Marie-France Allain

Sur quelques types d'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 3
« Séminaire de probabilités », , p. 1-82
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___3_A4_0>

SUR QUELQUES TYPES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

par

Marie-France ALLAIN

TABLE DES MATIERES

-:-

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier quelques types d'approximation de la solution d'une équation différentielle stochastique (par rapport au mouvement Brownien), ceci en construisant des approximations du mouvement Brownien auxquelles on associe des équations différentielles et en montrant que la suite des solutions de ces équations converge vers la solution de l'équation différentielle stochastique. Les notions de solution, d'approximation et de convergence sont précisées dans chaque chapitre.

Dans le chapitre I, on considère des approximations par trajectoires. Les approximations du mouvement Brownien sont des processus à trajectoires continûment différentiables par morceaux, la convergence a lieu simplement ou uniformément par trajectoires. Il s'agit d'une extension d'un résultat de Wong et Zakaî : ceux-ci ont démontré dans le cas unidimensionnel que pour des approximations $((y^n_\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ et les équations correspondantes :

$$(1)^n \quad x^n_t = \int_o^t \sigma(x^n_s,\ s)\ dy^n_s + \int_o^t m(x^n_s,\ s)\ ds$$

$\lim\limits_n\ x^n_\cdot$ existe presque surement mais cette limite notée $\bar{x}_\cdot$ est solution de

$$(2) \quad \bar{x}_t = \int_o^t \sigma(\bar{x}_s,\ s)\ d\beta_s + \int_o^t m(\bar{x}_s,\ s)\ ds + \frac{1}{2}\int_o^t D_{10}\sigma(\bar{x}_s,s)\sigma(\bar{x}_s,s)\ ds$$

On généralise ce résultat au cas multidimensionnel avec une hypothèse essentielle : $\sigma(x,s)$ est strictement elliptique ($\sigma(x,s) \geq \alpha > 0$ dans le cas unidimensionnel) et la forme différentielle associée au champ de matrice σ^{-1} est intégrable.

Au chapitre II, les approximations sont linéaires, mais on admet que σ puisse être dégénérée. On démontre alors en généralisant un résultat de Kunita [5] la convergence en moyenne quadratique de la suite des solutions des équations $(1)^n$ vers la solution de l'équation (2) en étendant ce résultat au cadre d'équations sur des espaces de Hilbert. On impose cependant à σ et ses dérivées d'ordre 1 et 2 des conditions de Lipschitz et de bornitude.

Au chapitre III, les approximations du mouvement Brownien sont des processus de saut (purs ou recentrés) à accroissements indépendants et stationnaires et la convergence en lieu en loi (c'est-à-dire que les lois correspondantes convergent sur l'espace D).

Dans ce cas, sous des hypothèses de Lipschitz et de bornitude, pour les coefficients on démontre que la suite des solutions de

$$(1)^n \qquad x_t^n = \int_o^t \sigma(x_s^n, s)\, dy_s^n + \int_o^t m(x_s^n, s)\, ds$$

converge en loi vers la solution de

$$(1) \qquad x_t = \int_o^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_o^t m(x_s, s)\, ds$$

on utilise le fait que les équations $(1)^n$ sont également des équations stochastiques et que $(x_t^n)_{t \in [0,T]}$ est un processus de Markov.

Je remercie vivement Monsieur METIVIER sous la direction duquel ce travail a été réalisé, ainsi que Monsieur PELLAUMAIL pour l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie également Monsieur GUIVARC'H d'avoir bien voulu faire partie du jury.

<u>Chapitre I</u>

UNE EXTENSION MULTIDIMENSIONNELLE D'UN THEOREME DE WONG ET ZAKAI SUR L'APPROXIMATION TRAJECTORIELLE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre, on étudie l'approximation trajectorielle de la solution d'une équation différentielle stochastique par rapport au mouvement Brownien. Pour cela, on définit des approximations trajectorielles, continues du mouvement Brownien, auxquelles on associe des équations différentielles ordinaires, on démontre que la suite correspondante des solutions converge et que la limite est solution d'une équation différentielle stochastique.

Plus précisément, on considère :

- un Brownien $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}, P, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$;
- l'équation (1) $x_t = \int_0^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s, s)\, ds$;
- $((y_t^n(\omega))_{t \in [0,T]})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations telles que $y_\bullet^n(\omega)$ soit continûment différentiable par morceaux et $y_\bullet^n(\omega)$ converge vers $\beta_\bullet(\omega)$ simplement (resp. uniformément) ;

- la suite d'équations correspondantes :

$$(1)^n \qquad x_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n,s)\ dy_s^n + \int_0^t m(x_s^n,s)\ ds \quad .$$

Wong et Zakaï [18] ont considéré cette situation dans le cas unidimensionnel et sous des conditions de régularité des coefficients (notamment conditions de Lipschitz), ils ont montré que $x^n_{\cdot}(\omega)$ converge simplement (resp. uniformément) vers une limite $\bar{x}_{\cdot}(\omega)$ et que $(\bar{x}_t(\omega))_{t\in[0,T]}$ est solution de l'équation

$$(2) \qquad \bar{x}_t = \int_0^t \sigma(x_s,s)\ d\beta_s + \int_0^t \tilde{m}(x_s,s)\ ds$$

$$\text{avec} \qquad \tilde{m}(x,s) = m(x,s) + \frac{1}{2} D_{10}\ \sigma(x,s)\sigma(x,s).$$

C'est ce résultat que l'on veut étendre au cas multidimensionnel avec des coefficients qui ne sont pas nécessairement lipschitziens; mais à la différence des hypothèses qui seront faites sur les coefficients dans le chapitre suivant et qui sont essentiellement des conditions de dérivabilité et bornitude, assurant l'existence et l'unicité, on introduit des hypothèses automatiquement vérifiées dans le cas unidimensionnel d'intégrabilité de la forme différentielle associée au champ de matrice σ^{-1}.

Le paragraphe I consiste en rappels sur les définitions, les conditions d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle stochastique par rapport au mouvement Brownien.

Le paragraphe II contient un rappel des résultats de Wong et Zakaï, la définition des approximations et les hypothèses générales.

Le paragraphe III débute par le cas particulier de l'équation (1) $x_t = \int_o^t \sigma(x_s)\, d\beta_s$ qui met en évidence la forme du terme complémentaire dans le cas multidimensionnel.

On y démontre ensuite essentiellement deux théorèmes :

Le théorème III-3 est l'extension directe des résultats de Wong et Zakaï pour des approximations qui convergent simplement et des coefficients lipschitziens.

Dans le théorème III-2 on considère des approximations équicontinues et on prouve la convergence uniforme de $(x^n_{\cdot}(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ par trajectoires vers une limite notée $(\overline{x}_{\cdot}(\omega))$ qui est solution d'une équation du type (2) en un sens qui sera précisé.

Dans ce cas, les coefficients ne sont pas nécessairement lipschitziens, mais les hypothèses assurent l'unicité en trajectoires de la solution de (2).

Enfin le paragraphe III-4 contient diverses extensions, notamment à un cas où $\sigma(x,s)$ n'est pas strictement elliptique.

$\boxed{\S\ \mathrm{I}}$

RAPPELS DES CONDITIONS D'EXISTENCE ET D'UNICITE DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DANS LE CAS MULTIDIMENTIONNEL

Soit l'équation différentielle stochastique d-dimensionnelle.

$$(1) \qquad x_t - x_o = \int_o^t \sigma(x_s, s)\, d\, \beta_s + \int_o^t m(x_s, s)\, ds$$

où $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

$m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$

m et σ boréliennes.

Dans ce paragraphe nous allons préciser ce que nous entendons par solution d'une telle équation et par unicité de la solution, puis nous donnerons des conditions d'existence et d'unicité.

Les notions de solution faible ou forte et d'unicité trajectorielle ou en loi seront celles données par Yamada et Watanabe [21]. Les conditions d'existence seront celles données par Itō [4] Stroock-Varadhan [14] et Skorokhod [16].

Comme nous étudions l'approximation par trajectoire, nous ne donnerons essentiellement que les conditions suffisantes d'unicité trajectorielle pour la solution d'une équation du type (1) telles qu'on peut les trouver dans les articles de Yamada et Watanabe [21].

I-1 DEFINITION DES SOLUTIONS ET DE L'UNICITE

I-1-1 Définition des solutions

Définition 1 : Solution faible

- Par solution faible on désigne : un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]})$ et un couple de processus $\mathcal{X} = ((x_t)_{t \in [0,T]}, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$, vérifiant

1) (x_t) et (β_t) sont $\mathcal{F}_t$ mesurables

2) x_t est p.s continu en t

3) $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$ est un mouvement Brownien et $\beta_0 = 0$

4) $\int_0^t |\sigma(x_s,s)|^2 \, ds < \infty$ et $\int_0^t |m(x_s,s)| \, ds < \infty$ p.s

5) $\mathcal{X} = ((x_t)_{t \in [0,T]}, (\beta_t)_{t \in [0,T]}$ vérifie p.s

$$x_t - x_0 = \int_0^t \sigma(x_s,s) \, d\beta_s + \int_0^t m(x_s,s) \, ds.$$

Définition 2 : Solution au sens fort :

Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$ un mouvement Brownien on désigne par solution forte un processus $(x_t)_{t \in [0,T]}$ vérifiant

1) x_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable

2) x_t est p.s cont en t

3) $\int_0^t |\sigma(x_s,s)|^2 \, ds < \infty$ et $\int_0^t |m(x_s,s)| \, ds < \infty$ p.s

4) $(x_t)_{t \in [0,T]}$ vérifie p.s

$$x_t - x_0 = \int_0^t \sigma(x_s,s) \, d\beta_s + \int_0^t m(x_s,s) \, ds$$

I-1-2 Définitions de l'unicité

Définition 3 : Unicité trajectorielle si pour 2 solutions $\mathcal{X} = ((x_t), (\beta_t)_{t \in [0,T]})$ et $\mathcal{X}' = ((x'_t), (\beta'_t)_{t \in [0,T]})$ définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ telles que $x_0 = x'_0$ et $\beta_t = \beta'_t$ alors $x_t = x'_t$ p.s

Définition 4 : Unicité en loi si pour deux solutions $\mathcal{X} = ((x_t), (\beta_t))$ et $\mathcal{X}' = ((x'_t), (\beta'_t))$ telles que $x_0 = x$ et $x'_0 = x$ (p.s) alors les lois de (x_t) et (x'_t) sur l'espace canonique $(W, B(W))$ coïncident.

I-2 CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DES SOLUTIONS

I-2-1 Existence d'une solution au sens fort

Dans la théorie classique de Itō, les coefficients sont supposés continus et vérifient la condition de Lipschitz :

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in [0,T]$$

$$|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x-y|$$
$$|m(x,t) - m(y,t)| \leq K|x-y|$$

il y a dans ce cas existence d'une solution forte, unique en trajectoire, ce qui se démontre par une méthode de point fixe.

Skorokhod, dans [16] donne plusieurs théorèmes d'existence pour des équations comportant des intégrales par rapport à un processus de saut. On peut en extraire le résultat suivant :

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}), P\ (\beta_t)_{t \in [0,T]})$ un mouvement Brownien, σ et m boréliennes telles que :

1) pour tout C il existe L_C tel que

$$T|m(x,s) - m(y,s)|^2 + |\sigma(x,s) - \sigma(y,s)|^2 \leq L_C |x-y|^2$$

pour tout x et y de $\mathbb{R}^d$: $|x| \leq C$ et $|y| < C$

2) il existe K tel que

$$T|m(x,s)|^2 + |\sigma(x,s)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall s \in [0,T]$$

alors l'équation (1) possède une solution unique continue.

I-2-2 Existence d'une solution au sens faible

- Le cas le plus connu est celui de Stroock-Varadhan [14] où l'existence de la solution est liée à l'existence d'une solution pour un problème de martingales.

Théorème : Soient σ bornée, continue, uniformément elliptique et m borélienne bornée, alors l'équation (1) possède une solution faible unique en loi.

- Dans le livre de Skorokhod on trouve également le théorème suivant :

Théorème : Sous les hypothèses σ et m continues par rapport à l'ensemble des variables et vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^d \\ \forall t \in [0,T] \end{array}\right\} \qquad |\sigma(x,t)|^2 + |m(x,t)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

il y a existence d'une solution au sens faible pour l'équation (1)

I-3 CONDITIONS SUFFISANTES D'UNICITE TRAJECTORIELLE DES SOLUTIONS

Dans le cas lipschitzien, l'unicité trajectorielle se démontre en même temps que l'existence de la solution ; dans les théorèmes d'existence de solution faible, il s'agit en fait d'existence en loi et l'unicité trajectorielle doit être étudiée séparément. C'est ce qu'ont étudié Yamada et Watanabe dans [21]. Nous en donnons les résultats suivants :

Théorème 1 : Soient ρ et $\overline{\rho}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continues et croissantes, telles que :

1) $\rho(0) = \overline{\rho}(0) = 0$

2) $\int_{0+} (\rho^2(u)\ u^{-1} + \overline{\rho}\ (u))^{-1}\ du = +\infty$

3) $\rho^2(u)\ u^{-1} + \overline{\rho}(u)$ est concave

4) $|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leqslant \rho(|x-y|)$

$|m(x,t) - m(y,t)| \leqslant \overline{\rho}(|x-y|)$

alors il y a unicité trajectorielle pour l'équation

$$x_t - x_o = \int_0^t \sigma(x_s,s)\ d\ \beta_s + \int_0^t m(x_s,s)\ ds.$$

Remarque :

Ce théorème est pour $d \geqslant 3$ le meilleur possible au sens suivant : si $\int_{0+} \xi\ \rho^{-2}\ (\xi)\ d\ \xi < \infty$ et si ρ est sous-additive alors il existe σ telle que $|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leqslant \rho\ (|x-y|)$ mais il n'y a pas d'unicité trajectorielle pour l'équation $x_t - x_o = \int_0^t \sigma(x_s,s)\ d\ \beta_s$

Théorème 2 : Dans le cas $d = 1$ ou $\sigma(x,t)$ du type :

$$\sigma^{ij}\ (x,t) = \delta_{ij}\ \sigma^i(x_i,t)$$

on a le théorème d'unicité trajectorielle suivant :

Soient ρ et $\overline{\rho}$ définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continues, croissantes telles que

1) $\int_{0+} \rho^{-2}(u)\ du = +\infty$

2) $\bar{\rho}$ est concave et $\int_{0+} \bar{\rho}^{-1}(u)\ du = +\infty$

3) $\forall i \quad |\sigma^i(u,t) - \sigma^i(v,t)| \leq \rho\ (|u-v|)$

$\quad\quad | m(u,t) - m\ (v,t)| \leq \bar{\rho}\ (|u-v|)$

ɔrs il y a unicité trajectorielle pour l'équation

$$x_t - x_o = \int_0^t \sigma(x_s,s)\quad d\beta_s + \int_0^t m(x_s,s)\ ds$$

ans ce cas on peut avoir $\rho(u) = \sqrt{u})$

Théorème 3 : Dans le cas $d = 2$ et $\sigma^{ij}(x,t) = \delta ij\ a(x,t)$.

Soit ρ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ croissante telle que

1) $\int_{0+} \rho^{-2}(u).u \log \frac{1}{u}\ du = +\infty$

2) $G(u) = u^3\ e^{\frac{2}{u}}\ \rho^2\ (e^{-\frac{1}{u}})$ est concave sur un intervalle $(0,u_o)$

3) $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \rho(|x-y|)$

lors il y a unicité trajectorielle pour l'équation $x_t - x_o = \int_0^t \sigma(x_s,s)\ d\beta_s$

$\boxed{\S\ \text{II}}$

RAPPEL DES RESULTATS DE WONG ET ZAKAI
DEFINITIONS, NOTATIONS ET HYPOTHESES GENERALES

II-1 RAPPELS DES RESULTATS DE WONG ET ZAKAI DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ et un mouvement Brownien $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$ ainsi qu'une suite d'approximations (y_t^n) de (β_t) telles que

1) $[0,T] \times \Omega \longrightarrow R$
$(t,\omega) \rightsquigarrow y^n(t,\omega)$

2) $\forall n$ les trajectoires de (y_t^n) sont continument différentiables par morceaux.

3) $\exists\ N \quad P(N^c) = 0$
et $\forall \omega \in N \quad y_t^n(\omega) \xrightarrow[s]{} \beta_t(\omega) \qquad \forall\ t \in [0,T]$

4) $\forall\ \omega \exists\ n_o\ (\omega)$ et $k(\omega)$ finis tels que
$\forall n \geq n_o\ (\omega)\ \left| y_t^n\ (\omega) \right| \leq k(\omega)$.

soient alors les équations :

1) $$x_t - x_o = \int_o^t \sigma(x_s,s) \quad d\beta_s + \int_o^t m\ (x_s,s)\ ds$$

$1)^n$ $$x_t^n - x_o = \int_o^t \sigma(x_s^n,s)\ dy_s^n + \int_o^t m\ (x_s^n,\ s)\ ds$$

On a alors le théorème II-1

Hypothèses : les coefficients σ et m vérifient les hypothèses :

i) $\sigma(x,t)$, $m(x,t)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial\sigma}{\partial t}(x,t)$ sont continus sur $\mathbb{R} \times [0,T]$

ii) $\sigma(x,t)$, $m(x,t)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t) \times \sigma(x,t)$ vérifient la condition de Lipschitz :

$$\exists K : \forall\ x,y \in \mathbb{R}\ \forall\ t \in [0,T] \quad |\ f(x,t) - f(y,t)\ | \leqslant K\ |\ x - y\ |$$

iii) $\exists\ \alpha > 0 : \forall\ (x,t) \quad \sigma(x,t) \geqslant \alpha > 0$

et $\exists a > 0 : \forall\ (x,t)\ \left| \frac{\partial\sigma}{\partial t}(x,t) \right| \leqslant a\ \sigma^2(x,t)$

iiii) x_o V . A . indépendante de $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$

alors

1. Les équations ordinaires :

$$x_t^n - x_o = \int_o^t \sigma(x_s^n,s)\ dy_s^n + \int_o^t m\ (x_s^n,\ s)\ ds$$

possèdent une solution unique.

2. L'équation :

$$x_t - x_o = \int_o^t \sigma(x_s,\ s)\ d\beta_s + \int_o^t m\ (x_s,\ s)\ ds + \frac{1}{2}\int_o^t \sigma(x_s,\ s)\ \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x_s,s)\ ds$$

possède une solution forte.

3. $\forall\ \omega \in N\quad x_t^n(\omega) \xrightarrow[s]{} x_t(\omega) \quad \forall t \in [0,T]$

4. Si la convergence de $y_t^n(\omega)$ vers $\beta_t(\omega)$ a lieu uniformément en t sur N, il en est de même de celle de $x_t^n(\omega)$ vers $x_t(\omega)$ sur N.
Le théorème que nous allons démontrer étant plus général, nous ne donnons pas de démonstration. On peut la trouver dans [18].

II-2 DEFINITION DES APPROXIMATIONS

II-2-1 Soit l'équation d-dimensionnelle :

$$(1) \quad x_t - x_o = \int_o^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_o^t m(x_s, s)\, ds$$

$$\text{où} \quad \sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

$$m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

m et σ boréliennes.
Dans toute la suite, on supposera que cette équation possède une solution :

* au sens faible d'où un espace $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}, P)$ et un brownien $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$

ou * au sens fort pour $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$ fixé.

et on supposera que la famille $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}$ est continue à droite, et $\mathfrak{F}_t$ complète pour chaque t.

II-2-2 On définit alors une suite d'approximations de $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$ de la façon suivante :

1) $\Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$(\omega, t) \longmapsto y_t^n(\omega)$

2) $\forall_n$ les trajectoires de $(y_t^n)_{t \in [0,T]}$ sont continuement différentiables par morceaux et y_t^n. est $\mathfrak{F}$-mesurable.

3) $\exists\ N : P(N^c) = 0$ et

$\forall\, \omega \in N \quad y^n_t(\omega) \longrightarrow \beta_t(\omega) \quad \forall_{\,t} \in [0,T]$

4) $\forall\, \omega\ \exists\ n_o(\omega)$ et $k(\omega)$ finis tels que

$\forall_{\,n} \geq n_o(\omega) \qquad |(y^n_t(\omega)| < k(\omega)$

II-2-3 On a une approximation de ce type en linéarisant les trajectoires du mouvement Brownien de la façon suivante :

Soit $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers zéro.

Soit $\Delta^n = \{o = t^n_o < t^n_1 < \ldots\ldots < t^n_{k_n} = T\}$

On définit y^n par :

$$y^n_o = \beta_o = 0$$

$$y^n_t(\omega) = y^n_{t^n_{k-1}} + \frac{\beta_{t^n_k} - \beta_{t^n_{k-1}}}{t^n_k - t^n_{k-1}} (t - t^n_{k-1}) \quad \text{si} \quad t \in [t^n_{k-1}\ t^n_k]$$

une telle approximation vérifie toutes les hypothèses et de plus pour chaque $\omega\ \{y^n_{\cdot}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un ensemble équicontinu et pour chaque t dans $[t^n_{k-1}\ ,\ t^n_k]$ $y^n_t(.)$ est $\mathcal{F}_{t^n_k}$ -mesurable.

II-3 NOTATIONS

II-3-1

On notera $(1)^n$ l'équation au sens ordinaire :

$$x^n_t - x^n_o = \int_o^t \sigma(x^n_s, s)\, dy^n_s + \int_o^t m(x^n_s, s)\, ds\ .$$

II-3-2

Par la suite on considérera des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et leurs différentielles ; soit F une telle fonction.

$$F \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$DF \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$
$$D^2F \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$$

$D^2F(x)$ peut s'identifier à un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

Soit alors $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $B \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$

on notera (A,B) l'élément $A(B)$ de $\mathbb{R}^d$.

Cette notation peut se justifier par l'écriture de la formule de Ito dans le cas d-dimensionnel qui est la suivante :

pour $X_t = \int_o^t \Phi(s,\omega)\, d\,\beta_s + \int_o^t \Psi(s,\omega)\, ds$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \Phi(s,\omega) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d),\ \Psi(s,\omega) \in \mathbb{R}^d \\ \Phi(s,\omega),\ \Psi(s,\omega) \text{ adaptées et} \\ \int_0^T E\,|\Phi(s,\omega)|^2\, ds < \infty \quad \int_0^T E\,|\Psi(s,\omega)|\,ds < +\infty \end{cases}$$

et $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\begin{cases} D_{20}\,F\,(x,s) \text{ existe et est continue} \\ D_{01}\,F\,(x,s) \text{ existe et est continue} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(X_t,t) - F(X_o,0) = & \int_o^t D_{10}\,F\,(X_s,s) \circ \Phi(s,\omega)\, d\,\beta_s \\ & + \int_o^t D_{10}\,F\,(X_s,s)\,\Psi(s,\omega)\, ds \\ & + \int_o^t D_{01}\,F\,(X_s,s)\, ds \\ & + \frac{1}{2}\int_o^t D_{20}\,F\,(X_s,s)\, d\langle\beta\rangle_s \end{aligned}$$

et $d \langle \beta \rangle_s = I\, ds$

II-3-3

Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, $A = (a_{ij})$ $i = 1 \dots d$; $j = 1 \dots d$,

et $|A| = (\sum_{ij} (a_{ij})^2)^{\frac{1}{2}}$

II-4 HYPOTHESES SUR LES COEFFICIENTS

Pour toute la suite on fera les hypothèses suivantes notées H_1.

H_1 i) $\sigma(x,s)$ est strictement elliptique, c'est-à-dire il existe α strictement positif tel que :

$\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall s \in [0,T]$ $< \sigma(x,s)y, y> \geq \alpha < y,y >$

$D_{10}\,\sigma(x,s)$ et $D_{01}\,\sigma(x,s)$ existent et sont continues.

ii) il existe F définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $D_{10}\,F(x,s) = [\sigma(x,s)]^{-1}$, et il existe H définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $F(H(x,s),\, s) = x$ pour tout x dans $\mathbb{R}^d$ et pour tout s dans $[0,T]$

$D_{01}\,F(x,s)$ existe et est continue

iii) m est borélienne

iv) il existe ρ $\bar{\rho}$, δ définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, croissantes continues, telles que :

$$\begin{cases} \rho(0) = \bar{\rho}(0) = 0 = \delta(0) \\ \rho + \bar{\rho} + \delta \text{ concave} \\ \displaystyle\int_{0+} \frac{du}{(\rho+\bar{\rho}+\delta)(u)}\ ) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} \forall x,\ y \in \mathbb{R}^d \quad \forall s \in [0,T] \\ |\sigma(x,s) - \sigma(y,s)| \leqslant \quad \rho(|x-y|) \\ |m(x,s) - m(y,s)| \leqslant \quad \bar{\rho}(|x-y|) \\ |D_{01}\ F(x,s) - D_{01}\ F(y,s)| \leqslant \quad \delta(|x-y|) \end{array} \right.$$

Nous introduisons également les hypothèses notées H_2 et H_3

$\underline{H_2}$: m et σ sont bornées

$\underline{H_3}$: m est continue

Il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall s \in [0,T]$$

$$||\sigma(x,s)||^2 + |m(x,s)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2)$$

et il existe g(s) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall s \in [0,T] \quad |(\sigma(x,s))^{-1}\ m(x,s)| + |D_{01}\ F(x,s)| \leqslant \quad g(s)$$

$$\text{et} \quad \int_0^T g(s)\ ds < +\infty$$

On peut remarquer que :

1) si H_1 et H_3 sont satisfaites, l'équation (1) possède une solution faible car dans ce cas les hypothèses de Skorokhod sont satisfaites.

2) si H_1 et H_2 sont satisfaites, l'équation (1) possède une solution faible car les hypothèses de Stroock-Varadhan sont satisfaites.

3) les équations :

$$(1)^n \ x_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n,s)\ dy_s^n + \int_0^t m(x_s^n,s)\ ds$$

possèdent pour chaque ω une solution unique continue dès que σ et m sont boréliennes et vérifient (H_1 iv) et H_2) ou (H_1 iv) et H_3.)

On peut montrer également que $x_t^n(.)$ est $\mathcal{A}$-mesurable dès que $y_t^n(.)$ est $\mathcal{A}$-mesurable ; en particulier si $(y_s^n\ .)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'approximation linéaire on obtient directement que $\lim_n x_t^n.$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$\boxed{\S \text{ III}}$

THEOREMES DE CONVERGENCE

III-1 Dans ce paragraphe nous allons traiter le cas particulier de l'équation :

$$(1)\quad x_t - x_o = \int_o^t \sigma(x_s)\, d\beta_s \qquad x_o = o$$

car il illustre bien l'apparition du terme complémentaire par passage à la limite.

Théorème III-1

Hypothèses :

soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, (\beta_t))$ un mouvement Brownien, et $(y^n_{\cdot})$ une suite d'approximation de β telle qu'en [II-2-2]

Supposons que :

1) $\sigma(x)$ est continument différentiable et que pout tout x $(\sigma(x))^{-1}$ existe

2) il existe $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$
$x \rightsquigarrow F(x)$

telle que $DF(x) = (\sigma(x))^{-1}$, $F(o) = 0$ et admettant une fonction réciproque H

alors pour tout n et pour tout ω l'équation

$$(1)^n \quad x_t^n(\omega) = \int_o^t \sigma(x_s^n(\omega))\, dy_s^n(\omega)$$

admet une solution telle que

a) P p.s $x_t^n(\omega) \longrightarrow \bar{x}_t(\omega) \quad \forall t \in [0,T]$

b) $\bar{x}_t = \int_o^t \sigma(\bar{x}_s)\, d\beta_s + \frac{1}{2} \int_o^t (D\sigma(\bar{x}_s) \circ \sigma(\bar{x}_s), I) ds$

c) si la convergence de $y^n(\omega)$ vers $\beta(\omega)$ est uniforme en t il en est de même de celle de $x^n_{\cdot}(\omega)$ vers $\bar{x}_{\cdot}(\omega)$

Démonstration -

$H(y_t^n) = \int_o^t D H(y_s^n)\, dy^n_s = \int_o^t \sigma(H(y^n_s))\, dy^n_s$ en conséquence $x_t^n = H(y_t^n)$

est solution de $x^n_t = \int_o^t \sigma(x^n_s)\, d y^n_s$.

H étant continue, par suite de la définition de $(y_t^n)_{t \in [0,T]}$

$\exists N : P(N^c) = 0$ et $\forall \omega \in N \quad x^n_t(\omega) \longrightarrow H(\beta_t(\omega)) \ \forall t \in [0,T]$

par suite de 1) H est de classe C_2 et on peut appliquer la formule de Ito

à H et $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$

$$(2)' \quad H(\beta_t) - H(\beta_o) = \int_o^t D H(\beta_s)\, d\beta_s + \frac{1}{2} \int_o^t D^2 H(\beta_s)\, d\langle\beta\rangle s$$

c'est à dire

$$(2)' \quad H(\beta_t) = \int_o^t \sigma(H(\beta_s))\, d\beta_s + \frac{1}{2} \int_o^t (D\,\sigma(H(\beta_s)) \circ \sigma(H(\beta_s)), I) ds$$

soit alors $\bar{x}_t = H(\beta_t)$ ce qui termine la démonstration de a) et b)

Pour c)

$$\forall\ \omega\ \exists n_o\ (\omega) \text{ et } \exists\, k(\omega)\ :\ \forall\ n \geq n_o(\omega)\ \ |y_t^n\ (\omega)| \leq k\ (\omega)$$

$$\text{et} \quad \forall\ \omega \in N \qquad y_t^n\ (\omega) \longrightarrow \beta_t(\omega) \quad \text{unif. en } t \in [0,T]$$

On en déduit que $\forall\ \omega \in N \quad x_t^n\ (\omega) = H\ (y_t^n(\omega)\ ) \longrightarrow H\ (\beta_t(\omega)\ )$ uniformément en $t \in\ [0,T]$ (H est unif. continu sur chaque compact : $K_\omega = \{\ x\ :\ |x| \leq k(\omega)\}$).

Remarques -

1) $\bar{x}_t = H(\beta_t)$ entraîne que $\bar{x}_t$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{C}\ (\beta_t)$ alors qu'en général pour une équation

$$x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\ d\ \beta_s + \int_0^t m\ (x_s)\ \ ds$$

on a $\mathscr{C}\ \ (\beta_s \quad s \leq t) \subsetneq \mathscr{C}\,(x_s \quad s \leq t)$

2) $(\bar{x}_t)_{t} \in\ [0,T]$ est une solution forte de l'équation (2) et elle est unique en trajectoire car pour toute autre solution $(x'_t)_{\ t} \in [0,T]$ relativement à $(\Omega,\tilde{\mathscr{F}},\ (\tilde{\mathscr{F}}_t)\ P,\ (\beta'_t)_t\ [0,T]$

$$F(x'_t) = \beta'_t \underset{P\ p.s}{=} \beta_t = F\ (\bar{x}_t)$$

F étant bijective $\qquad x'_t \underset{P\ p.s}{=} \bar{x}\ t.$

III-2 APPROXIMATIONS EQUICONTINUES

Nous considérons l'équation :

$$(1)\ x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\ d\beta_s + \int_0^t m(x_s,\ s)\ ds$$

Nous noterons (2) l'équation

$$x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, d\beta_s + \int_0^t m\,(x_s, s)\, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t (D\sigma(x_s) \circ \sigma(x_s), I)\, d_s$$

nous allons démontrer le Théorème III-2

<u>Théorème III-2</u>

Sous les hypothèses $(H_1 \text{et } H_2)$ ou $(H_1 \text{ et } H_3)$ et $(y^n_\cdot)$ $n \in N$: approximations équicontinues de (β_t) $t \in [0,T]$

on a :

1) si $x^n_t = \int_0^t \sigma(x^n_s)\, d\, y^n_s + \int_0^t m(x^n_s, s)\, ds$

$\lim_n x^n_t(\omega)$ existe uniformément en t. P. p. s.

2) soit $\bar{x}_t(\omega) = \lim_n x^n_t(\omega)$

alors (2) $\bar{x}_t = \int_0^t \sigma(\bar{x}_s)\, d\, \beta_s + \int_0^t m(\bar{x}_s, s)\, ds$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t (D\, \sigma(\bar{x}_s) \circ \sigma(\bar{x}_s), I)\, ds \quad \text{P. p. s.}$$

<u>Corollaire III-2</u>

Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1 l'équation (2) :

$$x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s, s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t (D\, \sigma(x_s) \circ \sigma(x_s), I)\, ds$$

possède une solution au sens fort sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ et pour le Brownien (β_t) $t \in [0,T]$ et il y a unicité trajectorielle.

Si l'on veut une approximation de la solution de l'équation

$$(1) \quad x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s,s)\, ds \text{ , il faut alors considérer}$$

$$(1)^* \quad x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, d\beta_s + \int_0^t m^*(x_s,s)\, ds$$

$$\text{ou} \quad m^*(x,s) = m(x,s) - \frac{1}{2}\,(D\,\sigma(x)_o\,\sigma(x)\,,\,I)$$

et on a le <u>corollaire III-2.bis</u>

Sous les hypothèses (H_1 et H_2) ou (H_1 et H_3) pour σ et m^*, il existe $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^*_t, P^*)$ et $X^* = ((x^*_t)\ ,\ (\beta^*_t))_{t \in [0,T]}$ solution de $(1)^*$

Si (y^n_t) est une suite d'approximations équi-continues de : $(\beta^*_t)_{t \in [0,T]}$

et $x^n_t = \int_0^t \sigma(x^n_s)\, dy^n_s + \int_0^t m^*(x^n_s,s)\, dys$

on a : 1) l'équation (1) possède une solution au sens fort pour

$(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^*_t, P^*, \beta^*)$

2) $\lim\limits_n \sup\limits_{t \in [0,T]} |x^n_t(\omega) - x_t(\omega)| = 0 \quad P^* p.\ s.$

où (x_t) solution de (1)

<u>Démonstration du théorème III-2</u>

1.- <u>$\{x^n.\omega\}_{n \in N}$ est uniformément borné</u>

On a $F(x^n_t) = y^n_t + \int_0^t (\sigma(x^n_s))^{-1}\, m(x^n_s,s)\, ds$

et $\forall\, \omega\ \exists\ n_o(\omega)$ et $\exists k(\omega)$ finis : $\forall_n \geq n_o(\omega)\ \ |\, y^n_t\ \omega| \leq k(\omega)$

On sait également que σ est uniformément elliptique alors $\forall x \ |\sigma(x)|^{-1} \leqslant \alpha'$ avec de plus H_1 ou H_2 il existe K fini tel que

$$\forall t \in [0,T] \quad \forall_n \qquad \left| \int_o^t (\sigma(x_s^n))^{-1} \; m(x_s^n,s) \; ds \right| \leqslant K$$

En conséquence $\forall n \ \ \forall t \in [0,T] \quad | \, F \, (x_t^n(\omega)) \, | \leqslant k'(\omega) + K$

F admettant une fonction réciproque H continue $(x_t^n(\omega))_{\substack{n \in N \\ t \in [0,T]}}$ est également borné.

2.- $\forall \omega \ \exists K(\omega) \ : \ |(x_t^n(\omega) - x_t^m(\omega)| \leqslant K(\omega) \ | \ F(x_t^n(\omega) - F(x_t^m(\omega)| \ \forall t \in [0,T]$

On a $\quad D \, H(x) = \sigma \circ H(x)$

Si σ est bornée, H est lipschitzienne ; si σ et H étant continues D H est bornée sur tout compact et donc H est lipschitzienne sur tout compact.

Soit $\quad C_\omega = \{x \ : \ |x| \leqslant k'(\omega) + K\}$

$\exists K(\omega) \ : \forall x,y \in C_\omega \quad |H(x) - H(y)| \leqslant K_\omega \ |x-y|$

et $\forall n \ \ \forall t \in [0,T]$

$$|x_t^n(\omega) - x_t^m(\omega)| = |H \circ (F(x_t^n(\omega)) - H \circ F(x_t^m(\omega))| \leqslant K(\omega) | \ F(x_t^n(\omega)) - F(x_t^m(\omega))|$$

3.- $\forall \omega \ \exists K_2(\omega) \ : \ |F(x_t^n(\omega)) - F(x_t^m(\omega))| \leqslant |y_t^n(\omega) - y_t^m(\omega)| + K_2(\omega) \int_o^t \rho + \bar{\rho}(|x_s^n(\omega) - x_s^m(\omega)|) ds$

On a :

$$|(\sigma(x))^{-1} \ m(x,s) - (\sigma(y))^{-1} \ m(y,s)| \leqslant \alpha'\bar{\rho}(|x-y|) + \alpha'\rho(|x-y|)| \ \sigma^{-1}(y) \ m(y,s)|$$

Si m est bornée ou m continue et C compact de $\mathbb{R}^d$ alors

$$\sup_{\substack{s \in [0,T] \\ y \in C}} |(\sigma(y))^{-1} \; m(y,s)| < \infty$$

d'où $\sup_{n} \sup_{s \in [0,T]} |(\sigma(x_s^n(\omega))^{-1} \; m(x_s^n(\omega),s)| \leq K_1(\omega) < \infty$

soit $K_2(\omega) = \sup(\alpha', \alpha' K_1(\omega))$ et 3) est démontré.

D'après 2 et 3

$$|x_t^n(\omega) - x_t^m(\omega)| \leq K(\omega) \; |y_t^n - y_t^m(\omega)| + K_3(\omega) \int_0^t \rho + \bar{\rho} \; (|x_s^n(\omega) - x_s^m(\omega)|) \; ds$$

pour toute la suite, on suppose que $\omega \in N$.

4.- $\forall \omega \in N \; \{x^n.(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinu.

On a $\quad F(x_t^n(\omega)) = y_t^n(\omega) + \int_0^t (\sigma(x_s^n(\omega))^{-1} \; m(x_s^n(\omega),s) \; ds$

et on sait que $\forall \omega \in N, \; \{y^n.\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinu.

D'autre part $\quad \left|\int_u^t (\sigma(x_s^n(\omega))^{-1} \; m(x_s^n(\omega),s) \; ds\right| \leq K_1(\omega) \quad |t-u|$

donc $\{F(x_\cdot^n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinu.

et comme $\quad |x_s^n(\omega) - x_u^n(\omega)| \leq K(\omega) \; |F(x_s^n(\omega) - F(x_u^n(\omega)|$

on a aussi $\{x_\cdot^n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ équicontinu.

5.- Soit $Y_\omega = \mathcal{C}([0,T], \mathcal{C}(\omega))$

et $E_\omega = \{(x_\cdot^n(\omega))\}_{n \in \mathbb{N}}$

E_ω est relativement compact dans Y_ω (théorème d'Ascoli)

En conséquence la suite $\{x^n_{\cdot}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins un point adhérent dans Y_ω .

On va démontrer que ce point adhérent est unique et qu'en conséquence il existe

$$\bar{x}.(\omega) \in Y_\omega \quad \text{tel que} \quad \lim_n \| x^n.(\omega) - \bar{x}.(\omega) \|_\infty = 0$$

Pour cela on va démontrer deux lemmes.

Lemme A_1

Soit $Y = \mathcal{C}\,(\,[0,T]\,,\,[0,\delta]\,)\quad \delta < \infty$

et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions équi-continues de Y vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} - \ \forall t \in [0,T] \quad x_n(t) \leq \varepsilon^n(t) + \displaystyle\int_0^t \kappa\,(x_n(s))\, ds \\ \text{où } \kappa \text{ concave, continue croissante et } \displaystyle\int_{0+} \frac{1}{\kappa(u)}\, du = +\infty \\ - \ \forall n\ \varepsilon^n. \in Y \ \text{ et } \ \displaystyle\lim_n \ \sup_t \ \varepsilon^n(t) = 0 \end{array}\right.$$

alors $\displaystyle\lim_n \sup_{t \in [0,T]} |x_n(t)| = 0$

Démonstration : $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant également continu est relativement compact dans Y possède donc au moins un point adhérent dans Y soit x.

Soit alors x^{n_k} une sous-suite convergeant vers x.

Alors $\forall t \in [0,T]$

$$x(t) \leq \lim_k \varepsilon^{n_k}(t) + \overline{\lim_k} \int_0^t \kappa\,(x^{n_k}\, s)\, ds$$

Les hypothèses sur κ entraînent que

$$\forall t \in [0,T] \qquad x(t) \leq \int_0^t \kappa(x(s))\, ds$$

Il en résulte que $x = 0$

La suite ne possède qu'un point adhérent en conséquence

$$\lim_n \sup_{t \in [0,T]} |x_n(t)| = 0$$

Lemme A_2

Soit $Y = \mathcal{C}([0,T], K)$ où K compact de $\mathbb{R}^d$ contenant zéro

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y telle que $b_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} b \quad b \in Y$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions également continues de Y vérifiant :

$\forall t \in [0,T]$

$$|a^n(t) - a^m(t)| \leq |b^n(t) - b^m(t)| + \int_0^t \kappa\ |(a^n(s) - a^m(s)|ds$$

où κ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ continue croissante concave

$$\int_{0+} \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty \quad \text{alors } \exists\ a \in Y \quad \text{tel que} \quad a_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} a$$

Démonstration : La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins un point adhérent dans Y soit a

alors $|a^n(t) - a(t)| \leq |b^n(t) - b(t)| + \int_0^t \kappa\ (|a^n_{(s)} - a_{(s)}|)\ ds$

soit $\varepsilon^n(t) = |b^n(t) - b(t)|$

$x^n(t) = |a^n(t) - a(t)|$

Les hypothèses du lemme A_1 sont satisfaites, en conséquence

$$\lim_n \|a^n - a\|_\infty = 0$$

Application : Soit $y^n_.(\omega) = b_n$

$x^n_.(\omega) = a_n$

$\kappa = \rho + \overline{\rho} \qquad K \geq C_\omega$

Les hypothèses sont satisfaites d'où le résultat et on a démontré 1) car $\forall \omega \in N : P(N^c) = 0 \ \exists\ \overline{x}.(\omega) \in Y_\omega$ tel que

$$\lim_n \|x^n_.(\omega) - \overline{x}.(\omega)\|_\infty = 0$$

6.- Démonstration de 2)

$$F(x_t^n(\omega)) = y_t^n(\omega) + \int_o^t (\sigma(x_s^n))^{-1} \; m(x_s^n(\omega),s) \; ds$$

F et σ sont continues

m est continue par rapport à la 1ère variable

et $|\sigma(x_s^n(\omega))^{-1} \; m(x_s^n(\omega),s)| \leqslant K_1(\omega)$

En conséquence par passage à la limite sur N

$$F(\bar{x}_t(\omega)) = \beta_t(\omega) + \int_o^t (\sigma(x_s(\omega))^{-1} \; m(\bar{x}_s,s) \; ds \qquad \text{P.ps}$$

Avant d'en déduire que $(\bar{x}_t)$ est solution, nous allons démontrer l'unicité trajectorielle pour les solutions de l'équation (2).

Soients $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, $\quad x = ((\bar{x}_t),(\beta_t))_{t \in [0,T]}$

et $x' = ((\bar{x}'_t),(\beta'_t))_{t \in [0,T]}$

tels que $\bar{x}_o = \bar{x}'_o = o$ P. p. s. et $\beta_{.}(\omega) = \beta'_{.}(\omega)$ P. p. s.

alors $F(\bar{x}_t) - F(\bar{x}_o) = \beta_t + \int_o^t (\sigma(\bar{x}_s))^{-1} \; m(\bar{x}_s,s) \; ds$

$$F(\bar{x}'_t) - F(\bar{x}'_o) = \beta'_t + \int_o^t (\sigma(\bar{x}'_s))^{-1} \; m(\bar{x}'_s,s) \; ds$$

P. p. s. $x_{.}(\omega)$ et $x'_{.}(\omega)$ sont continues, en conséquence

$$\exists \; \Omega_o : P(\Omega_o^c) = 0 \qquad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_o \; \exists \; K_\omega < \infty$$

$$\sup_{t \in [0,T]} (|\bar{x}_t(\omega)| \vee |\bar{x}'_t(\omega)|) \leqslant K_\omega$$

σ et m étant bornées sur tout compact, on a :

$$\text{P. p. s.} \quad |\bar{x}_t(\omega) - \bar{x}'_t(\omega)| \leqslant K_1(\omega) \int_o^t \rho + \bar{\rho} \; (|\bar{x}_s(\omega) - \bar{x}'_s(\omega)|) \; ds$$

(par une technique analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème 1.)

Les hypothèses sur ρ et $\overline{\rho}$ et la continuité de :

$\overline{x}\,.\,(\omega) - \overline{x}'.\,(\omega)$ entraînent que

P. p. s. $\overline{x}.\,(\omega) = \overline{x}'.\,(\omega)$

c'est-à-dire l'unicité trajectorielle.

On remarque alors que si $(y_t^{n,o})_{n\in\mathbb{N}}$ sont les approximations linéaires, la limite $(\overline{x}_t^o)_{t\in[0,T]}$ est $\mathfrak{F}_t$-mesurable et

$$F(\overline{x}_t^o) - F(\overline{x}_o^o) = \beta_t + \int_o^t (\sigma(\overline{x}_s^o))^{-1}\, m(\overline{x}_s^o,s)\, ds \quad \text{P. p. s.}$$

et si $(\overline{x}_t)$ est la limite d'une suite d'approximations qui sont $\mathfrak{F}$-mesurables

$$F(\overline{x}_t) - F(\overline{x}_o) = \beta_t + \int_o^t (\sigma(\overline{x}_s))^{-1}\, m(\overline{x}_s,s)\, ds \quad \text{P. p. s.}$$

si $\overline{x}_o^o = \overline{x}_o = 0$, l'unicité trajectorielle entraine que

$\overline{x}_t = \overline{x}_t^o$ P. p. s. et alors $\overline{x}_t$ est $\mathfrak{F}_t$-mesurable car $\mathfrak{F}_t$ contient tous les ensembles nuls de $\mathfrak{F}$.

On peut alors appliquer la formule de Ito à H et $F(\overline{x}_t)$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} H(F(\overline{x}_t)) = & \int_o^t D\, H(F(\overline{x}_s))\, d\beta_s \\ & + \int_o^t D\, H(F(\overline{x}_s))\, \left[(\sigma(\overline{x}_s))^{-1}\, m(\overline{x}_s,s)\right] ds \\ & + \frac{1}{2}\int_o^t (D^2\, H(F(\overline{x}_s)),\, I)\, ds \quad \text{P. p. s.} \end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\begin{aligned} \overline{x}_t = & \int_o^t \sigma(\overline{x}_s)\, d\beta_s + \int_o^t m(\overline{x}_s,s)\, ds \\ & + \frac{1}{2}\int_o^t (D\sigma(\overline{x}_s) o \sigma(\overline{x}_s),\, I)\, ds \quad \text{P. p. s.} \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Le corollaire en découle directement.

Remarque

Si on prend $\left((y_t^n)_{t \in [0,T]}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que y_t^n. soit mesurable pour $\mathcal{C}((\beta_s)\ s \leq T) = \mathcal{B}_T$

Il en résulte que $(\overline{x}_t)_{t \in [0,T]}$ est solution forte de l'équation (2) sur l'espace $(\Omega, \mathcal{B}_T, \mathcal{B}_t)_{t \in [0,T]}, P, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$

Proposition 1 :

Sous les hypothèses (H_1 et H_2) ou (H_1 et H_3) et $\{y_{\cdot}^n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ équicontinu, les résultats du théorème III-2 et du corollaire III-2 restent valables pour les équations :

$$(1) \qquad x_t = \int_0^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s, s)\, ds$$

$$(1)^n \qquad x_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n, s)\, dy_s^n + \int_0^t m(x_s^n, s)\, ds$$

$$(11) \qquad \overline{x}_t = \int_0^t \sigma(\overline{x}_s, s)\, d\beta_s + \int_0^t m(\overline{x}_s, s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t (D_{10}\, \sigma(\overline{x}_s, s) \circ \sigma(\overline{x}_s, s), I)\, ds .$$

Démonstration :

On remarque d'abord que

$$(111) \qquad F(x_t^n, t) = y_t^n + \int_0^t (\sigma(x_s^n, s))^{-1}\, m(x_s^n, s)\, ds + \int_0^t D_{01}\, F(x_s^n, s)\, ds$$

en posant $b(x,s) = [\sigma(x,s)]^{-1} m(x,s) + D_{01} F(x,s)$

On peut démontrer que :

1. $\{x^n_{\cdot}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné car $|b(x,s)| \leqslant g(s)$ et

$$\int_o^T g(s)\, ds < + \infty$$

2. $\{x^n_{\cdot}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinu car

$$\sup_n \sup_s |b(x^n_s,s)| < + \infty$$

3. Pour presque tout ω, $\overline{x}_t(\omega) = \lim_n x^n_t(\omega)$ existe uniformément en t

par application du lemme A_2 à

$$b_n = y^n_{\cdot}(\omega) \qquad a_n = x^n_{\cdot}(\omega) \qquad K = \rho + \overline{\rho} + \delta$$

4. $F(\overline{x}_t,t) = \beta_t + \int_o^t b(\overline{x}_s,s)\, ds$

car b(x,s) est continue en x et vérifie une condition de domination.

5. $$\overline{x}_t = \int_o^t \sigma(x_s,s)\, d\beta_s + \int_o^t m(\overline{x}_s,s)\, ds + \frac{1}{2} \int_o^t (D_{10}\, \sigma(\overline{x}_s,s) \circ \sigma(\overline{x}_s,s), I)\, ds .$$

en appliquant la formule de Ito à H et $F(x_t,t)$ et en remarquant que :

- $D_{10}\, H(x,s) = \sigma(H(x,s), s)$
- $D_{20}\, H(x,s) = D_{10}\, \sigma(H(x,s), s) \circ \sigma(H(x,s), s)$
- $D_{10} F(H(x,s),s) \circ D_{01}\, H(x,s) + D_{01}\, F(H(x,s),s) = 0$

La démonstration du corollaire se transpose sans difficulté.

III-3 APPROXIMATIONS SIMPLES

Dans le cas où $\{y^n_\cdot(\omega)\}$ n'est pas nécessairement équicontinu mais en supposant $\rho(u) = au$, $\overline{\rho}(u) = bu$, c'est-à-dire les conditions de Lipschitz, on peut obtenir un résultat de convergence simple par la méthode de Wong et Zakaï; plus précisément on a le théorème

Théorème III-3

Sous les hypothèses H_1 avec $\frac{1\rho}{a}(u) = \frac{1\overline{\rho}}{b}(u) = u$ (a et b > o et finis)

et H_4 $\begin{cases} - & |\sigma(x)| \text{ bornée ou } \sigma(x) = [\delta^{ij} a_i(x_i)] \quad i = 1 \ldots d,\ j = 1 \ldots d \\ - & m(x,s) \text{ continue et } |m(x,s)|^2 + |D_{10}\sigma(x,s) \circ \sigma(x,s)|^2 \leq K(1+|x|^2) \end{cases}$

1) l'équation (2) possède une solution faible $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$, $\mathfrak{X} = ((\overline{x}_t),(\beta_t))$ et l'équation (1) possède une solution au sens fort sur $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ par rapport au Brownien (β_t).

2) (y^n_t) étant une suite d'approximations de (β_t) et
$x^n_t = \int_o^t \sigma(x^n_s)\, dy^n_s + \int_o^t m(x^n_s,s)\, ds$

alors $\forall \omega \in N \quad \lim\limits_n x^n_t(\omega) = \overline{x}_t(\omega)$ pour chaque $t \in [0,T]$

Démonstration : La méthode utilisée est celle de Wong et Zakaï.

$$F(x^n_t) = y^n_t + \int_o^t (\sigma(x^n_s))^{-1}\, m(x^n_s,s)\, ds$$

et la formule de Ito appliquée à F et $\bar{x}_t$ donne

$$F(\bar{x}_t) = \beta_t + \int_o^t (\sigma(\bar{x}_s))^{-1} m(\bar{x}_s, s)\, ds$$

Par suite de la continuité de $\bar{x}_s(\omega)$ et de m on a :

$$\sup_s |m(\bar{x}_s(\omega), s)| < \infty$$

Alors $|F(x_t^n) - F(\bar{x}_t)| \leq |y_t^n - \beta_t| + K(\omega) \int_o^t |x_s^n - \bar{x}_s| \, ds$

où $K(\omega) = \alpha_b' + \alpha'^2 a \sup_s |m(x_s(\omega), s)|$

Minoration de $|F(x_t^n) - F(\bar{x}_t)|$

- Si $|\sigma(x)|$ est bornée comme précédemment $\exists K$ fini tel que $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^d$

  $\text{Log}(1 + |x-y|) \leq |x-y| \leq K |F(x) - F(y)|$

- Si $\sigma(x) = [\delta_{ij} a^i (x^i)]$ $i = 1\ldots d$ $j = 1\ldots.d$

  alors $F^i(x_j) - F^i(y_i) = \int_{y_i}^{x_i} \frac{du}{a^i(u)}$

  et $\exists K_2 > 0$ fini tel que $\alpha \leq a^i(u) \leq K_2(1 + |u|)$

  alors $|F^i(x_i) - F^i(y_i)| \geq \frac{1}{K_2} \log 1 + \frac{|x_i - y_i|}{1 + |y_i|}$

  $$\sum_{i=1}^d |F^i(x_i) - F^i(y_i)| \geq \frac{1}{K_2} \log 1 + \frac{\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|}{1 + \sum_{i=1}^d |y_i|}$$

On a donc si $|x|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ et $|x| = \left(\sum_{i=1}^d (x_i)^2\right)^{1/2}$

$$\log 1 + \frac{|x-y|_1}{1 + |y|_1} \leq K_2 |F(x) - F(y)|_1$$

et comme $\frac{1}{\sqrt{d}} \; |x| \leq |x|_1 \leq d \; |x|$

on a $\log \; 1 + \frac{|x - y|}{\sqrt{d}(1+d \; |y| \;)} \leq K_2 \; d \; | \; F(x) - F(y) \; |$

pour $y = \bar{x}_t(\omega) \qquad x = x_t^n \; (\omega)$

on a donc l'inégalité

$$\frac{1}{K_2} \; \log \; 1 + \frac{|x_t(\omega) - \bar{x}_t \; (\omega)|}{\mu_{(\omega)}} \leq |y_t^n - \beta_t| + K(\omega) \int_o^t |x_s^n - \bar{x}_s(\omega) \; | ds$$

où $\mu(\omega) = \sup_{t \in [0,T]} \sqrt{d}(1 + d \; |\bar{x}_s(\omega)| \;)$

On utilise pour conclure le lemme suivant qui se trouve dans l'article de Wong et Zakaï. [18]

<u>Lemme</u>

Soit $f(t)$ une fonction continue définie sur $[0,T]$ à valeurs positives

et soient $\mu : o < \mu < \infty \quad \rho > o$ et $\varepsilon(t) \geq o$ tel que

$$\int_o^T \varepsilon(s) \; ds < (\rho \; \mu \; e^{\mu\rho \; T})^{-1}$$

On suppose de plus que $\log \; \left[1 + \frac{f(t)}{\mu}\right] \leq \log \; (1 + \varepsilon \; (t)) + \rho \int_o^t f(s) \; ds$

alors

$$f(t) \leq \frac{\mu\left[\varepsilon(t) + \rho\mu \; e^{-\rho\mu T} \int_o^T \varepsilon(t) \; dt.\right]}{1 - \rho\mu e^{-\rho\mu \; T} \int_o^T \varepsilon(t) \; dt}$$

Par application du lemme à : $f_n(t,\omega) = |x_t^n \; (\omega) - \bar{x}_t \; (\omega)|$

$\varepsilon_n(t,\omega) = (\exp K_2 \; |\beta_t \; (\omega) - y_t^n \; (\omega)| \;) - 1$

$\rho = K_2 . \; K(\omega)$

On a $\log 1 + \dfrac{f_n(t,\omega)}{\mu} \leqslant \log\left(1 + \varepsilon_n(t,\omega)\right) + \rho\int_o^t f_n(s,\omega)\,ds$

quand $n \longrightarrow \infty$ $\varepsilon_n(t,\omega) \longrightarrow o$ pour $\omega \in N$

et $|\varepsilon_n(t,\omega)| \leqslant k(\omega) + \sup_{t \in [O,T]} |\beta_t(\omega)|$ pour $n \geqslant n_o(\omega)$

alors $\int_o^T \varepsilon_n(t,\omega)\,dt \longrightarrow o$ pour $\omega \in N$

et $|x_t^n(\omega) - \bar{x}_t(\omega)| \leqslant \dfrac{\mu\left[\varepsilon_n(t,\omega) + K_2\,K(\omega)\,\mu_e^{-K_2\,K(\omega)T}\int_o^T \varepsilon_n(t,\omega)\,dt\right]}{1 - K_2\,K(\omega)\,.\,e^{-K_2\,K(\omega)}\int_o^T \varepsilon_n(t,\omega)\,dt}$

dès que $n \geqslant N_\omega$

on en déduit que $\forall\ \omega \in N$ $x_t^n(\omega) \longrightarrow \bar{x}_t(\omega)$ pour chaque $t \in [O,T]$

et si $y_t^n(\omega) \longrightarrow \beta_t(\omega)$ unif. en $t \in [O,T]$ il en est de même de la convergence de $x_t^n(\omega)$ vers $\bar{x}_t(\omega)$, ce qui achève la démonstration du théorème III-3 et on peut également énoncer le corollaire suivant :

Corollaire III-3

Si $\forall\omega \in N$ $P(N^C) = o$ $\sup_{t \in [O,T]} |y_t^n(\omega) - \beta_t(\omega)| \longrightarrow o$

alors $\forall\omega \in N$ $\sup_{t \in [O,T]} |x_t^n(\omega) - \bar{x}_t(\omega)| \longrightarrow o$

Enfin dans le cas où $\frac{1}{a}\,\rho(u) = \frac{1}{b}\,\bar{\rho}(u) = \frac{1}{c}\,\delta(u) = u$ (a, b, c, constantes strictement positives), les résultats du théorème III-3 s'étendent sans difficultés. Il suffit de remplacer le terme :
$[\sigma(x)]^{-1}\,m(x,s)$ par $[\sigma(x,s)]^{-1}\,m(x,s) + D_{o1}\,F(x,s)$ qui satisfait aux hypothèses voulues.

III-4 EXTENSIONS

III-4-1 Extension au cas où il n'y a pas d'hypothèse de bornitude sur les coefficients

Plus précisément, on suppose que σ et m sont continues et satisfont aux hypothèses H_1. Supposons que l'équation (2) possède une solution faible : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ $\mathcal{X} = (x_t, \beta_t)$, on vérifie qu'elle est unique en trajectoire (corollaire III-2), l'équation (1) possède également une solution faible mais on ne peut affirmer qu'elles sont définies sur le même espace et pour le même Brownien.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui étend le résultat du théorème III-2 :

<u>Théorème III-4-1</u>

On suppose que σ et m sont continus et vérifient H_1

Soit l'équation :

$$(11) \quad x_t = \int_0^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s, s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t (D_{10}\sigma(x_s, s) \circ \sigma(x_s, s), I)\, ds$$

On suppose que cette équation possède une solution faible :

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P), \mathcal{X} = ((\bar{x}_t)\ (\beta_t))_{t \in [0,T]}$$

alors pour $\{y^n_\cdot\}_{n \in \mathbb{N}}$ approximations équicontinues de $(\beta_\cdot)$ définies en [II-2-2]

et $\{x^n_\cdot\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $x^n_t = \int_0^t \sigma(x^n_s, s)\, dy^n_s + \int_0^t m(x^n_s, s)\, ds$

on a $\lim\limits_n x^n_t(\omega) = \bar{x}_t(\omega)$ P.ps.

et la convergence est uniforme en t sur chaque trajectoire.

Démonstration :

$\bar{x}_t$ étant solution de (2) par application de la formule de Itō à $\bar{x}_t$ et $F(x,t)$ on a :

$$F(\bar{x}_t,t) = \beta_t + \int_0^t [(\bar{\sigma}(x_s,s)]^{-1} m(\bar{x}_s,s)\, ds + \int_0^t D_{01} F(\bar{x}_s,s)\, ds$$

$\bar{x}$ étant P.ps à trajectoires continues, on définit une suite de temps d'arrêt par :

$$\tau_k = \mathrm{Inf} \ \{t : |\bar{x}_t| > \frac{k}{2}\}$$

Soit $\Omega_k = \{\omega : \tau_k(\omega) > T\}$ alors $P(\bigcup_k \Omega_k) = 1$

On définit m^k par :

$m^k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$

m^k est continue et bornée et

$m^k(x,s) = m(x,s)$ si $|x| \leqslant k$.

Pour chaque k les hypothèses du théorème sont satisfaites, en conséquence :

en notant $x^{n,k}$ la solution de :

$$(1)^{n,k} \qquad x_t^{n,k} = \int_0^t \sigma(x_s^{n,k},s)\, dy_s^n + \int_0^t m^k\, (x_s^{n,k},s) ds$$

on a

(1) - il existe $\vec{x}^k_\cdot$ tel que

$$\lim_n \ \mathrm{Sup}_{t\in[0,T]} \ |x_t^{n,k}(\omega) - \vec{x}_t^k(\omega)| = 0 \quad \text{P.ps}$$

$$(11) - \quad F(\vec{x}_t^k(\omega)) = \beta_t + \int_0^t [\sigma(\vec{x}_s^k,s)]^{-1} m^k(\vec{x}_s^k,s)\, ds + \int_0^t D_{01}F(\vec{x}_s^k,s) ds$$

mais pour $\omega \in \Omega_k$, par suite de l'unicité trajectorielle des solutions on a nécessairement :

$$\vec{x}^k_\cdot(\omega) = \bar{x}_\cdot(\omega).$$

D'autre part, (1) entraine que :

$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega, \forall k \quad \exists n_{k,\omega,\varepsilon} : \forall n \geq n_{k,\omega,\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \sup_{t \in [0,T]} |x_t^{n,k}(\omega) - \bar{x}_t^k(\omega)| \leq \varepsilon$$

Soit $\omega \in \Omega_{k_o}$, et $\varepsilon < \frac{1}{2}$

alors $\sup_{t \in [0,T]} |x_t^{n,k_o}(\omega)| < k$ dès que $n \geq n_{\omega,\varepsilon}$

et dans ce cas $m^{k_o}(x_t^{n,k_o}(\omega),t) = m(x_t^{n,k_o}(\omega),t) \qquad \forall t \in [0,T]$

par suite de l'unicité pour les équations $(1)^n$

$$x_.^{n,k_o}(\omega) = x_.^n(\omega)$$

On en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \quad \exists n_{\omega,\varepsilon} : \forall_n \geq n_{\omega,\varepsilon} \Longrightarrow \sup_{t \in [0,T]} |x_t^n(\omega) - \bar{x}_t(\omega)| \leq \varepsilon$$

et le théorème est démontré.

III-4-2 Extension à un cas où $\sigma(x,s)$ n'est pas strictement elliptique

Proposition III-4-2 :

On suppose que m est continue et que σ vérifie H_1 sauf l'hypothèse strictement elliptique qui est remplacée par :

$$<\sigma(x,s)y, y> \geq \alpha_k <y, y> \quad \text{pour } |x| < k$$

avec $\alpha_k \to 0$ quand $k \to +\infty$

Supposons de plus qu'il existe une suite :

$$\sigma^k \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \qquad \sigma^k \text{ vérifiant } H_1$$

$$\text{et} \begin{cases} \sigma^k(x,s) = \sigma(x,s) \\ D\sigma^k(x,s) = D\sigma(x,s) \end{cases} \quad \text{pour } |x| < k$$

Soit l'équation :

$$(11) \qquad x_t = \int_0^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_0^t m(x_s, s)\, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t (D_{10}\, \sigma(x_s, s) \circ \sigma(x_s, s), I)\, ds$$

on suppose que cette équation possède une solution faible :

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P), \mathfrak{X} = [(\bar{x}_t), (\beta_t)]_{t \in [0,T]}$$

alors pour $\{y^n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ approximations équicontinues de (β) et $\{x^n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$x_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n, s)\, dy_s^n + \int_0^t m(x_s^n, s)\, ds$$

on a $\quad \lim\limits_{n} \sup\limits_{t \in [0,T]} |x_t^n(\omega) - \bar{x}_t(\omega)| = 0$

Démonstration : identique à celle du théorème III-4-1

Chapitre II

EXTENSION D'UN RESULTAT DE KUNITA SUR LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, les processus sont à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, le Brownien ayant une covariance nucléaire C . Les approximations du Brownien sont des approximations linéaires notées $((y_t^n)_{t\in[0,T]})_{n\in\mathbb{N}}$
On considère les équations :

$$(1)^n \qquad x_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n,s)\, dy_s^n + \int_0^t m(x_s^n,s)\, ds$$

$$(2) \qquad x_t = \int_0^t \sigma(x_s,s)\, d\beta_s + \int_0^t \tilde{m}(x_s,s)\, ds$$

$$\text{où} \quad \tilde{m}(x,s) = m(x,s) + \frac{1}{2}\,(D_{10}\,\sigma(x,s) \circ \sigma(x,s)\,,\, C)$$

sous des hypothèses de continuité et de bornitude des coefficients et de leurs différentielles, on démontre la convergence en moyenne quadratique au sens suivant :

$$\lim_n \; E\,(\sup_{t\leq T} ||x_t^n - x_t||^2) = 0$$

d'où on déduit la convergence uniforme sur presque toute trajectoire d'une sous-suite.

Etudes antérieures

Dans le cas où $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$, $C = I$ la convergence en loi a été démontrée par Stroock et Varadhan [15]. Ensuite Kunita [5] a établi la convergence en moyenne quadratique pour chaque t et la convergence uniforme sur presque toute trajectoire d'une sous-suite.

Sous les mêmes hypothèses en utilisant des majorations plus fines, Métivier [11] a étendu les résultats de Kunita au cas d'un processus à valeurs hilbertiennes. C'est cette méthode qui est utilisée ici.

Signalons également un article de Wong et Zakaï [20] sur la convergence en moyenne quadratique, dans le cas R^d, d'intégrales de Rieman-Stieljes vers une intégrale stochastique.

Pour la définition des intégrales stochastiques sur les espaces de Hilbert, l'existence et l'unicité des solutions, on se réfère à Yor [22] (d'après Curtain et Falb).

$\boxed{\S \text{ I}}$

NOTATIONS ET HYPOTHESES GENERALES

I-1 NOTATIONS

$$\sigma \; : \; \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H} \,\hat{\otimes}_2\, \mathbb{H}$$

$$m \; : \; \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H}$$

$\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert, σ et m sont deux fonctions bréliennes. $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ désigne le produit tensoriel projectif et $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ le produit tensoriel complété de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ pour la norme préhilbertienne associée au produit scalaire :

$$(x \otimes y \;,\; x' \otimes y') = \langle x,x' \rangle \langle y,y' \rangle$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{H}$

On notera $\| \quad \|_{HS}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$

et $\| \quad \|_{tr}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$

$C = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{H})$

$(\mathcal{C}_t)_{t \in [0,T]}$: tribus canoniques

$\mathcal{C}^o_\infty = \{ f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact possédant des dérivées de tous ordres$\}$

I-2 HYPOTHESES GENERALES

Pour toute la suite, on supposera que :

I-2-1 : σ est deux fois continûment différentiable par rapport à (x,t) , σ et ses dérivées partielles sont bornées dans les espaces correspondants :

$$\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}$$

$$D_{10}\,\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}, \mathbb{H})$$

$$D_{20}\,\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathcal{L}(\mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}, \mathbb{H})$$

$$D_{01}\,\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}$$

$$D_{11}\,\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}, \mathbb{H})$$

$$D_{02}\,\sigma \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}$$

de plus $D_{10}\,\sigma(x,s) \circ \sigma(x,s) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}, \mathbb{H})$ et

$$\sup_{x,s} \|D_{10}\,\sigma(x,s) \circ \sigma(x,s)\| < \infty$$

I-2-2 : m est continûment différentiable par rapport à (x,t), m et ses différentielles sont bornées

$$m \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$D_{10}\, m \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H} \mathbin{\widehat{\otimes}_2} \mathbb{H}$$

$$D_{01}\, m \quad \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{H}$$

I-2-3 : $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in[0,T]}, (\beta_t)_{t\in[0,T]}, P)$

est un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{H}$ de matrice de covariance nucléaire C. On notera W la loi du Brownien sur $(C, (C_t)_{t\in[0,T]}$. Les tribus sont supposées complètes et continues à droite. On notera K la borne commune de σ, m, de leurs différentielles et de tr. C.

Si $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$ on peut prendre $C = I$ et retrouver le Brownien classique.

§ II

DEFINITION DES APPROXIMATIONS

II-1 DEFINITION DES APPROXIMATIONS DU MOUVEMENT BROWNIEN

Soit $(t_k^n)_{k=o,\dots \frac{[2^n T]}{2^n}}$ une subdivision dyadique de $[0,T]$

Pour $t \in [t_k^n , t_{k+1}^n[$ on définit $[t]^n$ et $[t]^n_+$ par :

$$[t]^n = t_k^n = \frac{[2^n t]}{2^n} , \quad [t]^n_+ = t_{k+1}^n$$

soit $\dot{\beta}^n(t) = 2^n (\beta_{[t]^n_+} - \beta_{[t]^n})$

$$y^n(t) = \int_o^t \dot{\beta}^n(s)\, ds$$

Remarque : On pourrait prendre n'importe quelle suite de subdivision dont le pas tend en décroissant vers zéro.

II-2 DEFINITION DES EQUATIONS D'APPROXIMATION

Soient les équations :

II-2-1 : $(1)^n$ $$x^n(t) = \int_o^t \sigma(x_s^n,s)\, dy_s^n + \int_o^t m(x_s^n,s)\, ds$$

on notera P^n la loi de $(x_t^n)_{t \in [0,T]}$ sur $(C,(C_t)_{t\in[0,T]})$

II-2-2 : (2) $$x(t) = \int_o^t \sigma(x_s,s)\, d\beta_s + \int_o^t \tilde{m}(x_s,s)\, ds$$

où $\tilde{m}(x,s)=m(x,s) + \frac{1}{2}(D_{10}\sigma(x,s) \circ \sigma(x,s) , C)$

on notera $\tilde{P}$ la loi de $(x_t)_{t \in [0,T]}$ sur $(C,(C_t)_{t \in [0,T]})$

Par suite des hypothèses les coefficients sont lipschitziens pour l'ensemble des variables, on suppose que tous les coefficients de Lipschitz sont majorés par K ; de plus les équations $(1)^n$ et (2) possèdent une solution forte sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, (\beta_t)_{t \in [0,T]})$, unique en trajectoire : enfin $\tilde{P}$ est l'unique solution du problème des martingales $((o,o), A_s)$ où

$$A_s f(x) = \langle D f(x), m(x,s)\rangle + \frac{1}{2} (D^2 f(x), \sigma(x,s) C \sigma^* x,s))$$

pour toute fonction f de $\mathcal{C}_\infty^o$

$\boxed{\S\ \text{III}}$

CALCULS PRELIMINAIRES

III-1 Soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ trois fois continûment différentiable, alors

III-1-1

$$g(t+h)-g(t)=hDg(t)+\frac{1}{2}D^2g(t).h^2+\frac{1}{2}\int_t^{t+h}(t+h-u)^2D^3g(u)\,du$$

III-2 Soit $(x_t^n)_{t\in[0,T]}$ solution de l'équation (1)^n

on peut écrire

$$x_t^n = X_t^n + \int_0^t m(x_s^n,s)\,ds \quad \text{où} \quad X_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n,s)\,\dot{\beta}_s^n\,ds$$

soit $A_t^n = \sigma(x_t^n,t)\,\dot{\beta}_t^n$

alors par application de III-1-1 à X_t^n

III-2-1

$$\begin{aligned} x^n_{t^n_{k+1}} - x^n_{t^n_k} = &\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} m(x_s^n,s)\,ds \\ &+ (t^n_{k+1}-t^n_k)\,\sigma(x^n_{t^n_k},t^n_k)\,\dot{\beta}^n_{t^n_k} \\ &+ \frac{1}{2}(t^n_{k+1}-t^n_k)^2\,\dot{A}^n(t^n_k) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}(t^n_{k+1}-u)^2\,\ddot{A}^n(u)\,du \end{aligned}$$

III-3 Estimation de $\dot{A}_t^n$ et $\ddot{A}_t^n$

On remarque que $\dot{\beta}_t^n$ est constant sur tout intervalle $[t_k^n, t_{k+1}^n[$ et $\dot{x}_t^n = \sigma(x_t^n,t)\,\dot{\beta}_t^n + m(x_t^n,t)$ sur tout intervalle $[t_k^n, t_{k+1}^n[$

alors

III-3-1

$$\dot{A}^n(t) = (D_{10}\,\sigma(x_t^n, t)\,(\dot\beta_t^n))\,(\sigma(x_t^n,t)\,\dot\beta_t^n)$$

$$+ (D_{10}\,\sigma(x_t^n, t)\,(\dot\beta_t^n))\quad(m(x_t^n,t))$$

$$+ D_{01}\quad\sigma(x_t^n,t)\,\dot\beta_t^n$$

$$= (D_{10}\,\sigma(x_t^n, t)\circ\sigma(x_t^n,t))\,(\dot\beta_t^n \otimes \dot\beta_t^n)$$

$$+ \Psi_1\quad(x_t^n, t)\,\dot\beta_t^n$$

où $\Psi_1 : \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$

III-3-2

$$\ddot{A}^n(t) = \Phi_3\ (x_t^n, t)\,(\dot\beta_t^n)^{\otimes 3} + \Phi_2\ (x_t^n, t)\,(\dot\beta_t^n)^{\otimes 2}$$

$$+ \Phi_1\ (x_t^n, t)\,\dot\beta_t^n$$

où $\Phi_3\ (x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 3}, \mathbb{H})$

$\Phi_2\ (x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 2}, \mathbb{H})$

$\Phi_1\ (x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$

De plus $\sup_{x,t} ||\Psi_1(x,t)||$ et $\sup_{x,t} ||\Phi_i\ (x,t)||$ $i = 1,2,3$

so[illegible] [illegible]is, les normes étant prises dans les espaces correspondants

$\perp$ Expression de $X^n_{t^n_{k+1}} - X^n_{t^n_k}$

On a don[illegible] $X^n_{t^n_{k+1}} - X^n_{t^n_k} = (t^n_{k+1} - t^n_k)\,\sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\,\dot\beta^n_{t^n_k}$

$$+ \frac{1}{2}(t^n_{k+1} - t^n_k)^2 \; \Psi_1(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\dot\beta^n_{t^n_k}$$

$$+ \frac{1}{2}(t^n_{k+1} - t^n_k)^2 \; \left(D_{10}\,\sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k) o \sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\right)\dot\beta^n_{t^n_k} \otimes^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t^n_k}^{t_{k+1}} (t^n_{k+1} - u)^2 \sum_{i=1}^{3} \Phi_i\,(x^n_u, u)\,(\dot\beta^n_u \otimes^i)du$$

et compte-tenu du fait que :

$$2^n \dot\beta^n_{t^n_k} = (t^n_{k+1} - t^n_k)\,\dot\beta^n_{t^n_k} = \beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}$$

III-4-1

$$x^n_{t^n_{k+1}} - x^n_{t^n_k} = \sigma\,(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\,(\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k})$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\,\Psi_1\,(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\,(\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k})$$

$$+ \frac{1}{2}\left(D_{10}\,\sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k) o\, \sigma(x^n_{t^n_k}))\sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k)\right)(\beta_{t^n_k} - \beta_{t^n_k})\otimes^2$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} (t^n_{k+1} - u)^2 \left(\sum_{i=1}^{3} 2^{ni}\Phi_i\,(x^n_u, u)\,(\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k})\otimes^i\right)du$$

III-5 Majorations

Pour la démonstration du théorème, nous utiliserons les majorations suivantes qui sont suffisantes :

III-5-1 $\quad E\,(\sup_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^4) \leq K\cdot\frac{1}{2^n}$

III-5-2 $\quad E\,(\sup_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^2) \leq K\cdot\frac{1}{2^{n/2}}$

III-5-3 $\quad E\left[\left(\sum_k \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^3\right)^2\right] \leqslant K \cdot \frac{1}{2^n}$

III-5-4 $\quad E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_{[t]^n}^{t} \sigma(x^n_u, u)\, \dot{\beta}^n_u \, du\right\|^2\right) \leqslant K \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$

III-5-5 $\quad E\left(\sup_{t\in[0,T]} \| x^n_t - x^n_{[t]^n}\|^2\right) \leqslant K \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$

Démonstration

$$E\left(\sup_k \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^4\right) \leqslant 2^n . T . \sup_k E\left(\|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^4\right)$$

mais $\quad E\left(\|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^4\right) \leqslant K_1 \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

d'où III-5-1

Pour III-5-2

$$E\left(\sup_k \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^2\right) \leqslant E\left(\sup_k \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^4\right)^{1/2} \leqslant K_1^{1/2} \frac{1}{2^{n/2}}$$

Pour III-5-3

$$E\left(\left(\sum_k \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^3\right)^2\right) = E\left(\sum_{k,j} \|\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}\|^3 . \|\beta_{t^n_{j+1}} - \beta_{t^n_j}\|^3\right)$$

$$\leqslant K \sum_{kj} (t^n_{k+1} - t^n_k)^{3/2} \, (t^n_{j+1} - t^n_j)^{3/2}$$

$$\leqslant K_2 \frac{1}{2^n}$$

Pour III-5-4 σ étant bornée

$$\left\| \int_{[t]^n}^{t} \sigma(x_u^n,u)\, \dot{\beta}_u^n \, du \right\|^2 \leqslant K_3 \left\| \beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n} \right\|^2$$

et par suite de III-5-2

$$E\left(\sup_t \left\| \int_{[t]^n}^{t} \sigma(x_u^n, u)\, \dot{\beta}_u^n \, du \right\|^2\right) \leqslant K_4 \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

Enfin pour III-5-5

$$\| x_t^n - x_{[t]^n}^n \|^2 \leqslant 2 \left(\left\| \int_{[t]^n}^{t} \sigma(x_u^n,u)\, \dot{\beta}_u^n \, du \right\|^2 + \left\| \int_{[t]^n}^{t} m(x_u^n,u)\, du \right\|^2 \right)$$

m étant bornée il existe une constante K_5 telle que

$$E\left(\sup_t \| x_t^n - x_{[t]^n}^n \|^2\right) \leqslant K_5 \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

on note $K = \sup \left[K_1, K_1^{1/2}, K_2, K_4, K_5\right]$

<u>III-5-6</u> $$E\left(\sum_k \left\| \left(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n}\right)^{\otimes 2} - C\,(t_{k+1}^n - t_k^n) \right\|^2 \right) \leqslant K \cdot \frac{1}{2^n}$$

en effet pour $t \geqslant t_k^n$ soit $N_t^k = (\beta_t - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - C\,(t - t_k^n)$

d'où $$N_t^k = 2 \int_{t_k^n}^{t} (\beta_u - \beta_{t_k^n}) \otimes d\beta_u$$

par application de la formule de Itō à N_t^k et $\phi(x) = (x,x)$

$$\|N_t^k\|^2 = 2 \int_{t_k^n}^{t} (N_u^k, \beta_u - \beta_{t_k^n} \otimes d\beta_u) + \int_{t_k^n}^{t} D^2 \phi(N_u^k)\, (C \otimes C)\, (u - t_k^n)\, du$$

mais $D^2 \phi(x) = D\phi$ d'où il existe une constante notée K_1 telle que

$$E \|N_{t_{k+1}^n}^k\|^2 \leqslant K_1 \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (u - t_k^n)\, du \leqslant K_1 \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

d'autre part $$E\left(\sum_k \|N_{t_{k+1}^n}^k\|^2\right) \leqslant 2^n\, T.\sup E\left(\|N_{t_{k+1}^n}^k\|^2\right) \leqslant K.T.\frac{1}{2^n}$$

$\boxed{\S\ \text{IV}}$

ETUDE DE LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE
EXISTENCE D'UNE SOUS-SUITE CONVERGEANT UNIFORMEMENT
SUR PRESQUE TOUTE TRAJECTOIRE

IV-1 THEOREME

Sous les hypothèses II-2, la suite des solutions des équations ①^n :

$$①^n \qquad x_t^n = \int_s^t \sigma(x_s^n, s)\, dy_s^n + \int_s^t m\,(x_s^n, s)\, ds$$

converge en moyenne quadratique vers la solution de l'équation ②

$$② \qquad x_t = \int_s^t \sigma(x_s, s)\, d\beta_s + \int_s^t \tilde{m}\,(x_s, s)\, ds$$

au sens suivant :

$$\lim_n E(\sup_{t \leq T} ||x_t^n - x_t||^2) = 0$$

IV-2 COROLLAIRE

Sous les hypothèses II-2, on peut extraire une sous-suite $(x\ \ )_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_n \sup_{t \leq T} || x_t\ \ (\omega) - x_t(\omega) || = 0$

W p.p

IV-3 DEMONSTRATION DU THEOREME IV-1

D'après III-2-1 et III-4-1

$$x_t^n = \int_o^t m(x_s^n, s)\, ds + \int_{[t]^n}^t \sigma(x_s^n, s)\, \dot{\beta}_s^n\, ds$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_1} \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n)\,(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n}) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k_1} \Psi_1(x_{t_k^n}^n, t_k^n)(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_1} (D_{10}\, \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n) \circ \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n))\,(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k:O}^{k_1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (t_{k+1}^n - u)^2 \left(\sum_{i=1}^{3} 2^{ni}\, \Phi_i\, (x_u^n, u)(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes i} \right) du$$

où $k_1 = [2^n\, t] - 1$

d'autre part $$x_t = \int_O^t m\,(x_s, s)\, ds + \int_O^t \sigma(x_s, s)\, d\,\beta_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_O^t (D_{10}\, \sigma(x_s, s) \circ \sigma(x_s, s)\ (C)\ ds$$

alors on peut écrire

<u>IV-3-1</u> $$x_t^n - x_t = \int_o^t (m\,(x_s^n, s) - m(x_s, s))\, ds$$

$$+ 2^n \int_{[t]^n}^t \sigma(x_s^n, s)\,(\beta_{[t]_+^n} - \beta_{[t]^n})\, ds$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{k_1} \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n)\,(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n}) - \int_o^t \sigma(x_s, s)\, d\,\beta_s \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_1} (D_{10}\, \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n) \circ \sigma(x_{t_k^n}^n, t_k^n))\,(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_o^t (D_{10}\, \sigma(x_s, s) \circ \sigma(x_s, s)\ )\ C\ \ ds \right] + \varepsilon_n\ (t)$$

On va démontrer qu'il existe deux constantes a, b telles que

$$E\left(\sup_{t\leq T} ||x_t^n - x_t||^2\right) \leq a \cdot \frac{1}{2^{n/2}} + b \int_0^T E\left(\sup_{s\leq t} || x_s^n - x_s||^2\right) ds$$

Pour cela, nous allons examiner chacun des termes de IV-4-1

Pour le 1er terme m étant lipschitzienne, il existe K tel que

IV-3-2

$$E\left(\sup_{t\leq T} \left|\left|\int_s^t (m(x_s^n, s) - m(x_s, s))\, ds\right|\right|^2\right) \leq K^2 T \int_0^T E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - x_s||^2\right) ds$$

Pour le 2ème terme, d'après III-5-4

IV-3-3

$$E\left(\sup_{t\leq T} \left|\left|2^n \int_{[t]^n}^t \sigma(x_s^n, s)\, (\beta_{[t]^n_+} - \beta_{[t]^n})\, ds\right|\right|^2\right) \leq K \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

Soient $K^n(t)$ le 3ème terme,

et $\sigma^n(x_s^n, s) = \sigma(x^n_{t^n_k}, t^n_k)$ pour $s \in [t^n_k, t^n_{k+1}[$

alors

$$K^n(t) = \int_s^t (\sigma^n(x_s^n, s) - \sigma(x_s^n, s))\, d\beta_s$$

$$+ \int_s^t (\sigma(x_s^n, s) - \sigma(x_s, s))\, d\beta_s$$

$$- \int_{[t]^n}^t \sigma(x^n_{[t]^n}, [t]^n)\, d\beta_s$$

$$= K^{n,1}(t) + K^{n,2}(t) - K^{n,3}(t)$$

$K^{n,1}(t)$ et $K^{n,2}(t)$ sont des martingales dont la norme est de carré intégrable alors :

$$E(\sup_t ||K^{n,i}_{(t)}||^2) \leqslant \frac{1}{2} E(||K^{n,i}(T)||^2)$$

et la formule de Itō appliquée à $K^{n,i}(T)$ et $f(x) = ||x||^2 = \langle x,x\rangle$ entraîne que

$$\begin{cases} E\,||K^{n,1}(T)||^2 \leqslant K_1 \displaystyle\int_0^T E||\sigma^n(x_s^n, s) - \sigma(x_s^n, s)||^2\, ds \\ E\,||K^{n,2}(T)||^2 \leqslant K_2 \displaystyle\int_0^T E||\sigma(x_s^n, s) - \sigma(x_s, s)||^2\, ds \end{cases}$$

compte-tenu du fait que σ est lipschitzienne et que

$$\sigma^n(x_s^n, s) = \sigma(x^n_{t_k^n}, t_k^n) \text{ sur } [t_k^n, t_{k+1}^n[$$

IV-3-4
$$\begin{cases} E(\sup_{t\leqslant T} ||K^{n,2}(t)||^2) \leqslant K_2 \displaystyle\int_0^T E(||x_s^n - x_s||^2)\, ds \\ E(\sup_{t\leqslant T} ||K^{n,1}(t)||^2) \leqslant K_2 (\Sigma \displaystyle\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (E(||x_s^n - x^n_{t_k^n}||^2) + (s-t_k^n)^2)ds \end{cases}$$

$$\leqslant K_3 \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

IV-3-5 enfin $E(\sup_{t\leqslant T} ||\int_{[t]^n}^t \sigma(x^n_{[t]^n}, [t]^n)\, d\beta_s||^2) \leqslant K_4 \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$

en conséquence il existe une constante K_o telle que

IV-3-6 $$E(\sup_{t\leqslant T} ||K^n(t)||^2 \leqslant K_o\left(\frac{1}{2^{n/2}} + \int_0^T E(\sup_{s\leqslant t} ||x_s^n - x_s||^2)\, dt\right.$$

Pour le 4ème terme, notons le $L^n(t)$; soit également

$\phi(x,t) = D_{10}\ \sigma(x,t)\ o\ \sigma(x,t)$ ϕ est lipschtizienne et bornée

$$\text{et}\quad L^n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_1} \phi(x_{t_k^n}^n, t_k^n)\ \left[(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - C\ (t_{k+1}^n - t_k^n)\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_1} (\phi(x_{t_k^n}^n, t_k^n)\ C)\ (t_{k+1}^n - t_k^n) - \frac{1}{2}\int_0^t \phi(x_s^n, s)\ C\ ds\right]$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^t (\phi(x_s^n, s) - \phi(x_s, s))\ C\ ds$$

$$L^n(t) = L_1^n(t) + L_2^n(t) + L_3^n(t)$$

on a $||L_3^n(t)||^2 \leqslant \frac{K}{2}\int_0^T ||\phi(x_s^n, s) - \phi(x_s, s)||^2\ ds$

d'où

<u>IV-3-7</u> $$E(\operatorname*{Sup}_{t\leqslant T} ||L_3^n(t)||^2) \leqslant K_5 \int_0^T E\ (\operatorname*{Sup}_{s\leqslant t} ||x_s^n - x_s||^2)\ ds$$

pour $L_2^n(t)$ soit $\phi^n(x_s^n, s) = \phi(x_{t_k^n}^n, t_k^n)$ si $\in [t_k^n, t_{k+1}^n[$

$$L_2^n(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (\phi^n(x_s^n, s) - \phi(x_s^n, s))\ C\ ds - \int_{[t]^n} \phi(x_{[t]^n}^n, [t]^n) C\ ds$$

En conséquence, il existe une constante K_6 telle que

<u>IV-3-8</u> $$E(\operatorname*{Sup}_{t\leqslant T} ||L_2^n(t)||^2) \leqslant K_6 \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

pour $L_1^n(t)$, on remarque d'abord que c'est une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$

soit alors $$\mathfrak{M}^k = \phi(x_{t_k^n}^n, t_k^n)\ (\ (\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - C\ (t_{k+1}^n - t_k^n)\ )$$

comme de plus ϕ est bornée et la norme provient d'un produit scalaire, on a :

$$E\ (\operatorname*{Sup}_{t} ||L_1^n(t)||^2) \leqslant \frac{1}{2} E\ (||L_1^n(T)||^2) = \frac{1}{8} E\ (\sum_{kj} < \mathfrak{M}^k, \mathfrak{M}^j >)$$

mais $E < \mathfrak{M}^k, \mathfrak{M}^j > = 0$ si $k \neq j$

d'où
$$E(\sup_t ||L_1^n(t)||^2) \leq \frac{1}{8} E(\sum_k ||\mathfrak{M}^k||^2)$$
$$\leq \frac{K}{8} E(\sum_k ||(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - C(t_{k+1}^n - t_k^n)||^2)$$

en utilisant le même argument de martingale que précédemment, on a

$$E(\sum_k ||(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - C(t_{k+1}^n - t_k^n)||^2) = E(||\sum_k (\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - CT||^2)$$

et on sait que :

$$\lim_n E(||\sum_k (\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes 2} - \dot{C}T||^2) = 0 \qquad [\ 11\ ]$$

en conséquence

$$\lim_n E(\sup_{t\leq T} ||L_1^n(t)||^2) = 0$$

en fait, on peut même démontrer que :

<u>IV-3-9</u> $$E(\sup_{t\leq T} ||L_1^n(t)||^2) \leq K' \cdot \frac{1}{2^n}$$

en conséquence il existe une constante K_o' telle que

<u>IV-3-10</u> $$E(\sup_{t\leq T} ||L^n(t)||^2) \leq K_o' \left(\frac{1}{2^{n/2}} + \int_0^T (E(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - x_s||^2))\, dt\right)$$

enfin pour le dernier terme $\varepsilon_n(t)$, rappelons que

$$\varepsilon_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k_1} \Psi_1(x_{t_k^n}^n, t_k^n)(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} 2^{ni} \left[\sum_{k=0}^{k_1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} ((t_{k+1}^n - u)^2 \Phi_i(x_u^n, u)(\beta_{t_{k+1}^n} - \beta_{t_k^n})^{\otimes i})\, du\right]$$
$$= I^n(t) + \sum_{i=1}^{3} J^{n,i}(t)$$

Examinons $I^n(t)$; Ψ_1 étant bornée

$$||I^n(t)|| \leq \frac{K}{2^n} \sum_{k=0}^{k_1} ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||$$

$$\leq K \; . \; \operatorname{Sup}_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||$$

d'où

IV-3-11 $$E\,(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||I^n(t)||^2) \leq K^2 \; E\,(\operatorname{Sup}_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^2) \leq K^2 \; . \; \frac{1}{2^{n/2}}$$

Pour les termes $J^{n,i}_{(t)}$ $i = 1,2,3$; Φ_i $i = 1, 2,3$ étant bornées

$$||J^{n,i}(t)|| \leq K \; . \sum_{k=0}^{k_1} 2^{ni} \; ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^i \; \left(\int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} (t^n_{k+1} - u)^2 du \right)$$

$$\leq \frac{K}{3} \; 2^{n(i-3)} \; . \; \sum_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^i$$

et $$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||J^{n,i}(t)||^2 \leq \frac{K}{3} \; 2^{2\,n(i-3)} \; E\,(\,(\sum_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^i)^2)$$

d'où

IV-3-12 $$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||J^{n,1}_{(t)}||^2 \leq K_1 \; . \; \frac{1}{2^{4n}} \; . \; 2^{2n} \; E\,(\operatorname{Sup}_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^2) \leq \frac{K_2}{2^{2n}}$$

IV-3-13 $$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||J^{n,2}_{(t)}||^2) \leq K_1 \; . \; \frac{1}{2^{2n}} \; . \; 2^{2n} \; E(\operatorname{Sup}_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^4) \leq \frac{K_3}{2^n}$$

IV-3-14 $$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||J^{n,3}_{(t)}||^2 \leq K_1 \; E(\,(\sum_k ||\beta_{t^n_{k+1}} - \beta_{t^n_k}||^3)^2) \leq \frac{K_4}{2^n}$$

En conséquence il existe une constante K''_o telle que :

IV-3-15 $$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||\varepsilon_n(t)||^2) \leq K''_o \cdot \frac{1}{2^{n/2}}$$

Finalement, de IV-3-2, IV-3-3, IV-3-6, IV-3-10 et IV-3-15, on déduit qu'il existe deux constantes a et b telles que :

$$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||x_t^n - x_t||^2) \leq a \cdot \frac{1}{2^{n/2}} + b\int_0^T E(\operatorname{Sup}_{s\leq t} ||x_s^n - x_s||^2)\, dt$$

d'où on déduit, par application du lemme de Gronwal :

$$E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||x_t^n - x_t||^2) \leq a \frac{1}{2^{n/2}} e^{bT}$$

En conséquence $\lim_n E(\operatorname{Sup}_{t\leq T} ||x_t^n - x_t||^2) = 0$ et le théorème est démontré

IV-4 DEMONSTRATION DU COROLLAIRE IV-2

Par suite du théorème IV-1, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $\mathcal{L}^2_C (C, (C_t)_{t\in[0,T]}, W)$

En conséquence on peut en extraire une sous-suite $(x^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_\cdot^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_\cdot \qquad W \text{ p.p}$$

c'est-à-dire telle que

$$\lim_k \operatorname{Sup}_{t\leq T} || x_t^{n_k}(\omega) - x_t(\omega)|| = 0 \qquad W \text{ p.p}$$

Chapitre III

APPROXIMATION EN LOI DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT AU MOUVEMENT BROWNIEN PAR DES PROCESSUS DE SAUT

§ I
INTRODUCTION

Dans ce chapitre on envisage l'approximation en loi des solutions d'une équation différentielle stochastique par rapport au mouvement Brownien.

Plus précisément on considère une suite de processus de saut pur (ou de saut pur recentré) à accroissements indépendants et stationnaires telle que la suite correspondante des lois converge faiblement vers celle du mouvement Brownien sur l'espace $D([0,T], \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Skorokhod.

Pour de tels processus, on sait définir l'intégrale stochastique et étudier l'existence et l'unicité en loi des solutions des équations différentielles stochastiques correspondantes. [2] on montrera que la suite des solutions converge en loi vers une diffusion solution d'une équation stochastique par rapport au Brownien. Kurtz a démontré un théorème central limite qui, pour une suite convenable de processus de saut pur, assure la convergence des lois de processus centrés et normalisés vers la loi d'une diffusion. [6]

Toutefois, ce théorème ne permet pas de mettre en évidence la convergence en loi des solutions des équations vers celle d'une diffusion solution d'une équation différentielle stochastique par rapport au Brownien. Skorokhod [17] a démontré que, si la suite des générateurs infinitésimaux converge vers le générateur infinitésimal d'une diffusion, alors il y a convergence des systèmes finis de probabilités conjointes.

§ II

DEFINITION DES APPROXIMATIONS DU MOUVEMENT BROWNIEN

II-1 DEFINITION DES PROCESSUS DE SAUT

Tous les processus seront définis sur l'espace canonique $(D\ ([0,T],\ \mathbb{R}^d),\ \mathcal{D},\ (\mathcal{D}_t)_{t\in[0,T]})$ où

$(D=D([0,T],\ \mathbb{R}^d) = \{f:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ continues à droites pourvues de limites à gauche$\}$

D est muni de la topologie de Skorokhod.

On se donne une suite $((y_t^n)_{t\in[0,T]})_{n\in\mathbb{N}}$ de processus de saut pur, à accroissements indépendants et stationnaires. Chacun est entièrement caractérisé par sa mesure de Lévy ν^n.

Pour toute la suite, on suppose que ν^n vérifie les propriétés suivantes :

II-1-1
$$\begin{cases} \nu^n\{o\} = 0 \\ \nu^n(\mathbb{R}^d_\varepsilon) < +\infty \quad \text{où } \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d_\varepsilon - V_\varepsilon, V_\varepsilon \text{ voisinage de zéro.} \\ \int |x|^4\, d\nu^n(x) < +\infty \\ \int x\otimes x\, d\nu^n(x) = C \end{cases}$$

soit alors pour chaque n

$N^n(.\ .)$ une mesure de Poisson telle que

$$E(\ N^n(]0,t],\ A) = t\nu^n(A). \qquad \forall A : o \notin \bar{A}$$

soit $\beta_t^n(A) = N^n([0,t], A) - t\nu^n(A) \quad \forall A : o \notin \bar{A}$

$(\beta_t^n(A))_{t \in [0,T]}$ est une martingale centrée de carré intégrable.

Enfin soit y_t^n tel que

II-1-2 $$y_t^n = \int_o^t \int x \, d\beta^n(s,x)$$

$(y_t^n)_{t \in [0,T]}$ est une martingale centrée et

$$E(y_t^n \otimes y_t^n) = t.\, C.$$

II-2 DEFINITION DES APPROXIMATIONS

II-2-1 : Notation

On notera $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire sur $R^d \otimes R^d$ tel que $(A, B) = \text{trace } A \circ B^*$

II-2-2 : Définition

Une **suite** d'approximation est une suite de processus $(y^n_\cdot)_{n \in N}$ telle que

i) $(y_t^n)_{t \in [0,T]}$ est définie en II-1-2 .

ii) pour toute fonction g définie sur R^d à valeurs réelles deux fois continûment différentiable au voisinage de zéro et telle que $g(x) - g(o) - \langle Dg(o), x \rangle$ soit intégrable pour chaque ν_n

$$\lim_n \int (g(x) - g(o) - \langle Dg(O), x \rangle)\, d\nu^n(x) = \frac{1}{2}(D^2 g(O), C)$$

II-2-3 : Lemme

La suite $(y^n_{\cdot})_{n \in \mathbb{N}}$ définie en II-1-2 converge en loi vers le Brownien de matrice de covariance C

Démonstration

Soit $\phi^n_{t_1,\, t_2}(u,v) = E\left(e^{i\langle u, y^n_{t_1}\rangle + i\langle V,\, y^n_{t_2}\rangle}\right)\ t_2 > t_1$

par suite de l'indépendance des accroissements

$$\phi^n_{t_1,\, t_2}(u,v) = E\left(e^{i\langle u,\, y^n_{t_2} - y^n_{t_1}\rangle}\right) E\left(e^{i\langle u+v,\, y^n_{t_1}\rangle}\right)$$

mais $E\left(e^{i\langle u,\, y^n_t\rangle}\right) = \operatorname{Exp} t \int \left(e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle\right) d\nu^n(x)$

soit $\psi(x) = e^{i\langle u,x\rangle}$

$D\psi(x) = i\, e^{i\langle u,x\rangle}\, u$

$D^2\psi(x) = -\, e^{i\langle u,x\rangle}\, u \otimes u$

en conséquence

$$E\left(e^{i\langle u, y^n_t\rangle}\right) = \exp t \int \left(\psi x) - \psi(0) - \langle D\psi(0),\, x\rangle\right) d\nu^n(x)$$

et $\quad E\left(e^{i\langle u, y^n_t\rangle}\right) \longrightarrow \exp -\frac{1}{2}\, t\ \operatorname{tr}\left[(u \otimes u)\, C\right]$

d'où

$$\phi^n_{t_1,t_2}(u,v) \to \exp -\frac{1}{2}\left[(t_2 - t_1)\operatorname{tr}\left[(v \otimes v)\, C\right] - t_1 \operatorname{tr}\left[(u+v) \otimes (u+v))\, C\right]\right.$$

$$= \phi_{t_1,\, t_2}(u,v)$$

soit $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$ un Brownien de matrice de covariance C, alors

$$E\left(e^{i\langle u,\, \beta_{t_1}\rangle + i\langle v,\, \beta_{t_2}\rangle}\right) = \phi_{t_1 t_2}(u,v)$$

Il y a donc convergence des systèmes finis de probabilité.

d'autre part

$$E(|y^n_{t_2} - y^n_{t_1}|^2) = \int_{t_1}^{t_2} ds \int |x|^2 \, d\,\nu^n(x) = (t_2 - t_1)\, C$$

l'indépendance des accroissements, la continuité du processus limite et l'égalité précédente permettent d'assurer la convergence des lois P^n vers celle du Brownien de matrice de covariance C .

II-3 REMARQUES

II-3-1 : La condition ii) de la définition II-2-2 est équivalente à :

iii) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d_\varepsilon} |f(x)| \, d\,\nu^n(x) < +\infty \quad \text{vérifie}$$

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^d_\varepsilon} |f(x)| \, d\,\nu^n(x) = 0$$

Démonstration

ii) $\Longrightarrow$ iii)

Soit f telle qu'en iii) et $g = f \,.\, 1_{\mathbb{R}^d_\varepsilon}$; $\int g d\nu^n = \int_{\mathbb{R}^d_\varepsilon} f d\,\nu^n$

et d'après ii) $\lim_n \int g(x)\, d\,\nu^n(x) = 0$ d'où iii)

iii) $\Longrightarrow$ ii)

Soit g deux fois continûment différentiable au voisinage de zéro et telle que

$f(x) = g(x) - g(o) - \langle Dg(o), x\rangle$ soit intégrable pour chaque ν_n

$D^2 g$ étant continue au voisinage de zéro, soit ε et V_ε tels que $|D^2 g(u) - D^2 g(o)| \leq \varepsilon \quad \forall\, u \in V_\varepsilon$

alors $\int f(x)\, d\, \nu^n(x) = \int_{V_\varepsilon} f(x)\, d\, \nu^n(x) + \int_{V_\varepsilon^c} f(x)\, d\, \nu^n\, (x)$

le 2ème terme tend vers zéro d'après iii)

et $\left| \int_{V_\varepsilon} f(x)\, d\, \nu^n(x) - \frac{1}{2}\, (D^2\, g(o)\, ,\, C) \right| \leq \int_{V_\varepsilon^c} |x|^2\, d\, \nu^n\, (x) + \varepsilon\, \mathrm{tr}\, C$

d'où $\lim_n \int f(x)\, d\, \nu^n(x) = \frac{1}{2}\, (D^2 g(o)\, ,\, C)$

II-3-2 : Par application de ii) à $g(x) = |x|^4$ on a

$\lim_n \int |x|^4\, d\, \nu^n(x) = 0$

et de l'inégalité $\left(\int |x|^3 d\, \nu^n(x)\right)^2 \leq \int |x|^2\, d\, \nu_n(x) . \int |x|^4\, d\, \nu^n(x)$

on déduit que $\lim_n \int |x|^3\, d\, \nu^n(x) = 0$

II-3-3 : si $\int |x|\, d\nu^n(x) < +\infty$ et $\int x\, d\nu^n(x) = 0$

alors $y_t^n = \int_o^t x d\, N^n\, (s,x)$

II-4 EXEMPLE

Soit Q^o une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\begin{cases} Q^o\, \{o\} = 0 \\ \text{Supp}\, Q^o = S \quad \text{compact de } \mathbb{R}^d \\ \int x\, d\, Q^o(x) = 0 \quad , \quad \int x \otimes x \quad d\, Q^o(x) = I \end{cases}$$

soit λ_n une suite de nombres réels tendant en croissant vers l'infini, $\lambda_o = 1$

Définissons une suite de mesure de Poisson $N^n(..))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$E\, (N^n([o,t] \times A)) = \lambda_n\, t\, Q^n(A) = t\, \nu^n(A)$ où $Q^n(A) = Q^o(\sqrt{\lambda_n}.A)$

soit alors $y_t^n = \int_o^t \int x\, d\, N^n(s,x)$

Vérifions que pour toute fonction g définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles, deux fois continûment différentiable au voisinage de zéro et telle que $g(x) - g(o) - \langle Dg_{(o)}, x\rangle$ soit intégrable pour chaque ν^n, on a :

$$\lim_n \int |g(x) - g(o) - \langle Dg_{(o)}, x\rangle \; d\nu^n(x)$$
$$= \frac{1}{2} (D^2 g(o), I)$$
$$= \frac{1}{2} \text{ trace } D^2 g(o)$$

par suite de la définition de $\nu^n(x)$ on a pour toute fonction f intégrable pour ν^n

$$\int f(x) \; d\nu^n(x) = \lambda_n \int f(\alpha_n x) E \; dQ^o(x) \qquad \text{en notant } \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \alpha_n$$

alors

$$\int (g(x) - g(o) - \langle Dg(o), x\rangle \; d\nu^n(x)$$
$$= \lambda n \int_S g(\alpha_n x) - g(o) - \langle Dg_{(o)}, \alpha_n x\rangle \; dQ^o(x)$$

soit $\phi_x(u) = g(ux) - g(o) - \langle Dg(o), ux\rangle$, $u \in \mathbb{R}$

$\phi_x(o) = 0$

$\phi_x(u)$ est 2 fois continûment différentiable dans un voisinage de zéro indépendant de x et $\phi_x(u) = \frac{u^2}{2} D^2 g \; (\theta_x u. \, x) \; (x \otimes x)$

alors

$$\lambda_n \int_S g(\alpha_n x) - g(o) - \langle Dg_{(o)}, \alpha_n x\rangle \; d\, Q^o(x)$$
$$= \frac{1}{2} \int_S (D^2 g \; (\theta_x \alpha_n . \, x) - D^2 g(o) \; (x \otimes x) \; d\, Q^o(x) + \frac{1}{2} (D^2 g(o), I)$$

$D^2 g$ étant continue dans un voisinage de zéro pour $(n \geq n_\varepsilon)$

$$\sup_{x \in S} |D^2 g(\theta_x \alpha_n . \, x) - D^2 g(o)| \leq \varepsilon$$

En conséquence

$$\lim_{n} \int \left[g(x) - g(o) - \langle Dg(o) , x\rangle\right] \, d\nu^n(x) = \frac{1}{2} \text{ trace } D^2 g(o)$$

En particularisant Q^o

$$\text{soit } Q^o = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_{\pm\alpha_n e_i} \qquad \text{ou } e_i = (\delta_{ij})_{j=1\ldots d}$$

$(y_t^n)_{t\in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique poissonnisée

$\boxed{\S \text{ III}}$

HYPOTHESES GENERALES ET EQUATIONS D'APPROXIMATION

III-1 Notations

$$\sigma \ : \ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \sim \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

$$m \ : \ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

m et σ sont deux fonctions Boréliennes

III-2 On introduit les équations d'approximation

$$(1) \qquad x_t = x_o + \int_o^t \sigma(x_s, s) \, d\beta_s + \int_o^t m(x_s, s) \, ds$$

$$(1)^n \qquad x_t^n = x_o + \int_o^t \sigma(x_s^n, s) \, dy_s^n + \int_o^t m(x_s^n, s) \, ds$$

où (β_t) est en Brownien tel que $\langle\beta\rangle_t = C.t$

$(y_t^n)_{t\in[0,T]}$ défini en 2.2.2

III-3 Hypothèses générales sur les coefficients

Pour toute la suite, on supposera que :

- σ et m sont bornées
- σ et m localement lipschitziennes en ce sens que

$\forall R > 0 \quad \exists C_R > 0$:

$$|\sigma(x,s) - \sigma(y,s)| \leq C_R \quad |x - y|$$

$$|m(x,s) - m(y,s)| \leq C_R \quad |x - y|$$

$$\forall x,y : |x| < R \quad \text{et } |y| < R \qquad \forall s \in [0,T]$$

sous ces hypothèses il y a existence et unicité en loi des solutions simultanément pour les équations ① et $①^n_{n \in \mathbb{N}}$ [2]

III-4 Formule de Itô généralisée

Soit $(\beta_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement Brownien de matrice de covariance C

$(\tilde{\beta}_t)_{t \in [0,T]}$ une mesure de Poisson recentrée de mesure de Lévy ν

$$b : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$
$$\alpha : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\int_0^T E|b(s)|^2 \, ds < \infty, \int_0^T E|\alpha(s)| \, ds < \infty, \int_0^T \int E|f(s,x)|^2 \, ds \, d\nu(x) < \infty$$

g deux fois continûment différentiable en x

$$\int_0^t \int |g(s,\eta_s + f(s,x)) - g(s,\eta_s)|^i \, ds \, d\nu_{i=1,2}(x) < +\infty$$

où $\eta_t = \int_0^t \alpha(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,d\beta_s + \int_0^t \int f(s,x)\,d\tilde{\beta}(s,x)$

alors

$$g(t,\eta_t) = \int_0^t L(g)(s)\,ds + \int_0^t \langle D_{o1}\, g(s,\eta_s) \; , b(s)\,d\beta_s\rangle$$
$$+ \int_0^t \int \left[g(s,\eta_s + f(s,x)) - g(s,\eta_s)\right] d\tilde{\beta}(s,x)$$

où L est un opérateur intégro-différentiel $L(g) = L_o(g) + L_1(g) + L_\nu(g)$

avec $L_o g\,(t) = D_{10}\, g(t,\eta_t) + D_{o1}\, g(t,\eta_t)\,(\alpha(t))$

$$L_1 g\,(t) = \frac{1}{2}\,(D_{o2}\, g(t,\eta_t) \quad , b(t)\, C\, b^*(t))$$

$$L_\nu g\,(t) = \int \left[g(t,\eta_t + f(t,x)) - g(t,\eta_t) - (\underset{o1}{Dg}(t,\eta_t)\, f(t,x))\right] d\nu(x)$$

III-5 Propriétés de $(x_t^n)_{t\in[0,T]}$ solution de (1) ^{n}

III-5-1 Le processus $(x_t^n)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Markov. Soit A^n son générateur infinitésimal, toute fonction f continûment différentiable et telle que f' soit borné est dans le domaine de A^n et

$$A_s^n f(x) = \langle D f(x) \;, m(x,s)\rangle$$
$$+ \int \left[f(x + \sigma(x,s)u) - f(x) - \langle D f(x) , \sigma(x,s)u\rangle\right] d\nu^n_{(u)}$$

III-5-2 Pour la suite il est nécessaire d'estimer les moments d'ordre 2 et 4 de $z_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n, s)dy_s^n$

La formule de Itō permet de le faire.

Ecrivons $z_t^n = \int_0^t \int \sigma(x_s^n, s)\; d\beta^n(x,s)$

- soit $g(x) = |x|^2 = <x, x>$

$D\,g(x) = 2x$

alors $g(z_t^n) = \int_o^t L_{\nu_n}\, g(s)\, ds + \int_o^t (g(z_s^n + \sigma(x_s^n)x) - g(z_s^n))\, d\beta^n(x,s)$

$E(g(z_t^n)) = \int_o^t E\,(L_{\nu_n}\, g\,(s))\, ds$

avec $L_{\nu_n}\, g(s) = \int < \sigma(x_s^n)\, x,\ \sigma(x_s^n)\, x >\, d\nu^n(x)$

σ étant bornée $|L_{\nu_n}\, g(s)| \leqslant K^2 . \int |x|^2\, d\nu^n(x) = K^2 \mathrm{tr}.\, C$

en conséquence

$$E\,|z_t^n|^2 \leqslant K^2 .\ \mathrm{tr}\ C.\ t$$

- soit $g(x) = |x|^4 = <x,x>^2$

$Dg(x) = 4 <x, x> . x$

$$L_{\nu_n}\, g_{(s)} = \int (|\, z_s^n + \sigma(x_s^n)x|^4 - |z_s^n|^4 - 4\, |z_s^n|^2 . < z_s^n\ , \sigma(x_s^n)x>)\, d\nu^n_{(x)}$$

$$= \int <\sigma(x_s^n)x,\ \ \sigma(x_s^n)\ x>^2\ d\nu^n(x)$$

$$+ 4 \int (< z_s^n,\ \ \sigma(x_s^n)x>)^2\, d\nu^n(x)$$

$$+ 4 \int (< z_s^n\ , \sigma(x_s^n)\ x> |\, \sigma\ (x_s^n)\ x|^2)\, d\nu^n(x)$$

$$+ 2 \int |z_s^n|^2 < \sigma(x_s^n)\ x,\ \sigma(x_s^n)\ x > d\nu^n(x)$$

σ étant bornée par K et $E\,|z_t^n|^2 \leqslant K^2$ tr C. t

On en déduit que

$$E\,|z_t^n|^4 \leqslant K^4 .\ t \int |x|^4\, d\nu^n(x) + 3\ K^4 (\mathrm{tr}\ C)^2\, t^2$$
$$+ 4\, K^4 (\mathrm{tr}\ C)^{1/2}\, t^{3/2} \int |x|^3\, d\nu^n(x)$$

III-5-3 Lemme

Il existe une constante K et une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$$

$$E\,|z_t^n - z_s^n|^4 \leq K\,(t-s)\,(\delta_n + (t-s))$$

$$\forall\, s,\, t \in [0,T] \qquad s \leq t$$

Le lemme résulte de la majoration précédente appliquée à

$$v_s(t) = \int_s^t \sigma(x_u^n)\, dy_u^n \qquad t \geq s \quad s \text{ fixé}$$

$$\delta_n = \int |x|^4\, d\nu^n(x) + \int |x|^3\, d\nu^n(x)$$

III-6 Générateur infinitésimal de $(x_t)_{t\in[0,T]}$

Soit A le générateur infinitésimal de $(x_t)_{t\in[0,T]}$, toute fonction f deux fois continûment différentiable, telle que Df et D^2f soient bornées, est dans le domaine de A et

$$A_s f(x) = \langle Df(x),\, m(x,s) \rangle + \frac{1}{2}\,(D^2 f(x),\, \sigma(x,s)\, C\, \sigma^*(x,s))$$

$\boxed{\S \ \text{IV}}$

ETUDE DE LA CONVERGENCE EN LOI

IV - 1 THEOREME

Soient - σ et m vérifiant les hypothèses III-3
- $(x_t^n)_{t \in [0,T]}$ solution de l'équation $(1)^n$ et P^n la loi de $(x_t^n)_{t \in [0,T]}$
- $(x_t)_{t \in [0,T]}$ solution de l'équation (1) et $\tilde{P}$ la loi de $(x_t)_{t \in [0,T]}$

Alors la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\tilde{P}$, sur $D([0,T], \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Skorokhod.

La démonstration se fait par étapes suivant un schéma classique :

IV-2 LEMME

$\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact sur $D([0,T], \mathbb{R}^d)$ et si $\tilde{P}$ est la limite d'une sous-suite $\tilde{P}(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)) = 1$.

IV-3 LEMME

Pour toute fonction f de $C_{\infty}^{o}(\mathbb{R}^d)$

$$A_s^n.\ f(x) \longrightarrow A_s\ f(x)$$

uniformément en (x,s)

IV-4 LEMME

Soit $\tilde{P}$ la limite d'une sous-suite $(P_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alors pour toute fonction f de $C_{\infty}^{o}(\mathbb{R}^d)$

$$f(x_t) - f(x_o) - \int_o^t A_s\ f(x_s)\ ds \quad \text{est une } \tilde{P}\text{-martingale}$$

$C_{\infty}^{o}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables à support compact.$\}$

IV-5 DEMONSTRATION DU LEMME IV-2

$$x_{\bullet} \in D([0,T], \mathbb{R}^d)$$

soit $\omega_x(\delta) = \underset{\substack{|t-s| \leqslant \delta \\ s,t \in [0,T]}}{\mathrm{Sup}} |x_t - x_s|$

$P\ (x_o^n = x_o) = 1$ alors

Pour démontrer le lemme IV-2, il suffit de vérifier que :

IV-5-1 $\quad \forall \varepsilon\ \forall \eta \quad \exists\ \delta$ et $\exists$ no :

$$P_n\ \{x : \omega_x(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \eta \qquad \forall\ n \geqslant \text{no}$$

D'autre part, on a :

IV-5-2 $$P_n \{x : w_x(\delta) \geqslant 3\varepsilon\}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} P_n \{x : \sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |x(s) - x(t_{i-1})| \geqslant \varepsilon\}$$

où $\{ti\}$ $i = 1..$ r est une subdivision de $[0,T]$ telle que

$$t_i - t_{i-1} > \delta \quad 2 \leqslant i \leqslant r-1$$

Examinons $P_n \{x : \sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |x(s) - x(t_{i-1})| \geqslant \frac{\varepsilon}{6}\}$

Soit $z_t^n = \int_0^t \sigma(x_s^n, s)\, dy_s^n$

z_t^n est une martingale et $x_t^n - x_s^n = z_t^n - z_s^n + \int_s^t m(x_u^n, u)\, du$

alors

$$\sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |x_{t_{i-1}}^n - x_s^n| \leqslant \sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |z_{t_{i-1}}^n - z_s^n| + (t_i - t_{i-1}) \sup_{x,s} |m(x,s)|$$

et $(z_t^n)_{t \in [0,T]}$ étant une martingale on a

$$P\left(\sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |z_{t_{i-1}}^n - z_s^n| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4} E(|z_{t_i}^n - z_{t_{i-1}}^n|^4)$$

mais d'après III.5.3 $E(|z_{t_i}^n - z_{t_{i-1}}^n|^4) \leqslant K(t_i - t_{i-1})(\delta_n + (t_i - t_{i-1}))$

soient δ et une subdivision (t_i) $i = 1..r$

tels que

$$\begin{cases} \delta < t_i - t_{i-1} & i = 2_1 \dots r-1 \\ \sup\limits_i (t_i - t_{i-1}) \leqslant 2\,\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{12.\ \sup\limits_{x\ s} |m(x, s)|} \end{cases}$$

alors

$$P_n \{x : \sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |x_s - x_{t_{i-1}}| > \varepsilon/3 \}$$

$$\leqslant P \{ \sup_{t_{i-1} \leqslant s < t_i} |z^n_{t_{i-1}} - z^n_s| > \varepsilon/6\}$$

$$\leqslant \frac{6^4}{\varepsilon^4} E(|z^n_{t_{i-1}} - z^n_{t_i}|^4) \leqslant \frac{6^4}{\varepsilon^4} K\,(t_i - t_{i-1})\ ((t_i - t_{i-1}) + \delta_n)$$

et $P_n \{x : w_x(\delta) > \varepsilon\}$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \frac{6^4}{\varepsilon^4} K\,(t_i - t_{i-1}) \quad ((t_i - t_{i-1}) + \delta_n)$$

$$\leqslant \frac{6^4}{\varepsilon^4} K\,T. \left[\sup_i (t_i - t_{i-1})\right] + \delta_n)$$

mais $\sup\limits_i (t_i - t_{i-1}) \leqslant 2\,\delta$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$

choisissons δ tel que $\delta \leqslant \frac{1}{2} \dfrac{\varepsilon}{12 \sup\limits_{x,s} |m(x,s)|} \wedge \dfrac{\eta\ \varepsilon^4}{2\ .\ 6^4\ K\ .\ T}$

et no tel que $\forall\ n \geqslant no \quad \delta_n \leqslant \frac{1}{2} \dfrac{\eta\ \varepsilon^4}{6^4 .\ K\ .\ T}$.

alors $P_n \{x : w_x (\delta) > \varepsilon \} \leqslant \eta$

dès que $n \geqslant n_o$.

Il en résulte que $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendu et donc relativement compact. De plus si $\tilde{P}$ est la limite d'une sous suite on a $\tilde{P}$ (C) = 1 où $C = ([0,T] , \mathbb{R}^d)$ (Billingsley [1])

IV-6 DEMONSTRATION DU LEMME IV.3

Soit $f \in C^{o}_{\infty}(\mathbb{R}^d)$

$$A^n_s f(x) = \langle D f(x) , m(x,s) \rangle + \int [f(x + \sigma(x,s)u) - f(x) - \langle D f(x), \sigma(x,s)u \rangle] d\nu^n(u)$$

$$= \bar{A}^n_s f(x) + \langle D f(x) , m(x,s) \rangle$$

Soit $\phi_{x,s}(u) = f(x + \sigma(x,s)u)$

$$\phi_{x,s} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D \phi_{x,s} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^d$$

$$D^2 \phi_{x,s} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}[\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})] \sim \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$$

et $D \phi_{x,s}(u) = D f(x + \sigma(x,s)u) \circ \sigma(x,s)$

$$D^2 \phi_{x,s}(n) (h \otimes k) = D^2 f(x + \sigma(x,s)u) (\sigma(x,s) \circ (h \otimes k) \circ \sigma^*(x,s))$$

de plus $\phi_{x,s}(o) = f(x)$

$$D\phi_{x,s}(o) = D f(x) \circ \sigma(x,s)$$

d'où $\phi_{x,s}(u) - \phi_{x,s}(o) - \langle D\phi_{x,s}(o) , u \rangle$

$$= f(x + \sigma(x,s)u) - f(x) - \langle Df(x), \sigma(x,s)u \rangle$$

et $\bar{A}^n_s f(x) \to \frac{1}{2} D^2 f(x) ((\sigma(x,s) \circ C \circ \sigma^*(x,s))$

pour chaque (x,s).

Il y a donc convergence simple . Montrons que la convergence est uniforme.

Par suite des hypothèses :

$$(D^2 f(x),\ \sigma(x,s) o C o \sigma^*(x,s)) = \int (D^2 f(x),\ \sigma(x,s) o (u \otimes u) o \sigma^*(x,s))\, d\nu^n(u)$$

D'autre part f est indéfiniment différentiable à support compact et σ est bornée ; en conséquence

$$|f(x+\sigma(x,s)u) - f(x) - \langle Df(x), \sigma(x,s)u\rangle - \frac{1}{2}(D^2 f(x), \sigma(x,s) o (u \otimes u) o \sigma^*(x,s))| \leq K|u|^3$$

et $|A_s^n f(x) - A_s f(x)| = |\overline{A}_s^n f(x) - \overline{A}_s f(x)| \leq K \int |u|^3 d\nu^n(u)$

D'après II-3-2 $\lim\limits_n \int |u|^3\, d\nu^n(u) = 0$

On en déduit que

$$\lim_n \sup_{x,s} |A_s^n f(x) - A_s f(x)| = 0$$

c'est-à-dire la convergence uniforme.

IV - 7 DEMONSTRATION DU LEMME IV-4

soit $f \in C_\infty^o(\mathbb{R}^d)$

Une application directe de la formule de Itō à f et x_t^n donne :

$$f(x_t^n) - f(x_o) - \int_o^t A_s^n f(x_s^n)\, ds = \int_o^t \int [f(x_s^n + \sigma(x_s^n, s)x) - f(x_s^n)]\, d\beta^n_{(s,x)}$$

En conséquence :

$f(x_t^n) - f(xo) - \int_o^t A_s^n f(x_s^n)$ ds est une martingale et pour toute fonction

F . $\mathcal{D}_s$. mesurable , continue et bornée

$$E^{P^n}(F \cdot (f(x_t) - f(x_s))) = E^{P^n}(F \cdot \int_s^t A_u^n f(x_u)\, du)$$

soit une sous suite extraite de $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et convergeant vers $\tilde{P}$, on la note également $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

alors $E^{Pn}(F.(f(x_t) - f(x_s))) \to E^{\tilde{P}}(F.(f(x_t) - f(x_s))$

La convergence uniforme en (s,x) de $A_s^n f(x)$ vers $A_s f(x)$ et la bornitude de F entraîne que

$$E^{Pn}(F. \int_s^t A_u^n f(x_u) du) \to E^{\tilde{P}} (F . \int_s^t A_u f(x_u) du)$$

d'où $$E^{\tilde{P}}(F. \int_s^t A_u f(x_u) du) = E^{\tilde{P}} (F. f(x_t) - f(x_s))$$

en conséquence

$f(x_t) - f(x_o) - \int_o^t A_u f (x_u) du$ est une $\tilde{P}$. martingale.

IV-8 DEMONSTRATION DU THEOREME

L'équation 1 possédant une solution $((x_t)_{t \in [o,T]} x(o) = x_o)$ unique en loi on sait que le problème des martingales $((O,x_o), A_u)$ possède une solution unique $\tilde{P}$ ([14])

Plus précisément il existe une probabilité unique $\tilde{P}$ sur $\mathcal{C}([O,T], \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\text{IV-8-1} \quad \begin{cases} \tilde{P}(x(o) = x_o) = 1 \\ \forall f \in \mathcal{C}_\infty^o \\ \quad f(x_t) - f(x_o) - \int_o^t A_u f(x_u) du \\ \quad \text{est une } \tilde{P} \text{ martingale.} \end{cases}$$

D'après les lemmes IV-2 et IV-4 pour toutes sous suite convergente extraite de $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la limite vérifie IV-8-1

L'unicité de la solution $\tilde{P}$ du problème des martingales $((o,x_o), A_u)$ entraine que la suite $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\tilde{P}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

1	P. BILLINGSLEY	Convergence of probability measures J. Wiley and Sons
2	I.I. GIHMAN A.V. SKOROKHOD	Stochastic differential equations Springer Verlag 1972
3	ITO	On a formula concerning stochastic differentials Nagoya Math. J. Vol. 3 Oct. 1951
4	ITO	On stochastic differentials equations Mem. of the Amer. Math. Soc. N° 4 1951
5	KUNITA	Diffusion processes and control systems Cours donné à Paris VI 1973-1974
6	T.G. KURTZ	Limit theorems for sequences of jump Markov processes approximating ordinary differential processes Journal of applied probability Vol. 8 N° 2 Juin 1971
7	Mac KEAN	Stochastic Integral Academic Press New-York
8	MARUYAMA	Continuous Markov Processes and Stochastic Equations Rendiconti del Circolo matematico di Palermo Fasc. I 1955 Série II Tome IV
9	METIVIER	Intégrale Stochastique par rapport à des Martingales Hilbertiennes C.R. A.S. T. 276 1973
10	METIVIER	Intégrale stochastique Rennes 1972
11	METIVIER	Extension d'un résultat de Kunita
12	NAKAO	On the pathwise uniqueness of solution of the one dimensionnal stochastic equations Osaka J. Math. Vol. 9 N° 3 Déc. 1972
13	PRIOURET	Cours donné à l'Ecole d'Eté de Calcul des Probabilités (Saint Flour 1973) sur l'intégrale stochastique et les diffusions

14	STROOK-VARADHAN	Diffusion processes with continuous coefficients Communications on pure and applied Math. Vol. 22 Numéros 3 et 4 1969
15	STROOK-VARADHAN	On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle 6 th. Berkeley symposium Vol. 3
16	SKOROKHOD	Studies in the theory of random processes Addison-Wesley
17	SKOROKHOD	Limit theorem for Markov Processes Theory of Probability and its applications Vol. 3 1958
18	WONG et ZAKAI	On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals Ann. of Math. Stat. N° 36 1965
19	WONG et ZAKAI	On the relation between ordinary and stochastic differential equations Int. Journal of Engeenering Sciences Vol. 3 1965
20	WONG et ZAKAI	Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals Zeits für Wahrscheinlichtheorie Band 12, Heft 2 1969
21	YAMADA et WATANABE	On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations J. of Math. Kyoto University Vol. 11 Numéros 1 et 3 1971
22	M. YOR	Integrals stochastiques Hilbertiennes. Le problème des martingales dans un espace de Hilbert Thèse Paris VI 1973

OUVRAGES GENERAUX

MEYER P.A.	Probabilités et Potentiel
NEVEU	Cours sur l'intégrale stochastique (1071-1972)
BREIMANN	Probability - Addison Wesley (1968)

VU :

Le Président de la Thèse

VU :

Le Directeur de Thèse

VU et APPROUVE

RENNES, le

Le Directeur de l'U.E.R.

VU pour autorisation

RENNES, le

Le Président de l'Université de RENNES,

G. CHAMPAUD