Numer. Anal. Vol. 7, No 1 , 1970, pp. 112-124.

[2] BRAMBLE J.H. ZLAMAL M. Triangular elements in the finite element method. Math. Comp. 24, 1970, pp. 809 - 820.

[3] CIARLET P.G. RAVIART P.A. The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element method.
The Mathematical Foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. Academic Press, New York, London 1972.

[4] CLEMENT Ph. PINI F. Approximation by finite element functions using regularization.
Report EPFL, Dept. Math. Lausanne 1973.

[5] DESCLOUX J. Some properties of approximations by finite elements.
Report EPFL, Dept. Math. Lausanne 1969.

[6] DESCLOUX J. Two basic properties of finite elements.
Report EPFL, Dept. Math. Lausanne 1973.

[7] DUPUIS G. GOËL J.J. Elements finis raffinés en élasticité bidimensionnelle.
ZAMP, vol. 20, Fasc. 6, 1969, pp. 858 - 881

./.

[8] FICHERA G. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems.
Lecture Notes in Mathematics 8, 1965, Springer-Verlag Berlin.

[9] NITSCHE J. Umkehrsätze für Spline-Approximationen.
Compositio Mathematica, Vol. 21, Fasc. 4, 1969, pp. 400 - 416.

[10] NITSCHE J., SCHATZ A. On local approximation properties of L_2-projection on spline-subspaces.
Applicable Analysis 1972, Vol. 2, pp. 161 - 168.

[11] NITSCHE J. Interior error estimates of projection methods.
Proceedings of Equadiff III. J.E. Purkyne University. Brno 1973.

[12] STRANG G. Approximation in the finite element method.
Num. Math. 19, 1972, pp. 81 -98.

[13] THOMEE V., WESTERGREN B. Elliptic difference equations and interior regularity.
Num. Math. 11, 1968, pp. 196 - 210.

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Av. de Cour 26, 1007 Lausanne
Suisse