H. HENNION

Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 3
« Séminaire de probabilités », , p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___3_A2_0>

MARCHES ALEATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGENES

DES GROUPES NILPOTENTS A GENERATION FINIE

par H. HENNION

Soit G un groupe nilpotent à génération finie et p une probabilité apériodique sur G. On appelle marche aléatoire (en abrégé m.a.) de loi p sur l'espace homogène M de G, la chaine de Markov de matrice P définie par

$$x,y \in M \quad , \quad P(x,y) = p\{g : g \in G \ , \ gx = y\} \quad .$$

Nous étudions ici la récurrence de P.

Un exemple caractéristique de la situation envisagée est donné par la probabilité de transition sur $\mathbb{Z}_2$:

$$P((k,l),(k+1,l)) = P((k,l),(k-1,l)) = P((k,l),(k,k+l)) = P((k,l),(k,-k+l)) = 1/4 \quad .$$

Nous verrons que, pour cette chaine, tous les points de $\mathbb{Z}_2$ sont transitoires.

Enoncé des résultats.-

L'hypothèse d'apériodicité faite sur p n'implique pas en général l'irréductibilité de P, cependant nous prouvons :

Théorème 1.-

Tous les points de M *sont de même nature (récurrente ou transitoire) pour la m.a. de loi* p .

Convenons alors de la

Définition.-

L'espace homogène M *du groupe nilpotent* G *est dit transitoire si toutes les m.a. sur* M *sont transitoires . il est dit récurrent dans le cas contraire.*

Soit $H_x = \{g : g \in G, gx = x\}$ le stabilisateur de $x \in M$ et G_1 le sous-groupe dérivé de G , le sous-groupe $H_x G_1$ est distingué dans G , car $H_x G_{1/G_1}$ est distingué dans le groupe abélien G/G_1 , d'autre part les stabilisateurs de deux points sont conjugués, $H_x G_1$ est donc indépendant de x , nous le notons H^1 . Il est clair que si H_{x_0} est d'indice fini dans H^1 , il en est de même pour tous les H_x .

Nous caractérisons les espaces homogènes récurrents des groupes nilpotents à génération finie et les m.a. récurrentes sur ces espaces par :

Théorème 2.-

M *est récurrent si et seulement si le groupe abélien* $G/_{H^1}$ *est récurrent et* H_x *est d'indice fini dans* H^1

Lorsque M *est récurrent, la m.a. de loi* p *sur* M *est récurrente si et seulement si la m.a. de loi* $\bar{p}$ *sur* $G/_{H^1}$ *est récurrente, en désignant par* $\bar{p}$ *l'image de* p *dans* $G/_{H^1}$.

Rappelons qu'un groupe abélien à génération finie est récurrent si et seulement si il est de la forme $\mathbb{Z}^d \oplus K$ où d est un entier entre 0 et 2 et K un groupe abélien fini ; et notons que lorsque $M = G$ on retrouve le critère de récurrence des groupes nilpotents à génération finie contenu dans [1] .

Lignes générales de la démonstration.-

Au chapitre I, nous réunissons des résultats généraux sur les groupes nilpotents à génération finie et les m.a. sur les espaces homogènes discrets, puis nous établissons le théorème 1 et nous montrons que, sous les hypothèses du théorème 2, M est récurrent ; le lemme I-7 que nous énonçons ensuite joue un rôle essentiel dans les chapitres suivants, il généralise le lemme 1 de [1] .

La démonstration de la transience de M lorsque les hypothèses du théorème 2 ne sont pas vérifiées différera selon son rang, notion introduite au chapitre I, elle sera divisée en deux parties.

Dans la première partie, chapitre II, adaptant la technique de [1] , nous prouvons que, si le rang de M est supérieur ou égal à 3 , M est transitoire, et nous ramenons l'étude du cas où le rang de M est 2 et H_x n'est pas d'indice fini dans H^1 à celle des m.a. sur $\mathbb{Z}_2$ considéré comme espace homogène du groupe $N_3(\alpha)$, i.e. $\mathbb{Z}_3$ muni du produit :

$$(a,b,c)\ (a',b',c') = (a+a',\ b+b',\ c+c'+\alpha\ a'b) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{Z}^*$$

agissant sur $\mathbb{Z}_2$ par :

$$(a,b,c)\ (x,y) = (x+a,\ y+c+\alpha\ bx)\ .$$

Dans la seconde partie, chapitre III, nous étudions cette dernière situation en utilisant successivement une méthode de troncation inspirée de [1] et la technique de fonction sous-harmonique introduite dans [2] . Ce chapitre est indépendant du précédent.

Pour les notions relatives aux groupes nous renvoyons à [6] .

<u>Notations</u>.-

Dans la suite, sauf mention contraire, G est un groupe nilpotent à génération finie, G_1 son sous-groupe dérivé, M un espace homogène de G (ou plus brièvement G-espace), enfin H_x est le stabilisateur de $x \in M$ dans G et $H^1 = H_x G_1$.

Soit K un groupe quelconque , δ_g est la masse de Dirac au point $g \in K$, si φ est une fonction réelle sur K , $\check{\varphi}$ est définie par $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$.

Chapitre I :

I.1.- Groupes nilpotents à génération finie

Soit G un groupe discret, si A et B sont deux parties de G on désigne par $[A,B]$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $a^{-1}\, b^{-1}\, ab$, $a \in A$, $b \in B$, on pose $G_0 = G$ et $G_{i+1} = [G, G_i]$ pour $i \geq 0$, G_1 est le sous-groupe dérivé de G .

Le groupe G est dit nilpotent de classe r si $G_r = \{e\}$, la suite

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_{r-1} \supset G_r = \{e\}$$

est appelée suite centrale descendante de G .

I.1.1. Rang d'un groupe nilpotent et rang d'un espace homogène

La notion de rang et ses propriétés sont bien connues dans le cas d'un groupe abélien, rappelons-les pour les groupes nilpotents telles qu'elles sont énoncées dans [7] .

Définition.-

Soit G *un groupe nilpotent de classe* r *à génération finie et* $(G_i)_{i=0}^{r}$ *sa suite centrale descendante, on appelle rang de* G *(*$\mathrm{rg}\, G$*) l'entier positif ou nul*

$$\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}\, G_{0/G_1} + \dots + \mathrm{rg}\, G_{r-1/G_r} \quad .$$

Proposition.-

Si H *est un sous-groupe distingué de* G

$$\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}\, G/_H + \mathrm{rg}\, H \ .$$

Si maintenant M est un espace homogène du groupe nilpotent à génération finie G , M est isomorphe aux classes à gauche de G selon le stabilisateur H_x

d'un point $x \in M$, de plus les stabilisateurs de deux points sont conjugués.

Posons alors :

Définition.-

On appelle rang de l'espace homogène M *de* G *(*$\mathrm{rg}\, M$*) l'entier positif ou nul*

$$\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H_x$$

I.1.2. Quelques propriétés du rang

Soit G nilpotent à génération finie, rappelons ([6] vol II, page 215) que l'ensemble K des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe distingué de G et que $G/_K$ est sans torsion.

Si G est sans torsion, d'après [5] il existe un groupe de Lie nilpotent, à génération compacte, connexe et simplement connexe $\hat{G}$, unique à un isomorphisme près tel que : G soit un sous-groupe uniforme de $\hat{G}$, si F est un sous-groupe de G il existe un unique sous-groupe fermé, connexe et simplement connexe $\hat{F}$ de $\hat{G}$ contenant F et tel que F soit uniforme dans $\hat{F}$, de plus si $\dim \hat{F}$ désigne la dimension de l'algèbre de Lie de $\hat{F}$, on a $\mathrm{rg}\, F = \dim \hat{F}$.

Lemme I.1.

Soit G *nilpotent et* H *un sous-groupe de* G ,

Si $\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H \geq 1$ *alors* $\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H.G_1 \geq 1$

Si $\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H = 1$ *alors* H *est d'indice fini dans* $H.G_1$.

Démonstration.-

Prouvons la première assertion en supposant d'abord G sans torsion. Puisque $\dim \hat{G} - \dim \hat{H} = \mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H \geq 1$, $\hat{H}$ est un sous-groupe fermé propre de $\hat{G}$, il en est donc de même de $\hat{H}\,(\hat{G})_1$ (cf. [5]) et par suite

$$\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, H.G_1 = \dim \hat{G} - \dim \widehat{H.G}_1 \geq \dim \hat{G} - \dim \hat{H}.(\hat{G})_1 \geq 1 \quad .$$

Soit maintenant G quelconque

$$\operatorname{rg} G/_K - \operatorname{rg} H.K/_K = \operatorname{rg} G/_K - \operatorname{rg} H/_{H\cap K} = \operatorname{rg} G - \operatorname{rg} H \geq 1$$

et

$$\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} H.G_1 = \operatorname{rg} G/_K - \operatorname{rg} H\, G_1/_{H\,G_1\cap K} = \operatorname{rg} G/_K - \operatorname{rg} H.K/_K\,.\,(G/_K)_1 \geq 1 \quad .$$

Si $\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} H = 1$, le résultat précédent implique $\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} H\, G_1 = 1$, donc H est d'indice fini dans $H.G_1$. ∎

Lemme I.2.

Soit G *nilpotent et* H *un sous espace de* G .

Il existe un sous-groupe $\tilde{H}$ *de* G *tel que :*

i) $H \subset \tilde{H}$ et $\operatorname{rg} H = \operatorname{rg} \tilde{H}$

ii) si $\tilde{H}$ *est d'indice fini dans un sous-groupe* K *de* G *alors* $\tilde{H} = K$

(il en résulte que, si $\tilde{H}$ *est distingué dans un sous-groupe* K *de* G *,* $K/_{\tilde{H}}$ *est sans torsion).*

Démonstration.-

Remarquons que ii) équivaut à : si $g \in G$ est tel qu'il existe un $n \neq 0$ avec $g^n \in \tilde{H}$ alors $g \in \tilde{H}$.

Supposons d'abord G sans torsion et posons $\tilde{H} = \hat{H} \cap G$. Il est clair que i) est satisfaite. Soit $(g^n(t))_t$ le sous-groupe à un paramètre de $\hat{H}$ passant par g^n, $g^n(1) = g^n$, on a $(g^n(\frac{1}{n}))^n = g^n$, donc $g^n(\frac{1}{n}) = g$ et $g \in \hat{H} \cap G = \tilde{H}$.

Si G est nilpotent quelconque et $\tilde{H}_K = (\widehat{H.K/_K}) \cap G/_K$, l'image réciproque $\tilde{H}$ de $\tilde{H}_K$ par la surjection canonique de G sur $G/_K$ vérifie i) et ii) . ∎

I.2. Marches aléatoires sur les espaces homogènes

Dans ce paragraphe G et G' sont des groupes discrets quelconques.

Lemme I. 3.

Soit $\hat{\phi}$ *une surjection du* G-*espace* M *sur le* G'-*espace* M' *et* ϕ *un homomorphisme de* G *sur* G' *, tels que :*

$$(\mathcal{H}) : \text{pour tout } g \in G \text{ et tout } x \in M \ , \quad \hat{\phi}(gx) = \phi(g)\,\hat{\phi}(x)$$

Soit alors p *une probabilité apériodique sur* G *,* $\phi(p)$ *est apériodique sur* G' *. Si* $\hat{\phi}(x)$ *est transitoire pour* $\phi(p)$ *,* x *est transitoire pour* p *, la réciproque est vraie lorsque* H_x *est d'indice fini dans* $\phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)})$ *.*

Sous cette dernière hypothèse, si G *et* G' *sont nilpotents à génération finie,* M *et* M' *ont même rang.*

Démonstration.-

La relation entre ϕ et $\hat{\phi}$ implique $\phi(H_x) \subset H'_{\hat{\phi}(x)}$, donc $H_x \subset \phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)})$.

Désignons par R_x un ensemble de représentants des classes à droite de H_x dans $\phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)})$ contenant l'élément neutre de G , si P et P' sont les matrices des m.a. sur M de lois p et $\phi(p)$,

$$P'^n(\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(x)) = (\phi(p))^n(H'_{\hat{\phi}(x)}) = p^n(\phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)})) = \sum_{g \in R_x} p^n(H_x.g) = \sum_{g \in R_x} P^n(g^{-1}x,x),$$

sommant en n et utilisant le principe du maximum, il vient

$$\sum_{n \geq 0} P^n(x,x) \leq \sum_{n \geq 0} P'^n(\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(x)) \leq |R_x| \cdot \sum_{n \geq 0} P^n(x,x)$$

où $|R_x|$ est le cardinal de R_x , la première partie de l'énoncé en découle.

L'assertion relative au rang résulte des égalités

$$\text{rg } G' = \text{rg } G - \text{rg Ker } \phi$$

$$\text{rg } H'_{\hat{\phi}(x)} = \text{rg } \phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)}) - \text{rg } \phi^{-1}(H'_{\hat{\phi}(x)}) \cap \text{Ker } \phi = \text{rg } H_x - \text{rg Ker } \phi \quad \blacksquare$$

Lemme I.4.

Soit F *un sous-groupe distingué de* G *et* M *un* G-*espace . On pose* $\bar{G} = G/_F$, $\bar{M} = M/_F$ *(ensemble des orbites des points de* x *par* F *) et l'on désigne par* Π *et* $\hat{\Pi}$ *les surjections canoniques de* G *sur* $\bar{G}$ *et de* M *sur* $\bar{M}$ *.*

Alors $\bar{M}$ *est un* $\bar{G}$-*espace, le couple* $(\Pi,\hat{\Pi})$ *satisfait à* $(\mathcal{H})$ *et le stabilisateur de* $\hat{\Pi}(x)$ *est* $H_x{\circ}F/_F$ *.*

Démonstration.-

Soit x , $x' \in M$ et $g, g' \in G$ tels que $x' = hx$ et $g' = kg$ avec $h, k \in F$, $g'x' = kghx = k(ghg^{-1})gx$, puisque F est distingué l'action de G sur M est compatible avec les quotients par F , et $\bar{G}$ agit sur $\bar{M}$ de telle sorte que Π et $\hat{\Pi}$ satisfont $\mathcal{H}$. Π étant surjective, le stabilisateur de $\hat{\Pi}(x)$ dans G est $\Pi\{g : \hat{\Pi}(gx) = \hat{\Pi}(x)\} = H_x . F/_F$.

Enfin, il est clair que $\bar{G}$ agit transitivement sur $\bar{M}$. ∎

Lemme I.5.-

Soit ϕ *un homomorphisme du groupe* G *sur le groupe* G' , H *et* H' *des sous-groupes de* G *et* G' *resp. , tels que* $H \subset \phi^{-1}(H')$

Il existe une surjection $\hat{\phi}$ *du* G*-espace* $M = {}_H\backslash^G$ *sur le* G'*-espace* $M' = {}_{H'}\backslash^{G'}$ *telle que* $(\phi, \hat{\phi})$ *satisfait à* $(\mathcal{H})$.

Démonstration.-

Puisque $\phi(H) \subset H'$, ϕ est compatible avec les équivalences à gauche selon H et H' , par suite on définit une surjection de M sur M' en posant pour $x = k\,H \in M$, $\hat{\phi}(x) = \phi(k).H' \in M'$. On a alors

$$\hat{\phi}(gx) = \hat{\phi}(gkH) = \phi(gk).H' = \phi(g)\ \phi(k)\ H' = \phi(g)\ .\ \hat{\phi}(x) \quad ∎$$

I.3. Démonstration du théorème 1.-

Nous aurons besoin du

Lemme 1.6.-

Soit H *un sous-groupe distingué du groupe nilpotent discret* G *et* p *une probabilité apériodique sur* G *dont l'image* $\bar{p}$ *dans* $\bar{G} = G/_H$ *est récurrente, alors la m.a. induite par* p *sur* H *est apériodique.*

Démonstration.-

Désignons par S le semi-groupe engendré par le support de p, d'après [4] le groupe engendré par S est $S.S^{-1}$ et nous avons $S.S^{-1} = G$, de plus la récurrence de $\bar{p}$ montre que S est un ensemble de représentants des classes de $\bar{G}$.

Si $h \in H$, il existe g et $g' \in S$ tels que $g'g^{-1} = h$, soit alors $k \in S$ tel que $(\bar{k})^{-1} = \bar{g} = \bar{g}'$, il est clair que gk et $gk' \in S \cap H$ tandis que $(g'k)(gk)^{-1} = h$, par suite $(S \cap H).(S \cap H)^{-1} = H$ et le lemme est établi. ■

On raisonne par récurrence sur le rang r des espaces homogènes.

Si $r = o$, H_x est d'indice fini dans G et si p est une probabilité apériodique sur G, les lemmes I.5. et I.3. nous permettent de réduire l'étude de la m.a. de loi p sur M à celle de la m.a. de loi p sur le G-espace $G/_G$, il en résulte clairement que tous les points de M sont récurrents pour p.

Supposons le théorème établi pour les espaces homogènes de rang $\leq r$

Soit alors M un G-espace de rang $r+1$. Passons au quotient par H^1,

avec les notations du lemme I.4., le stabilisateur de $\hat{\Pi}(x)$ dans $\bar{G}$ est $\{\bar{e}\}$, le groupe abélien $\bar{G}$ opère donc simplement et transitivement sur $\bar{M}$ et pour la m.a. de loi $\bar{p}$ les points de $\bar{M}$ sont récurrents ou transitoires en même temps que la m.a. de loi $\bar{p}$ sur $\bar{G}$.

Si $\bar{p}$ est transitoire les lemmes I.3. et I.4. permettent de conclure.

Supposons $\bar{p}$ récurrente.

Soit $\bar{x}_o \in \bar{M}$, $y \in \bar{x}_o$ est de même nature pour la chaine P et pour la chaine $P_{\bar{x}_o}$ induite par P sur $\bar{x}_o$, or $g\,y \in \bar{x}_o$ si et seulement si $g \in H^1$, de sorte que $P_{\bar{x}_o}$ est la m.a. sur le H^1-espace $\bar{x}_o$ dont la loi est la probabilité apériodique induite par p sur H^1.

Puisque, lemme I.1., $\operatorname{rg} H_x G_1 = \operatorname{rg} H^1 < \operatorname{rg} G$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure que tous les points de $\bar{x}_o$ sont de même nature pour p.

Soit maintenant $\bar{x} \in \bar{M}$, il existe $\bar{g}_i \in \bar{G}$, $i = 1, \ldots, n_1+n_2$ tels que $\bar{p}(\bar{g}_i) > 0$ et

$$\bar{g}_{n_1} \cdots \bar{g}_1 \bar{x}_o = \bar{x} \quad , \bar{g}_{n_1+n_2} \cdots \bar{g}_{n_1+1} \bar{x} = \bar{x}_o \quad ,$$

par suite si $y \in \bar{x}$ il existe z et $z' \in \bar{x}_o$ et $g_i \in G$, $i = 1 \ldots n_1+n_2$ tels que $p(g_i) > 0$ et

$$g_{n_1} \cdots g_1 z = y \; , \; g_{n_1+n_2} \cdots g_{n_1+1} y = z' \; ,$$

y est donc de même nature que z et z', ce qui achève la démonstration. ■

En tenant compte du théorème 1 , les lemmes du paragraphe précédent permettent d'écrire :

Proposition I. 1.-

Soit M *un* G*-espace* , F *un sous groupe distingué de* G , $\bar{G}=G/_{F}$, $\bar{M}=M/_{F}$
$\bar{M}$ *est un* $\bar{G}$*-espace et le stabilisateur de* $\bar{x}$ *est* $H_x.F/_{F}$

Si $\bar{M}$ *est transitoire,* M *est transitoire, la réciproque est vraie si* H_x *est d'indice fini dans* $H_x.F$ *et les espaces homogènes* M *et* $\bar{M}$ *sont alors de même rang.*

Proposition I.2.-

Soit ϕ *un homomorphisme du groupe* G *sur le groupe* G' , H *et* H' *des sous-groupes de* G *et* G' *respectivement tels que* $H \subset \phi^{-1}(N')$.

Si le G'*-espace* $G'/_{H'}$ *est transitoire, il en est de même du* G*-espace* $G/_{H}$ *, la réciproque est vraie si* H *est d'indice fini dans* $\phi^{-1}(H')$.

I.4. Récurrence de certains espaces homogènes.-

Proposition I.3.-

Si le groupe abélien $G/_{H^1}$ *est récurrent et si* H_x *est d'indice fini dans* H^1 , M *est récurrent. Dans ce cas, la m.a. de loi* p *sur* M *est récurrente si et seulement si la m.a. de loi* $\bar{p}$ *sur* $G/_{H^1}$ *est récurrente (*$\bar{p}$ *désigne l'image de* p *dans* $G/_{H^1}$*).*

Démonstration.-

Puisqu'il est clair que $G/_{H^1}$ opère simplement sur $M/_{H^1}$, la deuxième partie de cette proposition résulte immédiatement de la proposition I.1. appliquée au quotient par H^1 .

Soit $\bar{p}$ une probabilité récurrente sur $G/_{H^1}$ chargeant tous les points et q une probabilité sur H^1 chargeant tous les points , si $\{g^o\}$ est un ensemble de représentants des classes de H^1 dans G , la probabilité

$$p = \int \bar{p}(d\bar{g}) \quad \delta_{g^o} * q$$

charge tous les points de G , elle est donc apériodique ; d'après ce qui précède, la m.a. de loi p sur M est récurrente, ce qui achève la preuve. ∎

Corollaire.-

Si la m.a. de loi p *sur* M *est récurrente, on a pour tout* $x, y \in M$

$$\sum_n P^n (x,y) = +\infty$$

Démonstration.-

Il s'agit d'établir l'irréductibilité de P .

Soient $x,y \in M$, puisque la m.a. de loi $\bar{p}$ sur $G/_{H^1}$ est récurrente, il existe une suite $(g_i)_{i=1}^n$ d'éléments de G tels que $p(g_i) > 0$, $i = 1 \dots n$, et $g_n \dots g_1 x = z \in \bar{y}$, où $\bar{y}$ est l'orbite de y par H^1 , il suffit donc de prouver que la chaine induite sur $\bar{y}$ par P est irréductible, mais, comme nous l'avons remarqué au cours de la démonstration du théorème 1 , cette chaine est encore la m.a. sur le H^1-espace $\bar{y}$ dont la loi p_1 est celle de la m.a. induite par p sur H^1 , p^1 étant apériodique sur H^1 (lemme 1.6.) la démonstration du corollaire se réduit au cas où M est fini.

Soit M un G-espace fini, désignons par S(M) le groupe des permutations de M et par $\sigma(g)$ la permutation de M associée à l'action de g sur M . σ est un homomorphisme de G sur S(M) dont le noyau est $K = \bigcap_{x \in M} H_x$, de sorte que le groupe $\bar{G} = G/_K$ qui s'identifie à un sous-groupe de S(M) est fini.

Si p est une probabilité apériodique sur G et $\bar{p}$ son image dans $\bar{G}$, les m.a. de lois p et $\bar{p}$ sur M sont identiques (lemme I.4.) et il suffit pour conclure de remarquer que le semi-groupe engendré par la probabilité $\bar{p}$ apériodique sur le groupe fini $\bar{G}$ coïncide avec G . ■

Le lemme I.1. montre que, si rg $M \leq 1$, H_x est d'indice fini dans H^1 , la suite de la démonstration du théorème 2 consiste donc à établir que M est transitoire lorsque rg M = 2 et H_x n'est pas d'indice fini dans H^1 ou lorsque rg $M \geq 3$.

I.5. Majoration d'un produit de convolution

Lemme I.7.-

Soient :

- $(\lambda_i)_{i=1}^n$ *une suite de probabilités sur un groupe localement compact* K *s'écrivant*

$$\lambda_i = s_i\,\mu_i + (1-s_i)\,\nu_i$$

où s_i *est réel ,* $0 \leq s_i \leq 1$ *et* μ_i, ν_i *sont des probabilités ;*

- $(\alpha_i)_{i=1}^n$ *une suite d'homomorphismes de* K *dans le groupe abélien localement compact* K'

Pour toute fonction φ *réelle borélienne et bornée, à support compact sur* K' *et tout* $k \in K'$

$$\delta_k * \alpha_1(\lambda_1) * \ldots * \alpha_n(\lambda_n)(\varphi * \check{\varphi}) \leq \alpha_1(\tilde{\lambda}_1) * \ldots * \alpha_n(\tilde{\lambda}_n)(\varphi * \check{\varphi})$$

où $$\tilde{\lambda}_i = \frac{s_i}{2}\,\mu_i * \check{\mu}_i + (1-\frac{s_i}{2})\,\delta_0$$

Pour $s_i=1$, on retrouve le lemme 1 de [1] .

Démonstration.-

Soit Γ' le groupe dual de K' et $\hat{}$ la transformation de Fourier sur K' , si ζ est une probabilité sur K'

(1) $$\zeta(\varphi*\check{\varphi}) = \zeta*(\varphi*\check{\varphi})(o) = \langle \zeta * \varphi, \varphi \rangle_{L^2(K')} = \langle \hat{\zeta}\cdot\hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle_{L^2(\Gamma')} = \int |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 \cdot \hat{\zeta}(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 \,.\,\mathrm{Re}\,\hat{\zeta}(\gamma)\,.\,d\gamma$$

Des inégalités

$$|\widehat{\alpha_i(\mu_i)}| \leq \frac{1}{2}\,(|\widehat{\alpha_i(\mu_i)}|^2 + 1) \quad \text{et} \quad |\widehat{\alpha_i(\nu_i)}| \leq 1$$

il vient

$$|\widehat{\alpha_i(\lambda_i)}| \leq s_i|\widehat{\alpha_i(\mu_i)}| + (1-s_i)\cdot|\widehat{\alpha_i(\nu_i)}| \leq \frac{s_i}{2}\,(|\widehat{\alpha_i(\mu_i)}|^2 + 1) + (1-s_i) = \widehat{\alpha_i(\tilde{\lambda}_i)} ,$$

enfin puisque $|\hat{\delta}_k| = 1$

(2) $$|\widehat{\delta_k * \alpha_1(\lambda_1) * \ldots * \alpha_n(\lambda_n)}| \leq \widehat{\alpha_1(\tilde{\lambda}_1)} * \ldots * \widehat{\alpha_n(\tilde{\lambda}_n)} ,$$

(1) et (2) permettent de conclure ∎

Le lem suivant permet de supposer que le support de p est un semi-groupe. Nous l'empruntons à [3].

Lemme I.8.-

Les m.a. sur M *associées aux probabilités* p *et* $q=e^{-1}\sum_{k\geq o}\frac{1}{k!}p^k$ *sont de même nature.*

Démonstration.-

En effet, pour $n \geq o$, $q^n = e^{-n}\sum_{k\geq o}\frac{n^k}{k!}p^k$

et par suite

$$\sum_{n\geq o} q^n = \sum_{n\geq o} e^{-n}\sum_{k\geq o}\frac{n^k}{k!}p^k = \sum_{k\geq o}\left(\sum_{n\geq o}\frac{n^k e^{-n}}{k!}\right)p^k .$$

Lorsque n tend vers l'infini $\sum_{n\geq o}\frac{n^k e^{-n}}{k!}$ converge vers $\frac{1}{k!}\int_o^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx = 1$.

Il existe donc des constantes c_1 et c_2, $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ telles que

$$c_1 \sum_{n\geq o} q^n \leq \sum_{n\geq o} p^n \leq c_2 \sum_{n\geq o} q^n .$$

Si U et U' sont les potentiels des m.a. sur M associées à p et q l'on a

$$c_1 U' \leq U \leq c_2 U'$$

ce qui achève la preuve.■

Chapitre II :

La proposition établie au premier paragraphe servira dans le deuxième à prouver la transience lorsque $rg\ M \geq 3$ et dans le troisième à ramener le cas où $rg\ M = 2$ et H_x n'est pas d'indice fini dans H^1 à celui d'un espace homogène de $N_3(\alpha)$.

II.1.- Une majoration des puissances de la matrice P

II.1.1. Hypothèses

Les hypothèses de ce paragraphe sont les suivantes :

- G est un groupe discret quelconque
- U et V sont des sous-groupes abéliens distingués de G tels que $U \supset V$
- M est un G-espace .

II.1.2. Le groupe G' et son action sur M

U est conservé par les automorphismes intérieurs de G et , puisqu'il est abélien, cette action de G sur U est compatible avec l'équivalence selon U . Notons $\bar{G}$ le quotient $G/_U$, $\bar{g}$ les éléments de $\bar{G}$ et $\alpha_{\bar{g}}$ l'automorphisme de U défini par

$$u \in U \quad , \quad \alpha_{\bar{g}}(u) = g\,u\,g^{-1} \ , \text{ où } g \in \bar{g} \ .$$

La restriction de $\alpha_{\bar{g}}$ à V est un automorphisme de V .

G' *est le groupe obtenu en munissant le produit* $\bar{G} \times V = G/_U \times V$ *de la loi :* $(\bar{g},v)(\bar{g}',v') = (\bar{g}\,\bar{g}',\ v\,\alpha_{\bar{g}}(v'))$.

Lemme II.2.-

Soit $\{x^0\}$ *un ensemble de représentant de* $M/_U$, G' *opère sur* M *par* $(\bar{g},v) \in G'$, $x \in M$, $(\bar{g},v)x = v\,\alpha_{\bar{g}}(u)\,(gx)^0$.

où u *est un élément de* U *tel que* $x = ux^o$ *et* $g \in \bar{g}$

Le stabilisateur de x^o *dans* G' *est* $H_{x^o}.U/_U \times H_{x^o} \cap V$.

Si $U = V$ *,* M *est un espace homogène de* G .

Démonstration.-

Puisque $M/_U$ est un espace homogène de $\bar{G}$, l'expression $(\bar{g},v)x$ est indépendante du représentant g de $\bar{g}$. Remarquons qu'il existe un $g' \in \bar{g}$ tel que $g'\,x^o = (gx)^o$, il vient alors

$$(\bar{g},v)x = v\,\alpha_{\bar{g}}(u)(gx)^o = v(g'ug'^{-1})\,g'x^o = v\,g'\,u\,x^o = v\,g'\,x\ ,$$

ce qui prouve que $(\bar{g},v)x$ est indépendant de la représentation de x par un élément de U .

Etablissons maintenant que par cette formule G' opère sur M .

Pour $x = u\,x^o$, $u \in U$

$$((\bar{g}_2,v_2)(\bar{g}_1,v_1))x = (\bar{g}_2\bar{g}_1,v_2\alpha_{\bar{g}_2}(v_1))x = v_2\ \alpha_{\bar{g}_2}(v_1)\ \alpha_{\bar{g}_2\bar{g}_1}(u)(g_2g_1x)^o$$

tandis que

$$(\bar{g}_2,v_2)((\bar{g}_1,v_1)x) = (\bar{g}_2,v_2)v_1\ \alpha_{\bar{g}_1}(u)(g_1x)^o = v_2\ \alpha_{\bar{g}_2}(v_1\ \alpha_{\bar{g}_1}(u))(g_2g_1x)^o$$

donc

$$((\bar{g}_2,v_2)(\bar{g}_1,v_1))x = (\bar{g}_2,v_2)((\bar{g}_1,v_1)x)\ .$$

Pour que $(\bar{g},v)$ conserve x il faut et il suffit que $\bar{g}$ conserve $\bar{x}^o$ et que v conserve x^o , d'après la proposition I.1. le stabilisateur de x^o est $H_{x^o}.U/_U \times H_{x^o} \cap V$.

Enfin si $U = V$ il est clair que G' opère transitivement sur M ∎

II.1.3. Majoration des puissances de P

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de M .

Proposition II.1.-

Soit p *une probabilité sur* G *, il existe une probabilité* p' *sur* G' *telle que , si* P *et* P' *sont les matrices des m.a. de lois* p *et* p' *sur* M *, à tout* $K \in \mathcal{P}$ *on peut associer* $K' \in \mathcal{P}$ *(indépendant de* p *) tel que pour tout*

$x \in M$ *et tout* $n \geq o$

$$P^n 1_K(x) \leq P'^n 1_{K'}(x^o) .$$

Supposons G *nilpotent, alors, si* p *est apériodique et si son support est un semi-groupe,* p' *est apériodique.*

Démonstration.-

(a) Le groupe G''

On utilisera comme intermédiaire entre G et G' le groupe G'' obtenu en munissant le produit $\hat{G} \times V = G/_V \times V$ de la loi

$$(\hat{g},v),\ (\hat{g}',v') \in G'' \quad ,(\hat{g},v)(\hat{g}',v') = (\hat{g}\hat{g}',v\ \alpha_{\bar{g}}(v')) .$$

Puisque $U/_V$ est distingué dans $\hat{G}$, l'application qui à $\hat{g}$ fait correspondre $\bar{g}$ est un homomorphisme et il est clair que G'' est un groupe.

Lemme II.3.-

$U/_V \times \{e\}$ *est distingué dans* G'' *et le quotient correspondant est isomorphe à* G' .

Démonstration du lemme.-

Soit $\hat{u} \in U/_V$ et $(\hat{g},v) \in G''$

$$(\hat{g},v)(\hat{u},e)(\hat{g},v)^{-1} = (\hat{g}\hat{u},v)(\hat{g}^{-1},\ \alpha_{\bar{g}^{-1}}(v^{-1})) = (\hat{g}\hat{u}\hat{g}^{-1},v\ \alpha_{\bar{g}\,\bar{u}\,\bar{g}^{-1}}(v^{-1}))$$

puisque $\bar{u} = \bar{e}$ ce dernier terme vaut $(\hat{g}\ \hat{u}\ \hat{g}^{-1},e)$ et la preuve est complète car $U/_V$ est distingué dans $\hat{G}$. ∎

L'homomorphisme canonique de G'' sur G' fait correspondre à $(\hat{g},v) \in G''$, $(\bar{g},v) \in G'$, et l'on définit une action de G'' sur M par

$$(\hat{g},v) \in G'' \ ,\ x \in M \ ,\ (\hat{g},v)x = (\bar{g},v)x .$$

(b) La probabilité p'

Désignons par $\{g^o\}$ un ensemble de représentant de $\bar{G}$, par $\{u^o\}$ un ensemble de représentant de $U/_V$, $\{u^o g^o\}$ est un ensemble de représentants de $\hat{G}$.

Soit p une probabilité sur G, se désintégrant en

$$p = \int_{\hat{G}} \hat{p}(d\ \hat{g})\ p_{\hat{g}} .$$

où $\hat{p}$ est la probabilité image de p par l'homomorphisme canonique de G sur $\hat{G}$ et $p_{\hat{g}}$ est une probabilité sur G, portée par la classe g

Posons

$$\lambda_{u^o g^o} = p_{\hat{g}} * \delta_{(u^o g^o)^{-1}} \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_{u^o g^o} = \frac{1}{2}\,(\delta_e + \lambda_{u^o g^o} * \lambda_{u^o g^o}) ,$$

et définisssons la probabilité p'' sur le groupe G'' par :

$$\hat{A} \subset \hat{G} \quad \text{et} \quad B \subset V \quad , \quad p''(\hat{A} \times B) = \int_{\hat{G}} 1_{\hat{A}}(\hat{g})\, \hat{p}\,(d\hat{g})\, \tilde{\lambda}_{u^o g^o}(B) ,$$

p' est l'image de p'' par l'homomorphisme canonique de G'' sur G'.

(c) Nous prouvons que p' satisfait l'inégalité annoncée, puis qu'elle est apériodique.

Soit U_{x^o} le stabilisateur de x^o dans U, l'orbite de x^o par U est un U-espace isomorphe au groupe abélien $U/_{U_{x^o}}$. Si $x^o \in M$, nous désignons par $\tilde{x}$ sa classe dans $M/_U$, par $\sigma(x)$ la classe dans $U/_{U_{x^o}}$ des $h \in U$ tels que $x = h\,x^o$ et par $\mathcal{C}$ l'homomorphisme canonique de U sur $U/_{U_{x^o}}$.

Soit $k \in \mathcal{P}$, il existe une partie finie $\bar{K}$ de $M/_U$, une famille $(\varphi_{x^o})_{x^o}$ de fonctions à support fini dans $U/_{U_{x^o}}$ et $K' \in \mathcal{P}$ telles que

$$1_K(x) \leqslant f(x) = 1_{\bar{K}}(\tilde{x}) . \varphi_{x^o} * \check{\varphi}_{x^o}(\sigma(x)) \leqslant 1_{K'}(x) ,$$

il nous suffira donc de comparer $P^n f$ et $P'^n f$.

$$P^n f(x) = \int f(g_n \ldots g_1 x) \bigotimes_{i=1}^{n} p(dg_i) = \int_{\hat{G}^n} \bigotimes_{i=1}^{n} \hat{p}(d\hat{g}_i) \int_{G^n} f(h_n \ldots h_1 x) \bigotimes_{i=1}^{n} p_{\hat{g}_i}(dh_i)$$

$$= \int_{\hat{G}^n} \bigotimes_{i=1}^{n} \hat{p}(d\hat{g}_i) \int_{V^n} f(v_n(u_n^o\, g_n^o) v_{n-1}(u_{n-1}^o\, g_{n-1}^o) \ldots v_1(u_1^o\, g_1^o) x) \bigotimes_{i=1}^{n} \lambda_{u_i^o g_i^o}(dv_i)$$

L'argument de la fonction f s'écrit

$$(v_n\, u_n^o)\, g_n^o\, (v_{n-1}\, u_{n-1}^o)\, g_{n-1}^o \ldots (v_1\, u_1^o)\, g_1^o\, x =$$

$$v_n\, u_n^o\, \alpha_{\bar{g}_n}(v_{n-1}\, u_{n-1}^o) \ldots \alpha_{\bar{g}_n \ldots \bar{g}_2}(v_1\, u_1^o)\, g_n^o \ldots g_1^o\, x$$

écrivant $g_n^o \ldots g_1^o\, x = u'_n\, x_n^o$, $u'_n\, x_n^o = (g_n \ldots g_1\, x)^o$ et $u'_n \in U$ et utilisant la commutativité de U, il vient

$$v_n\, \alpha_{\bar{g}_n}(v_{n-1}) \ldots \alpha_{\bar{g}_n \ldots \bar{g}_2}(v_1)\, u''_n\, x_n^o$$

où $u''_n = u_n^o\, \alpha_{\bar{g}_n}(u_{n-1}^o) \ldots \alpha_{\bar{g}_n \ldots \bar{g}_2}(u_1^o)\, u'_n \in U$.

Utilisons maintenant la forme particulière de la fonction f. Puisque

$$\sigma(v_n\ \alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ \ldots\ \alpha_{\bar g_n \ldots \bar g_2}(v_1) u''_n\ x_n^o = \tau(v_n).\tau\circ\alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ldots\tau\circ\alpha_{\bar g_n\ldots\bar g_2}(v_1).\tau(u''_n)$$

et que

$$\overline{g_n \ldots g_1 x} = \bar g_n \ldots \bar g_1 \bar x$$

on aura

$$P^n f(x) = \int_{\hat G^n} 1_{\bar K}(\bar g_n \ldots \bar g_1\ \bar x) \overset{n}{\underset{i}{\otimes}} \hat p(d\hat g_i) \int_{V^n} \varphi_{x_n^o} * \check\varphi_{x_n^o}(\tau(v_n).\tau\circ\alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ldots\tau\circ\alpha_{\bar g_n\ldots\bar g_2}(v_1)$$

$$.\ \tau(u''_n)) \overset{n}{\underset{i}{\otimes}} \lambda_{u_i^o g_i^o}(dv_i) \ .$$

La première intégrale est majorée, lemme I.7. par :

$$\int_{V^n} \varphi_{x_n^o} * \check\varphi_{x_n^o}(\tau(v_n).\tau\circ\alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ \ldots\ \tau\circ\alpha_{\bar g_n\ldots\bar g_2}(v_1)) \overset{n}{\underset{i}{\otimes}} \tilde\lambda_{u_i^o g_i^o}(dv_i) \ ,$$

mais

$$\tau(v_n).\tau\circ\alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ldots\tau\circ\alpha_{\bar g_n\ldots\bar g_2}(v_1) = \sigma(v_n\ \alpha_{\bar g_n}(v_{n-1})\ \ldots\ \alpha_{\bar g_n\ldots\bar g_2}(v_1)\ x_n^o \ ,$$

par suite

$$P^n f(x) \leq \int_{G''^n} f((\hat g_n, v_n)\ \ldots\ (\hat g_1, v_1) x^o) \overset{n}{\underset{i}{\otimes}} p''(d\hat g_i, dv_i)$$

puisque l'action de G'' sur M se factorise par l'action de G' sur M

$$P^n f(x) \leq P'^n f(x^o) \ .$$

(d) Il suffit maintenant, pour achever la preuve de la proposition, d'établir, en supposant G nilpotent, que, si p est apériodique et si son support est un semi-groupe, p'' est apériodique.

Soit F le sous-groupe de G'' engendré par le support de p'', l'apériodicité de p entraîne celle de $\hat p$ et, puisque $p''(\hat A \times \{e\}) \geq \frac{1}{2}\hat p(\hat A)$, $F \supset \hat G \times \{e\}$. $F \cap (\{e\} \times V)$ est distingué dans F, donc dans $\hat G \times \{e\}$, étant évidemment distingué dans le sous-groupe abélien $\{\hat e\} \times V$, il l'est dans G''. Il en résulte que $F = \hat G \times W$, où W est un sous-groupe distingué de G.

$\tilde\lambda_{u^o g^o}$ est portée par W, par suite $\lambda_{u^o g^o}$ est portée par une classe de W dans V. Soit K le groupe nilpotent $G/_W$ et K' le sous-groupe $V/_W$ de K, si S est le support de l'image q de p dans K, pour tout $g \in K$, $S \cap g K'$ est vide ou réduit à un point de sorte que $S.S^{-1} \cap K' = \{e\}$. Mais l'hypothèse sur p

implique que S est un semi-groupe engendrant K et, d'après [4] , nous avons alors $S S^{-1} = K$. Nous en concluons $K' = \{e\}$, puis $W = V$ ■

II.2. Cas du rang $M \geqslant 3$

Proposition II.2.-

Si $\mathrm{rg}\, M \geqslant 3$, M *est transitoire.*

Démonstration.-

Nous raisonnons par récurrence sur la classe du groupe G .

Si G est de classe 1 , la proposition est claire.

Supposons la vraie pour les groupes nilpotents de classe r . Soit alors G de classe $r+1$ et

$$G = G_o \supset G_1 \supset \dots \supset G_r \supset G_{r+1} = \{e\}$$

sa suite centrale descendante, appliquons au couple (G,M) la proposition II.1. avec $U = V = G_r$ en supposant que le support de p est un semi-groupe (lemme I.8.). Le groupe G'' est nilpotent de classe r et de même rang que G , de plus les rangs de M comme espace homogène de G et G' sont égaux, car l'isomorphisme de $H_{x_o}.V/_V$ et de $H_{x_o}/_{H_{x_o} \cap V}$ implique $\mathrm{rg}\, H_{x_o} = \mathrm{rg}\, H_{x_o}.V/_V \times H_{x_o} \cap V$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure. ■

II.3. Cas d'un espace homogène de rang 2 tel que H_x ne soit pas d'indice fini dans H^1

Le groupe $N_3(\alpha)$ et son action sur $\mathbb{Z}_2$ ont été définis dans l'introduction. Nous prouvons ici la :

Proposition II.3.-

Si le $N_3(\alpha)$*-espace* $\mathbb{Z}_2$ *est transitoire, il en est de même de tout espace homogène de rang 2 d'un groupe nilpotent* G *tel que* H_x *ne soit pas d'indice fini dans* H^1 .

Démonstration de la proposition.-

Pour G nilpotent de classe r nous notons

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{r-1} \supset G_r = \{e\}$$

sa suite centrale descendante.

Lemme II.5.-

L'étude de la récurrence d'un espace homogène satisfaisant aux hypothèses de ce paragraphe se ramène à celle d'un espace homogène de rang 2 d'un groupe nilpotent G *de classe* $r \geq 2$ *possédant les propriétés :*

(i) *il existe* U *abélien distingué* $U \supset H_x$ *tel que* $G/_U$ *et* $U/_{H_x}$ *soient abéliens de rang 1 sans torsion*

(ii) $H_x \cap G_{r-1} = \{e\}$ et G_{r-1} *est sans torsion.*

Démonstration.-

Nous procédons en deux étapes.

(a) Réduction au cas où sont vérifiées (i) et

(ii)' H_x n'est pas d'indice fini dans H^1 .

Si H est un sous-groupe de G on désigne par $\tilde{H}$ le sous-groupe contenant H défini au lemme I.2.

Soit $x_0 \in M$, $\tilde{H}_{x_0}$ est d'indice fini dans H_{x_0} et il résulte de la proposition I.2. que les G-espaces $M = H_{x_0}\backslash G$ et $\tilde{M} = \tilde{H}_{x_0}\backslash G$ ont même rang et même nature, comme il est clair que $H_{x_0}.G_1$ est d'indice fini dans $\tilde{H}_{x_0}.G_1$, $\tilde{M}$ satisfait (ii)'. Nous pouvons donc supposer que H_{x_0} , et par suite tous les H_x possèdent la propriété (ii) du lemme I.2.

La relation $rg\ G - rg\ H_x = 2$ et le lemme I.1. impliquent $rg\ G - rg\ H^1 \geq 1$, mais par hypothèse $rg\ H^1 - rg\ H_x \geq 1$ et compte-tenu de $rg\ \tilde{H}^1 = rg\ H^1$ il vient :

$$rg\ G - rg\ \tilde{H}^1 = rg\ \tilde{H}^1 - rg\ H_x = 1$$

Puisque $\tilde{H}^1$ contient G_1 il est distingué et le quotient $G/_{\tilde{H}^1}$ est abélien de rang 1 sans torsion. D'autre part, la deuxième égalité et la propriété supposée des H_x montrent, lemme I.1., que H_x contient le sous-groupe dérivé F de $\tilde{H}^1$, par suite H_x

est distingué dans $\tilde{H}^1$ et $\tilde{H}^1/_{H_x}$ est abélien de rang 1 sans torsion.

Passons au quotient par F et posons $\bar{G} = G/_F$, $\bar{M} = M/_F$. Le G-espace M est de même nature et de même rang que le $\bar{G}$-espace $\bar{M}$ (proposition I.1.). Le stabilisateur de $\bar{x} \in \bar{M}$ dans $\bar{G}$ est $\bar{H}_{\bar{x}} = H_{x}/_F$ et il est facile de vérifier que le sous-groupe abélien de $\bar{G}$ $\bar{U} = \tilde{H}^1/_F$ a les propriétés de (i). Enfin, puisque $(\bar{G})_1 = G_1.F_{/F}$ et $\bar{H}^1 = \bar{H}_x.(\bar{G})_1 = G_1.H_{x/_F}$, (ii)' est satisfaite.

(b) Réduction au cas où (i) et (ii) sont vérifiées

Plaçons nous sous les hypothèses (i) et (ii)'.

Soit k_o tel que $H_x \supset G_{k_o}$ et $H_x \not\supset G_{k_o-1}$, d'après (ii)' $k_o \geq 2$. $H_x \cap G_{k_o-1}/G_{k_o}$ est distingué dans $G/_{G_{k_o}}$, donc H_x G_{k_o-1} est distingué dans G , il en résulte qu'il est indépendant de x , notons le F .

Quotientons par F en reprenant les notations de (a). L'espace homogène $\bar{M}$ du groupe nilpotent de classe k_o , $\bar{G}$, est de même nature et même rang que M . Puisque $F \subset H_x$, le sous-groupe $\bar{U} = U/_F$ a les propriétés de (i), de plus $(\bar{G})_{k_o-1} \cap \bar{H}_{\bar{x}} = G_{k_o-1}/_F \cap H_{x}/_F = \{\bar{e}\}$. Finalement, soit $\bar{K}$ le sous-groupe des éléments de torsion de $\bar{U}$, $\bar{U}/_{\bar{H}_{\bar{x}}}$ étant sans torsion $\bar{K} \subset \bar{H}_{\bar{x}}$ et $(\bar{G})_{k_o-1}$ est sans torsion. La preuve du lemme est achevée . ■

Soit G un groupe nilpotent de classe $r > 2$ et M un G-espace possédant les propriétés (i) et (ii) du lemme ci-dessus, appliquons-lui la proposition II.1. avec $V = G_{r-2}$, en supposant que le support de p est un semi-groupe (lemme I.8.).

Il est facile de vérifier que G' est nilpotent de classe 2 et que $G'_1 = \{\bar{e}\} \times G_{r-1}$. Le stabilisateur de $x^o \in M$ dans G' est $H'_{x^o} = \{\bar{e}\} \times H_{x^o} \cap G_{r-2}$, comme $H_{x^o} \cap G_{r-1} = \{e\}$ et que G_{r-1} est sans torsion, d'une part $rg\ G_{r-2} - rg\ H_{x^o} \cap G_{r-2} = 1$ et l'orbite de x^o par G' est un espace homogène de rang 2 de G' , d'autre part H'_{x^o} n'est pas d'indice fini dans

$$H'_{x^o}.G'_1 = (\{\bar{e}\} \times H_{x^o} \cap G_{r-2})(\{\bar{e}\} \times G_{r-1}) = \{\bar{e}\} \times ((H_{x^o} \cap G_{r-2}).G_{r-1}) .$$

Il suffit donc d'établir la proposition pour un groupe nilpotent de classe 2 et un espace homogène possédant les propriétés (i) et (ii). Le lemme suivant et la proposition I.2. achèvent la preuve de la proposition II.3.

Lemme II.6.

Soit G *nilpotent de classe 2 et* M *un* G*-espace de rang 2 satisfaisant (i) et (ii). Choisissons un* $x_o \in M$ *, il existe un* $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ *et un homomorphisme* ϕ *de* G *sur* $N_3(\alpha)$ *tels que :*

$$\phi^{-1}\{(a,b,c) \mp (a,b,c) \in N_3(\alpha) \ , \ a = c = o\} = H_{x_o} \ .$$

Démonstration.-

Sous les hypothèses de l'énoncé, il est facile de voir, en utilisant le lemme I.1., que G_1 est de rang 1. Soit alors $\bar{g}_o$, h_o , k_o des générateurs des groupes abéliens de rang 1 sans torsion $G/_U$, G_1 , U/H_{x_o} , construisons Ψ de G dans $\mathbb{Z}_3$ en posant

$$\Psi(g) = (a,b,c)$$

où $a,b,c,$ sont définis de façon unique par :

$$\bar{g}_o^{\,a} = \bar{g} \ , \ h_o^{\,b} = g\, g_o\, g^{-1}\, g_o^{-1} = [g,g_o] \ , \ k_o^{\,c} = 1(g_o^{-a}\, g) \ ,$$

1 étant l'homomorphisme canonique de U sur U/H_{x_o} .

Calculons $\Psi(gg') = (a",b",c")$ en fonction de $\Psi(g) = (a,b,c)$ et de $\Psi(g') = (a',b',c')$.

Il est clair que $a" = a + a'$; puisque G est nilpotent de classe 2 ,

$$[g\, g',g_o] = [g,g_o] \cdot [g',g_o]$$

et nous avons également $b" = b + b'$. La propriété de distributivité ci-dessus permet encore d'écrire

$$g_o^{-(a+a')}\, g\, g' = g_o^{-a'}(g_o^{-a}\, g)\, g' = \left[g_o^{-a'},g_o^{-a}\, g\right](g_o^{-a}\, g)(g_o^{-a'}\, g') =$$

$$= [g,g_o]^{a'}\ (g_o^{-a}\, g)(g_o^{-a'}\, g') \ ,$$

en posant $1(h_o) = k_o^{\alpha'}$, il vient alors

$$1(g_o^{-(a+a')}\, g\, g') = (1(h_o))^{a'b} \cdot h_o^{c} \cdot h_o^{c'} = k_o^{c+c'+\alpha' a' b}$$

et $$c" = c + c' + \alpha' a' b \ .$$

En conclusion , Ψ est un homomorphisme de G dans $N_3(\alpha')$.

L'image $\Psi(G)$ est un sous-groupe non abélien de $N_3(\alpha')$, il existe donc un $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\Psi(G)$ soit isomorphe par Ψ' à $N_3(\alpha)$ et

$$\Psi' \{(a,b,c) \in \Psi(G)`, a=c=o\} = \{(a,b,c) \in N_3(\alpha) , a=c=o\} .$$

$\Phi = \psi' o \psi$ est un homomorphisme surjectif de G sur $N_3(\alpha)$ tel que

$$\Phi^{-1}\{(a,b,c) : (a,b,c) \in N_3(\alpha) , a=c=o\} = H_{x_o} . \blacksquare$$

Chapitre III :

$N_3(\alpha)$ est le groupe nilpotent de classe 1 obtenu en munissant $\mathbb{Z}_3$ du produit $(a,b,c)\,(a',b',c') = (a+a',\ b+b',\ c+c'+\alpha a'b)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^*$

$\mathbb{Z}_2$ est un espace homogène de $N_3(\alpha)$ pour l'action définie par :

$$(a,b,c)(x,y) = (a+x,\ y+c+\alpha bx) .$$

Le but de ce chapitre est d'établir la transience de $\mathbb{Z}_2$

L'idée générale de la démonstration est la suivante : nous montrons qu'il suffit d'obtenir le résultat lorsque la probabilité p est à support fini inclus dans le sous-ensemble $\mathbb{Z}_2 \times \{o\}$ de $N_3(\alpha)$ et possède certaines symétries, nous prouvons ensuite la transience sous ces hypothèses. Dans un préliminaire, nous commençons par éliminer un cas particulier.

On désigne par A,B,C les sous-groupes abéliens $\{(a,o,o),\ a \in \mathbb{Z}\}$, $\{(o,b,o),\ b \in \mathbb{Z}\}$, $\{(o,o,c),\ c \in \mathbb{Z}\}$, C est le centre de $N_3(\alpha)$ B le stabilisateur de (o,o), et l'on pose $\zeta(a,b,c) = (-a,b,c)$, $\eta(a,b,c) = (a,-b,c)$.

III.1. Préliminaire.-

Nous montrons ici qu'il suffit d'établir la transience de $\mathbb{Z}_2$ sous l'hypothèse : (*) l'intersection de B et du support de p n'est ni vide, ni réduite à un point.

D'après le lemme I.8 ., nous pouvons supposer que le support de p est un semi-groupe, la possibilité de se limiter au cas où (*) est satisfaite résulte alors du

Lemme III.1.-

Si l'intersection de B *et du semi-groupe* S *engendré par le support de* p *contient au plus un point ,* p *est transitoire.*

Démonstration.-

$B \cap S = \emptyset$ ou $\{(o,b_o,o)\}$ et $p^n(B) = 0$ ou $p^n((o,b_o,o))$. Puisque, d'après [1], $\sum\limits_{n \geq o} p^n((o,b_o,o)) < +\infty$, on a dans tous les cas $\sum\limits_{n\geq o} p^n(B) < +\infty$ et (o,o) est transitoire pour p. ∎

III.2. Réduction au cas de certaines probabilités à support fini.-

Le résultat essentiel de ce paragraphe est contenu dans la proposition suivante, dans laquelle $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions f bornées à support fini sur $N_3(\alpha)$ s'écrivant

$$f(a,b,c) = \varphi * \check{\varphi}(a) \cdot \Psi * \check{\Psi}(b) \cdot \vartheta * \check{\vartheta}(c)$$

Proposition III.1.-

Soit p *une probabilité apériodique sur* $N_3(\alpha)$ *satisfaisant* $(*)$, *il existe une probabilité* r *sur* $N_3(\alpha)$ *à support fini inclus dans* $\mathbb{Z}_2 \times \{o\}$, *invariante par les applications* ζ *et* η *dont le support engendre un sous-groupe non abélien de* $N_3(\alpha)$ *et telle que pour tout* $f \in \mathcal{F}$, *tout* $n \geq o$

$$P^n(f) \leq r^n(f) .$$

Différant la preuve de la proposition, nous établissons un corollaire dont découle la réduction annoncée.

Corollaire.-

Sous les conditions de la proposition précédente, il existe $\alpha' \in \mathbb{Z}^*$ *et une probabilité* p' *apériodique sur* $N_3(\alpha')$, *à support fini inclus dans* $\mathbb{Z}_2 \times \{o\}$ *invariante par* ζ *et* η, *telle que si* P *et* P' *sont les matrices des m.a. de lois* p *et* p' *sur* $\mathbb{Z}_2$ *l'on ait pour tout* $n \geq o$

$$P^n((o,o),(o,o)) \leq P'^n((o,o),(o,o)) .$$

Démonstration du Corollaire.-

En appliquant la proposition III.1. à la fonction $f = 1_{\{o\}} \otimes 1_{[-2k,+2k]} \otimes 1_{\{o\}}$

il vient

pour tout $n \geq o$ $\quad p^n(\{o\} \times [-2k,+2k] \times \{o\}) \leq r^n(\{o\} \times [-2k,+2k] \times \{o\})$,

passant à la limite en k , on a donc

$$p^n(B) \leq r^n(B) .$$

Soit maintenant $N_3'(\alpha)$ le sous-groupe non abélien de $N_3(\alpha)$ engendré par le support de r , il existe $\alpha' \in \mathbb{Z}^*$ et un isomorphisme ϕ de $N_3(\alpha)$ sur $N_3(\alpha')$ tel que si $B' = \{(a,b,c) : (a,b,c) \in N_3(\alpha')$, $a = c = o\}$, $\phi(B \cap N_3'(\alpha)) = B'$; désignant alors par p' la probabilité image de r par ϕ , il vient $p^n(B) \leq p'^n(B')$, ce qui achève la preuve.

Démonstration de la proposition III.1.-

Lemme III.2.-

Soit p *une probabilité sur* $N_3(\alpha)$ *non portée par un sous-groupe abélien et satisfaisant à* $(*)$ *, il existe une probabilité* q *sur* $N_3(\alpha)$ *non portée par un sous-groupe abélien possédant la propriété* $(*)$ *relativement à* A *, invariante par l'application* η *, dont le support est inclus dans* $\mathbb{Z} \times K \times \{o\}$ *où* K *est une partie finie de* $\mathbb{Z}$ *et telle que pour tout* $f \in \mathcal{F}$ *et tout* $n \geq o$

$$p^n(f) \leq q^n(f)$$

Démonstration.-

Soit $k > 0$. En désignant par p_{AC} la projection de p sur $A.C$ nous écrivons

$$p(da,db,dc) = \int p_{AC}(da,dc)\ p_{a,c}(db)$$

où $p_{a,c}$ est une probabilité sur $\mathbb{Z}$ (définie pour $p_{A.C}$ presque tout (a,c)) que l'on décompose en

$$p_{a,c} = s_{a,c} \cdot \mu_{a,c} + (1-s_{a,c}) \cdot \nu_{a,c}$$

$\mu_{a,c}$ et $\nu_{a,c}$ sont les probabilités restrictions de $p_{a,c}$ à $[-k,+k]$ et $\complement [-k,+k]$, $s_{a,c}$ réel $o \leq s_{a,c} \leq 1$.

Posons

$$\tilde{p}_{a,c} = \frac{s_{a,c}}{2} \quad \mu_{a,c} * \check{\mu}_{a,c} + \left(1 - \frac{s_{a,c}}{2}\right) \delta_o$$

et

$$\tilde{p}(da,db,dc) = \int p_{AC}\,(da,dc)\; \tilde{p}_{a,c}(db)\ .$$

Soit alors q la probabilité sur $N_3(\alpha)$ projection de $\tilde{p}$ sur $\{(a,b,o) : a,b \in \mathbb{Z}\}$, q est invariante par η , son est contenu dans $\mathbb{Z} \times [-2k,+2k] \times \{0\}$, montrons qu'elle satisfait à l'inégalité de l'énoncé.

Le produit

$(u_n,v_n,w_n) = (a_n,b_n,c_n) \ldots (a_1,b_1,c_1)$

s'explicite en

$u_n = a_1 + \ldots + a_n$

$v_n = b_1 + \ldots + b_n$

$w_n = c_1 + \ldots + c_n + \alpha\, b_2\, a_1 + \ldots + \alpha\, b_n(a_1+\ldots+a_{n-1})$.

Nous avons

$$p^n(f) = \int f(u_n,v_n,w_n) \bigotimes_{i=1}^{n} p(da_i,db_i,dc_i)$$

$$= \int \bigotimes_{i=1}^{n} p_{AC}(da_i,dc_i)\; \varphi * \check{\varphi}(u_n) \int \psi * \check{\psi}(v_n) . \vartheta * \check{\vartheta}(w_n) \bigotimes_{i=1}^{n} p_{a_i,c_i}(db_i)\ .$$

En désignant par α_i l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_2$ défini par

$$i = 0\ ,\quad \alpha_o : b \rightsquigarrow b(1,0)$$

$$i = 1 \ldots n-1\ ,\ \alpha_i : b \rightsquigarrow b(1,\alpha(a_1+\ldots+a_i))$$

et par ϕ la fonction

$$\phi\,(b,c) = \psi * \check{\psi}(b)\ .\ \vartheta * \check{\vartheta}\,(c)\ ,$$

la première intégrale s'écrit

$$\int \phi\,((o,c_1) + \ldots + (o,c_n) + \alpha_o(b_1) + \ldots + \alpha_{n-1}(b_n)) \bigotimes_{i=1}^{n} p_{a_i,c_i}(db_i)\ ,$$

d'après le lemme I.7 elle est majorée par

$$\int \phi\,(\alpha_o(b_1) + \ldots + \alpha_{n-1}(b_n)) \bigotimes_{i=1}^{n} \tilde{p}_{a_i,c_i}(db_i)\ .$$

Par suite,

$$p^n(f) \leqslant \int \bigotimes_{i=1}^{n} \tilde{p}(da_i,db_i,dc_i)\; \varphi * \check{\varphi}\,(a_1+\ldots+a_n)\quad \psi * \check{\psi}(b_1+\ldots+b_n)\ .$$
$$\vartheta * \check{\vartheta}\,(\alpha\; b_2\; a_1 + \ldots + \alpha\; b_n(a_1 + \ldots + a_{n-1}))\ .$$

d'où

$$p^n(f) \leqslant q^n(f)\ .$$

Etablissons maintenant que l'on peut choisir k de telle façon que q ne soit pas portée par un sous-groupe abélien de $N_3(\alpha)$ et possède la propriété (*)

relativement à A .

Commençons par remarquer que $\breve{p}_{a,c}(o) > 0$, p_{AC} presque partout. D'après l'hypothèse (*) $p_{AC}(o,o) > 0$ et $p_{o,o}$ n'est pas portée par un point, il est donc possible de choisir k tel que $\tilde{\breve{p}}_{o,o}$ charge 0 et un autre point de B , par suite q charge (o,o,o) et un autre point de B . D'autre part, puisque p n'est pas portée par un sous-groupe abélien de $N_3(\alpha)$, il existe (a_o,c_o) , $a_o \neq 0$ tel que $p_{AC}(a_o,c_o) > 0$, mais alors $\tilde{\breve{p}}_{a_o,c_o}(0) > 0$ et $q(a_o,o,o) > 0$. En conclusion q charge au moins (o,o,o) et un autre point de A et de B , donc q n'est pas portée par un sous-groupe abélien de $N_3(\alpha)$ et possède la propriété (*) relativement à A . ■

Achevons maintenant la démonstration de la proposition III.1.

L'application qui à (a,b,c) associe (b,a,c) est un isomorphisme de $(N_3(\alpha),.)$ (. désigne le produit habituel) dans $(N_3(\alpha),\Delta)$ où Δ est l'opération

$$(a,b,c)\ \Delta\ (a',b',c') = (a',b',c')\ (a,b,c)\ .$$

Puisque p^n a la même valeur dans les deux structures, le lemme précédent reste valable si l'on échange les rôles de a et de b . A partir de q nous pouvons donc construire une probabilité r qui n'est pas portée par un sous-groupe abélien de $N_3(\alpha)$ invariante par ζ à support fini, telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$, et tout $n \geq o$,

$$p^n(f) \leq r^n(f)$$

r est aussi invariante par η , il suffit pour s'en convaincre de remarquer que dans la désintégration

$$q(da,db,dc) = \int q_{BC}(db,dc)\ q_{b,c}(da)$$

q_{BC} est invariante par l'application qui à (b,c) associe (-b,c) et $q_{b,c} = q_{-b,c}$

III.3. Preuve de la transience dans le cas de certaines probabilités à support fini.-

Proposition III.2.-

Soit p *une probabilité apériodique sur* $N_3(\alpha)$, *à support fini inclus dans* $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ *et invariante par* ζ *et* η *alors la m.a. de loi* p *sur* Z_2 *est trasnitoire.*

III.3.1. Principe de la démonstration.-

Elle repose sur le lemme suivant emprunté à [2] .

Lemme III.3.-

Soit P *une chaine de markov sur* M *, localement compact, et* K *un compact de* M *tel qu'il existe une fonction* f *sur* M *satisfaisant à :*

$$(**) \qquad \begin{cases} o \leq f \leq 1 \ , \ \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1 \ , \ \sup\limits_{z\in K} f(z) = d < 1 \\ P\,f(z) \geq f(z) \qquad \textit{pour} \qquad z \notin K \end{cases}$$

alors si $z \notin K$

$$P_z\left[T < +\infty\right] \leq \frac{1-f(z)}{1-d}$$

où T *désigne le temps d'entrée de la chaine* P *dans* K .

Démonstration du lemme.-

Soit $(Z_n)_n$ la chaine d'opérateur P . Puisque f est sous-harmonique en dehors de K , $(f(Z_{n\wedge T}))_n$ est une sous-martingale, par suite pour $z \notin K$

$$E_z\left[f(Z_{n\wedge T})\right] \geq f(z) \ .$$

Décomposant le domaine d'intégration et utilisant des majorations de f sur K et K^c il vient successivement

$$E_z\left[f(Z_n)\ ;\ T \geq n\right] + E_z\left[f(Z_T)\ ;\ T < n\right] \geq f(z) \ ,$$

$$P_z\left[T \geq n\right] + d\,P_z\left[T < n\right] \geq f(z) \ ,$$

enfin un passage à la limite en n donne l'inégalité de l'énoncé.

Supposons que nous ayons pu construire sur $\mathbb{Z}_2$ une partie finie K contenant (o,o) et une fonction f ayant la propriété $(**)$ relativement à K et à l'opérateur P de la m.a. de loi p sur $\mathbb{Z}_2$, alors (o,o) est transitoire. En effet, dans le cas contraire la classe $\mathcal{C}$ de l'élément récurrent (o,o) est infinie et pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$ $P_{(x,y)}\left[T < +\infty\right] = 1$, tandis que d'après le lemme précédent

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in\mathcal{C}}} P_{(x,y)}\left[T < +\infty\right] = 0 \ .$$

La preuve de la proposition III.2. sera achevée avec :

III.3.2. <u>Construction d'une fonction satisfaisant $(**)$.-</u>

<u>Proposition III.3.-</u>

Soit p *une probabilité satisfaisant aux hypothèses de la proposition III.2. et soit* f *la fonction à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *définie par*

$$f(x,y) = 1 - |(x,y)|^{-\rho}$$

où $|(x,y)| = x^4 + \delta y^2$ *et* δ, ρ *sont des constantes positives.*

Il existe $\delta, \rho > 0$ *et une partie finie* K *contenant* $(0,0)$ *tel que* f^+ *possède la propriété* $(**)$ *relativement à* K *et à* P .

<u>Démonstration.-</u>

L'idée de la démonstration est de prouver que pour un choix convenable de δ et ρ , la partie principale de $Pf(x,y) - f(x,y)$, lorsque (x,y) tend vers l'infini, est positive.

Le lemme suivant résume les propriétés de la fonction f dont nous aurons besoin.

<u>Lemme III.4.-</u>

$$f''_{x^2}(x,y) = 4\rho\ |(x,y)|^{-(\rho+2)} \left[-(4\rho+1)x^6 + 3\ \delta x^2 y^2\right],$$

$$f''_{y^2}(x,y) = 2\rho\ \delta\ |(x,y)|^{-(\rho+2)} \left[x^4 - \delta(2\rho+1)\ y^2\right],$$

$$f^{\text{iv}}_{x^4}(x,y) = 24\ \rho\ |(x,y)|^{-(\rho+1)} + x^2\, o(|x,y)|^{-(\rho+1)}$$

$$f^{\text{iv}}_{x^3 y}(x,y) = x\, o(|x,y)|^{-(\rho+1)}$$

$$f^{\text{iv}}_{x^2y^2}(x,y) = o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

$$f^{\text{iv}}_{x\,y^3}(x,y) = x\ O(|(x,y)|^{-(\rho+2)})$$

$$f^{\text{iv}}_{y^4}(x,y) = O(|(x,y)|^{-(\rho+2)})$$

<u>Lemme III.5.-</u>

Soit $(a,b,0) \in N_3(\alpha)$, on pose $(x',y') = (a,b,0)\,(x,y)$, alors :

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{|(x',y')|}{|(x,y)|} = 1$$

$$f^{iv}_{x^4}(x',y') = 24\rho\ |(x,y)|^{-(\rho+1)} + o(|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + x^2\, o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

$$f^{iv}_{x^3y}(x',y') = x.\ o(|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

$$f^{iv}_{x^2y^2}(x',y') = o\ (|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

$$f^{iv}_{xy^3}(x',y') = x\ O(|(x,y)|^{-(\rho+2)}) + O\ (|(x,y)|^{-(\rho+2)})$$

$$f^{iv}_{y^4}(x',y') = O(|(x,y)|^{-(\rho+2)})$$

Démonstration du lemme III.5.-

Prouvons seulement l'assertion relative à $f^{iv}_{x^4}$.

$$f^{iv}_{x^4}(x',y') = 24\rho\ |(x,y)|^{-(\rho+1)} + 24\rho\left[|(x',y')|^{-(\rho+1)} - |(x,y)|^{-(\rho+1)}\right] + x'^2 o(|(x',y')|^{-(\rho+1)})$$

puisque $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty} \dfrac{|(x',y')|}{|(x,y)|} = 1$.

$$|(x',y')|^{-(\rho+1)} - |(x,y)|^{-(\rho+1)} = o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

et $(|(x',y')|^{-(\rho+1)}) = o(|x,y)|^{-(\rho+1)})$,

par suite

$$f^{iv}_{x^4}(x',y') = 24\rho|(x,y)|^{-(\rho+1)} + o\ (|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + x^2 o(|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + (x'^2 - x^2)\ o\ (|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

mais le dernier terme s'écrit

$$1_{\{o\}}(x).x'^2\ o(|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + 1_{\{o\}^c}(x)(x'^2 - x^2)\ o\ (|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

$$= o\ (|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + x^2\ o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

d'où l'expression de $f^{iv}_{x^4}(x',y')$. ∎

Lemme III.6.-

On peut choisir δ , ρ *de façon que :*

$$\sigma_1^2\ f''_{x^2}(x,y) + \alpha^2\ \sigma_2^2\ x^2\ f''_{y^2}(x,y) \geq d\ x^2\ |(x,y)|^{-(\rho+1)}$$

où $\sigma_1^2 = \int a^2\ p_A(da)$, $\sigma_2^2 = \int b^2\ p_B(db)$ *et* d *est un réel* > 0 .

Démonstration du lemme III.6.-

L'expression ci-dessus s'écrit

$$2\rho\, x^2 . |(x,y)|^{-(\rho+2)} \{\sigma_1^2 [-(8\rho+2)\, x^4 + 6\, \delta y^2] + \delta\, \alpha^2\, \sigma_2^2 [x^4 - \delta(2\rho+1)\, y^2]\}$$

$$= 2\rho\, x^2 . |(x,y)|^{-(\rho+2)} \{[\alpha^2\, \sigma_2^2 \delta - \sigma_1^2(8\rho+2)]\, x^4 + \delta\, [6\, \sigma_1^2 - \alpha^2\, \sigma_2^2\, \delta(2\rho+1)]\, y^2\}$$

et il suffit de prouver que le système

$$\begin{cases} \alpha^2\ \sigma_2^2\ \delta - \sigma_1^2\ (8\rho+2) > 0 \\ 6\ \sigma_1^2 - \alpha^2\ \sigma_2^2\ \delta(2\rho+1) > 0 \\ \delta > 0 \quad , \quad \rho > 0 \end{cases}$$

a une solution .

$(\delta,\rho) = \left(\dfrac{4\ \sigma_1^2}{\alpha^2\ \sigma_2^2}, 0\right)$ est solution des trois premières inéquations, par continuité il existe $\rho_o > 0$ tel que

$$\left(\frac{4\ \sigma_1^2}{\alpha^2\ \sigma_2^2}\ ,\ \rho_o\right)$$

soit solution du système .

Fin de la démonstration de la proposition III.3.-

Ecrivant le développement de Taylor à l'ordre 4 , au voisinage de (x,y) de la fonction $(a,b) \rightsquigarrow f((a,b,o)(x,y))$, en mettant en évidence les termes d'ordre $|(x,y)|^{-(\rho+1)}$, il vient :

$$f((a,b,o)(x,y)) = f(x+a,\ y+\alpha bx)$$

$$= f(x,y) + a f'_x(x,y) + \alpha b\ x\ f'_y(x,y) + \frac{1}{2}\left[a^2 f''_{x^2}(x,y) + 2\alpha\ a\ b\ x\ f''_{xy}(x,y) + \alpha^2 b^2 x^2 f''_{y^2}(x,y)\right]$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[a^3 f'''_{x^3}(x,y) + 3\ \alpha a^2 b x f'''_{x^2y}(x,y) + 3\ \alpha^2 a b^2 x^2 f'''_{xy^2}(x,y) + \alpha^3\ b^3 x^3 f'''_{y^3}(x,y)\right]$$

$$+ \frac{1}{4!}\ 24\rho\ a^4 . |(x,y)|^{-(\rho+1)} + \frac{1}{4!}\ R(a,b,x,y)\ ,$$

avec

$$R(a,b,x,y) = a^4\left[f^{IV}_{x^4}(x_1,y_1) - 24\ |(x_1,y_1)|^{-(\rho+1)}\right] + 4\ \alpha\ a^3\ b\ x f^{IV}_{x^3y}\ (x_1,y_1)$$

$$+ 6\ \alpha^2\ a^2\ b^2\ x^2\ f^{IV}_{x^2y^2}(x_1,y_1) + 4\ \alpha^3\ a\ b^3\ x^3\ f^{IV}_{xy^3}(x_1,y_1) + \alpha^4\ b^4\ x^4\ f^{IV}_{y^4}(x_1,y_1)$$

et $(x_1,y_1) = (x+\vartheta a\ ,\ y+\vartheta\alpha\ bx)\ ,\quad o < \vartheta < 1$.

Intégrons par rapport à p en tenant compte de ses symétries, puis du lemme III.6. , en posant $\tau_1 = \int a^4 \, p_A(da) > 0$, il vient

$$Pf(x,y) = f(x,y)+\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 f''_{x^2}(x,y)+\alpha^2\sigma_2^2 x^2 f''_{y^2}(x,y)\right] + \rho \, \tau_1 |(x,y)|^{-(\rho+1)} + \frac{1}{4!}\int R(a,b,x,y)p(da,db,dc)$$

$$Pf(x,y) \geq f(x,y) + \frac{d}{2}\, x^2 |(x,y)|^{-(\rho+1)} + \rho \, \tau_1 |(x,y)|^{-(\rho+1)} + \frac{1}{4!}\int R(a,b,x,y) \, p \, (da,db,dc) \, .$$

D'après le lemme III.5., puisque p est à support fini,

$$\frac{1}{4!}\int R(a,b,x,y) \, p(da,db,dc) = x^2 \, o(|(x,y)|^{-(\rho+1)}) + o(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$$

d'où

$$Pf(x,y) \geq f(x,y) + |(x.y)|^{-(\rho+1)}\left\{\left[\frac{d}{2} + \varepsilon \, (|(x,y)|^{-(\rho+1)})\right] x^2 + \left[\rho \, \tau_1 + \varepsilon \, (|(x,y)|^{-(\rho+1)})\right]\right\}$$

Si $|(x,y)|$ est choisi suffisamment grand pour que

$\frac{d}{2} + \varepsilon(|(x,y)|^{-(\rho+1)})$ et $\rho \, \tau_1 + \varepsilon \, (|(x,y)|^{-(\rho+1)})$ soient strictement positifs, on a

$Pf(x,y) \geq f(x,y)$. ∎

R E F E R E N C E S

[1] GUIVARC'H Y. et KEANE M. *Transience des marches aléatoires sur les groupes nilpotents*, Astérisque n° 4, 27-36, (1973)

[2.] ROYNETTE B. et SUEUR M. *Marches aléatoires sur un groupe nilpotent*, à paraître à Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie.

[3.] GUIVARC'H Y. et KEANE M. *Transience des marches aléatoires sur les groupes de Lie résolubles et simplement connexes* , à paraître

[4.] AZENCOTT A. *Espaces de Poisson des groupes localement compact*, Lecture Notes in Mathematics, n° 148, p. 97

[5.] MAL'CEV A.I. *On a class of homogeneous spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (1), vol. 9, Lie groups.

[6.] KUROSH A.G. *Theory of groups*, vol. I et II, Chelsea Publishing Company, New-York

[7.] MOSTOW G.D. *On the fundamental group of a homogeneous space*, Annals of Mathematics, vol. 66, n° 2, september 1957.

L'auteur remercie Y. GUIVARC'H qui l'a utilement conseillé dans la préparation de ce travail.

HENNION Hubert
Laboratoire de Probabilités
E.R.A. 250 du C.N.R.S.
Département de Mathématiques et Informatique
B.P. 25 A
35031 RENNES Cedex