MICHEL MÉTIVIER

Sur l'approximation des solutions d'une équation différentielle stochastique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 3
« Séminaire de probabilités », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___3_A1_0>

SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

Par Michel METIVIER

Le présent exposé donne une version Hilbertienne d'un théorème d'approximation montré dans [3] pour le cas d'équations relatives à des processus prenant leur valeur dans $\mathbb{R}^{\alpha}$. La méthode de Kunita reprise ici est directement inspirée d'un travail de Strook-Varadhan [7] . Ce problème, dans le cas de processus réels semble avoir été abordé pour la première fois par Wong et Zakai [8] . Melle Allain [1] a repris le travail de Wong et Zakai dans le cas de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{\alpha}$. Dans ces deux derniers travaux, les hypothèses permettent de conclure à la convergence presque sure des approximations (uniformément par trajectoire), alors que dans le présent exposé, comme dans ceux de Kunita et Strook-Varadhan, les conclusions sont celles d'une convergence en moyenne quadratique.

1. Position du problème. On se place sur une base stochastique $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+},P)$, la suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)$ étant continue à droite, et complète pour P , et on considère un mouvement brownien (B_t) relatif à cette base, à valeurs dans un Hilbert $\mathbb{H}$, de covariance nucléaire C . Ceci signifie que $C \in \mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ avec :

a) (B_t) est une martingale relative à la base $(\mathcal{F}_t)$

b) $B_t \otimes B_t - t.C$ est une martingale relative à la base $\mathcal{F}_t$ à valeurs dans le produit tensoriel $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ projectif (muni de la norme trace).

Il en résulte, comme il est connu, que le Brownien ainsi défini est un Brownien au sens usuel. (cf. Curtain and Falb par exemple [2]).

On considère l'équation différentielle stochastique :

(1.1.) $d\, X_t = \sigma(X_t)\, d\, B_t + b(X_t)\, dt$

où :

$\forall x \in \mathbb{H} \qquad \sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}\, ; \mathbb{H})$

$\qquad\qquad\qquad b(x) \in \mathbb{H}$.

On rappelle qu'une solution de (1.1) est un processus X tel que $\forall t$

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)\, d\, B_s + \int_o^t b(X_s)\, ds \quad .$$

On considère la suite $(\Pi_n)_{n\geq 1}$ de partages dyadiques de $\mathbb{R}^+$; $\Pi_n = \{k/_{2^n} : k \in \mathbb{N}\}$. On notera $t_k^n = k/_{2^n}$ pour abréger.

Soit :

(1.2.) $$\dot{B}_t^{(n)} = \sum_k 2^n \cdot 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}(t)\, (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) \quad .$$

Autrement dit, le processus B^n défini par

(1.3.) $$B_t^n = \int_o^t \dot{B}_s^{(n)}\, ds$$

est le linéarisé par intervalle de B pour le partage Π_n .

On considère les solutions X^n de l'équation différentielle (1.4.) approchée de (1.1.), de condition initiale X_o :

(1.4.) $$\frac{d\, X_t}{dt} = \sigma(X_t)\, \dot{B}_t + b(X_t)\, dt \quad ,$$

c'est-à-dire les processus X^n , vérifiant :

(1.5.) $$X_t^n = X_o + \int_o^t \sigma(X_s^n)\, \dot{B}_s\, ds + \int_o^t b(X_s^n)\, ds$$

à supposer évidemment que (1.5.) admette une solution.

La question est de savoir si les processus X^n convergent en un certain sens vers X .

La réponse est que, moyennant des conditions suffisantes qui seront précisées par la suite, on peut établir une convergence de (X^n) vers la solution d'une équation qui n'est pas (1.1.) mais l'équation (1.7.) ci-dessous que nous allons maintenant définir.

Désignons par $D_x\sigma(x)$ la différentielle de $x \rightsquigarrow \sigma(x)$, en x. C'est une application linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}\,;\,\mathbb{H})$. Pour tout couple (h_1,h_2) de vecteurs de $\mathbb{H}$, $(D_x\sigma(x).(\sigma(x).h_1)).h_2$ est un vecteur de $\mathbb{H}$.

Définition 1. On notera $D_x\sigma.\sigma(x)$ l'application bilinéaire de $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$ dans $\mathbb{H}$, définie par

$$(D_x\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))(h_1,h_2) = (D_x\sigma(x)\ .\ (\sigma(x)h_1))\ h_2 \quad .$$

Comme toujours on désignera de la même façon l'application linéaire correspondante de $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.

Avec cette définition, l'expression suivante a un sens :

$$(D_x\ \sigma.\sigma)\ .\ C \quad .$$

Dans le cas particulier où H est de dimension finie d, il est immédiat de vérifier que l'application bilinéaire $D_x\sigma.\sigma(x)$ est représentée par le "tenseur"

$$(D_x\ \alpha\sigma\ (\mathbf{x}))^{ijk} = \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial\ \sigma^{ij}}{\partial\ x^r}(x)\quad \sigma^{rk}(x)$$

et que

$$(D_x\ \alpha\sigma\ (x)).C = \sum_{r,j,k} \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^r}\ (x)\quad \sigma^{rk}(x)\ C^{kj}$$

Soit alors

$$\tilde{b}(x) = b(x) + 1/2(D_x\sigma.\sigma\ (x))\ C \tag{1.6.}$$

L'équation (1.7.) annoncée est :

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)\ d\ B_s + \int_o^t \tilde{b}(X_s)\ ds\ . \tag{1.7.}$$

2. Enoncé du Résultat.

2.1. Notations. On notera donc $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ le produit tensoriel projectif des espaces de Hilbert $\mathbb{H}$, et $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt (i.e. le complété de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ pour la norme préhilbertienne associée au produit scalaire $(x \otimes y \mid x' \otimes y') = (x \mid x').(y \mid y')$, $(x \mid y)$ désignant le produit scalaire de x et y dans $\mathbb{H}$). Rappelons que toute application bilinéaire β de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ s'identifie avec sa norme, à un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H} \, ; \mathbb{G})$.

On notera $\| \quad \|_{H.S.}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ et $\| \quad \|_{H.S.}$ également la norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} \, ; G)$.

On notera $\| \cdot \|_{Tr}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ (norme "trace").

2.2. Hypothèses générales. Nous supposerons toujours que :

A) σ est bornée et différentiable comme application à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{H})$ de différentielle $D_x\sigma$ continue et bornée. On suppose en outre que $D_x\sigma.\sigma(x)$ (cf. définition 1) est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} \, ; \mathbb{H})$ et que $\sup\limits_{x \in \mathbb{H}} \|D_x\sigma.\sigma(x)\|_{H.S} < +\infty$.

B) b est borné différentiable comme application à valeurs dans $\mathbb{H}$, de différentielle $D_x b$ continue et bornée.

On sait que, sous ces hypothèses, les équations (1.1.), (1.5.) et (1.7.) ont une solution unique (forte) pour une condition initiale x_o donnée.

2.3. Théorème. Il existe une suite croissante de temps d'arrêt (τ_p) , $\tau_n \uparrow +\infty$ telle que pour tout p et tout T

(2.2.1.) $$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \leq T} E\|X^n_{t\wedge\tau_p} - X_{t\wedge\tau_p}\|^2 = 0 \ .$$

De façon plus précise, soit τ_p la famille de temps d'arrêt définie par :

$$\tau_p = \inf \{t : ||B_t|| \geq p\}$$

et soit $B_t^p = B_{t \wedge \tau_p}$ le Brownien arrêté à p.

Les solutions $X^{p,n}$ de l'équation

$$X_t^{p,n} = x_o + \int_o^t \sigma(X_s^{p,n}) \dot{B}_s ds + \int_o^{t \wedge \tau} b(X_s^{p,n}) ds$$

et la solution X^p de

$$X_t^p = x_o + \int_o^t \sigma(X_s^p) d B_s^p + \int_o^{t \wedge \tau} \tilde{b}(X_s^p) ds$$

vérifient

(2.2.2.) $$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \leq T} E ||X_t^{p,n} - X_t^p||^2 = 0$$

2.4. Théorème. Il est possible d'extraire de la suite (X^n) de processus une suite (X^{n_k}) telle que pour tout T

ps. $$\lim_k \sup_{t \leq T} ||X_t^{n_k} - X_t|| = 0 .$$

3. Preuve des théorèmes. Remarquons que de la formule (2.2.2.) du théorème (2.3.) et un argument standard utilisant Borel-Cantelli, on déduit immédiatement le théorème 2.4.

Nous allons donc prouver par étape la relation (2.2.2.)

3.1. Rappel de lemmes sur la variation quadratique d'une martingale hilbertienne.

Lemme 1. Soit M une martingale bornée, continue, à valeurs dans H. Considérons les suites de variables aléatoires

$$U(n,t) = \sum_{\substack{t_k \in \Pi_n \\ t_k \leq t}} ||M_{t_{k+1}} - M_{t_k}||^2_{\mathbb{H}}$$

$$V(n,t) = \sum_{\substack{t_k \in \Pi_n \\ t_k \leq t}} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) \otimes (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$$

Soient M et M les processus naturels de M^{2} et M M respectivement (cf. 4).

On a alors, pour tout $T < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} E|U(n,t) - \langle\langle M\rangle\rangle_t|^2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} E||V(n,t) - \langle M\rangle_t||^2_{H.S} = 0$$

<u>Démonstration</u>. (suivant une méthode due à Millar dans le cas réel([6])

On a l'égalité très simple :

$$(3.1.1.)\quad M_t\otimes M_t - M_o\otimes M_o = V(n,t) - \int_o^t \Phi^n(u)\otimes d\,M_u - \int_o^t dM_u\otimes\Phi^n(u)$$

en notant $\Phi^n(u) = \sum_k 1_{]t_k,t_{k+1}]}(u) \,.\, M_{t_k}$

et en considérant un élément h de $\mathbb{H}$ comme un opérateur linéaire $g \rightsquigarrow h\otimes g$ (resp. $g \rightsquigarrow g\otimes h$) dans la première intégrale stochastique (resp. la deuxième intégrale stochastique) de (3.1.1.).

En considérant la forme bilinéaire $(h|g)$ à la place de l'application bilinéaire $h\otimes g$ on obtient de même

$$||M_t||^2 - ||M_o||^2 = U(n,t) - 2\int_o^t (\Phi^n(u) \mid d\,M_u) \,.$$

La convergence de Φ^n vers M simplement en étant borné, implique la convergence de Φ^n vers M dans $L^2_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+\times\Omega,\mathcal{P},\langle\langle m\rangle\rangle)$, et donc la convergence de $\int_o^t \Phi^n_u\otimes d\,M_u$ vers $\int_o^t M_u\otimes d\,M_u$ dans $L^2_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_2\mathbb{H}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ et la convergence de $\int_o^t(\Phi^n_u|d\,M_u)$ vers $\int_o^t(M_u \mid d\,M_u)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Il existe donc un processus réel positif, évidemment croissant S_t et un processus A_t à valeurs dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_2\mathbb{H}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} E\mid U(n,t) - S_t|^2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} E\,||V(n,t) - A_t||^2_{H.S.} = 0$$

avec en outre

$$(3.1.2.)\quad S_t = ||M_t||^2 - ||M_o||^2 + 2\int_o^t(M_u|dM_u)$$

$$(3.1.3.)\quad A_t = M_t\otimes M_t - M_o\otimes M_o + \int_o^t M_u\otimes d\,M_u + \int_o^t d\,M_u\otimes M_u \,.$$

La formule (3.1.2) prouve immédiatement que S_t est continu tel que $||M_t||^2-S_t$ soit une martingale. Donc $S_t = \langle\langle M_t \rangle\rangle$. Rappelons que le processus naturel V d'une quasi-martingale X de classe D à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$, dual séparable d'un espace de Banach $\mathbb{F}$, est caractérisé comme l'unique processus V continu à droite à valeurs dans $\mathcal{B}$, tel que pour tout $y \in \mathbb{F}$ $t \rightsquigarrow \langle V_t, y\rangle$ soit à variation bornée, et vérifiant

(3.1.4) $\forall t \quad \forall F \in \mathcal{F}_t \quad E(1_F . V_t) = \int_{]0,t]\times E} E(1_F | \mathcal{F}_{u-})\, d\lambda$

où λ est la mesure définie sur la tribu des prévisibles par $\forall s \leq t$, $F \in \mathcal{F}_s$

$$\lambda(]s,t] \times F) = E\{1_F . (X_t - X_s)\} \in \mathbb{B} .$$

Nous considérons ici $X_t = M_t \otimes M_t \in \mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H} \subset \mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$.

Nous allons montrer que A est le processus naturel de X_t , considéré comme prenant ses valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. Comme λ prend ses valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ la formule (3.1.4) montre qu'en fait $\langle M\rangle_t = A_t$ p.s, et comme $t \rightsquigarrow A_t(\omega)$ et $t \rightsquigarrow \langle M_t\rangle(\omega)$ sont tous deux continus à droite en tant qu'applications à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$, les processus A et $\langle M\rangle$ sont indistingables.

Pour montrer que (3.1.4) est vérifié pour un processus V donné, il suffit évidemment de montrer que pour un ensemble total $\mathbb{F}_o \subset \mathbb{F}$ on a

(3.1.5) $\qquad \forall y \in \mathbb{F}_o \quad \forall t , \quad \forall F \in \mathcal{F}_t$

$$E(1_F . \langle V_t, y\rangle) = \int_{]0,t]\times F} E(1_F | \mathcal{F}_{u-})\, d\langle \lambda, y\rangle .$$

Notons que A_t est un élément symétrique de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. Nous avons donc à montrer que $\forall h \in \mathbb{H}$, $t \in \mathbb{R}^+$ et $F \in \mathcal{F}_t$

(3.1.6) $E(1_F.\langle A_t,h\otimes h\rangle) = \int_{]o,t]\times F} E(1_F|\mathcal{F}_u^-)\ d\langle\lambda\ ,h\otimes h\rangle$.

Mais d'une part $\langle\lambda,h\otimes h\rangle$ est la mesure sur la tribu des previsibles engendrée par le processus $\langle M,h\rangle$ et d'autre part

$\langle A_t,h\otimes h\rangle = \langle M_t,h\rangle^2 - \langle M_o,h\rangle^2 + 2\int_o^t \langle M_u,h\rangle\ d\ \langle M_u,h\rangle$.

Comme cette dernière formule exprime que le processus continu $\langle A,h\otimes h\rangle$ est le processus croissant naturel de la sous martingale $|\langle M_t,h\rangle|^2$, la formule (3.1.6) en résulte.∎

Lemme 2. On suppose que M est une martingale bornée, continue, à valeurs dans H . Soit Φ un processus continu, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}\ \hat{\otimes}_2\ \mathbb{H}\ ;\ \mathbb{G})$, de norme uniformément bornée par K .

$$\Phi^n(u,\omega) = \sum_{t_k\in\eta_n} 1_{]t_k,t_{k+1}]}(u)\ \Phi\ (t_k,\omega) \quad .$$

Alors, pour tout T

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\leq T} E\Big|\Big|\sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_{k+1}\leq t}} \Phi(t_k,\cdot).(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})-\int_o^t \Phi_n\ d\langle M_u\rangle\Big|\Big|^2 = 0$$

Démonstration. Posons

(3.1.7) $$W(n,t)=\sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_{k+1}\leq t}} \Phi_{t_k}\cdot(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})-\int_o^t \Phi_u\ d\langle M_u\rangle$$

on a, avec les notations du lemme précédent,

(3.1.8)

$$W(n,t)=\int_o^t(\Phi^n(u)-\Phi(u))d\langle M_u\rangle+\sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_k\ \ t}} \Phi_{t_k}\Big[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})^{\otimes 2}-\langle M_{t_{k+1}}\rangle+\langle M_{t_k}\rangle\Big] \quad .$$

En posant $A_k=\Phi_{t_k}\cdot\Big[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})-\langle M_{t_{k+1}}\rangle+\langle M_{t_k}\rangle\Big]$

grâce à la propriété de martingale de M et de $M\otimes M-\langle M\rangle$:

on voit immédiatement que, si on pose

$$\alpha_t = \sum_{\{k:t_{k_n} \leqslant t\}} A_k$$

le processus $(\alpha_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une martingale. Par suite, d'après une inégalité de Doob (cf. [5] remarque 2 chap. VI)

$$E \sup_{t \leqslant T} ||\alpha_t||^2 \leqslant E \sup_{\{k:t_k \leqslant T\}} (||\alpha_{t_k}||^2) \leqslant 2\, E||\alpha_T||^2$$

Comme $E(\Lambda_k . A_\ell)=0$, pour $k \neq l$ on a donc

(3.1.9) $$E \sup_{t \leqslant T} ||\alpha_t||^2 \leqslant 2\, E \sum_{\{k:t_{k_n} \leqslant T\}} ||A_k||^2 .$$

En utilisant à nouveau la propriété de Martingale

(3.1.10)

$$E||\sum_{t_{k_n} \leqslant T} A_k||^2 \leqslant K^2 ||\sum_{t_{k_n} \leqslant T} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^{\otimes 2} - \langle M_{t_{k+1}} \rangle + \langle M_{t_k} \rangle||^2_{H.S} .$$

Par ailleurs, pour chaque trajectoire ω, $\langle M_u \rangle$ définit une mesure à variation finie $d|\langle M_u \rangle|$ (majorée par la mesure définie par $\langle\langle M \rangle\rangle$)

$$E \sup_{t \leqslant T} ||\int_0^t (\Phi^n(u) - \Phi(u)) d\langle M_u \rangle||^2_{H.S} \leqslant E\left[\int_0^T ||\Phi^n(u) - \Phi(u)||_{H.S}\, d|\langle M_u \rangle|\right]^2$$

$$\leqslant E\left[\langle\langle M \rangle\rangle . \sup_{u \leqslant T} ||\Phi^n(u) - \Phi(u)||_{H.S}\right]^2$$

Comme les fonctions $\Phi^n - \Phi$ convergent sur toute trajectoire uniformément vers zéro, les processus $||\Phi^n - \Phi||_{H.S}$ étant par ailleurs borné, on a bien

(3.1.11)

$$\lim_{n \to o} E \sup_{t \leqslant T} ||\int_0^t (\Phi^n(u) - \Phi(u))\, d\langle M_u \rangle||^2_{H.S} = 0 .$$

Le lemme 1, avec les inégalités (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11) implique donc maintenant le lemme 2.∎

3.2. Expression approchée de X^n

On écrira B_t au lieu de B_t^p pour simplifier dans toute la suite.

1ère Formule : En intégrant deux fois par partie, pour une fonction trois fois différentiable f sur $\mathbb{R}$:

$$f(t_{k+1})-f(t_k)=(t_{k+1}-t_k)f'(t_k)+\frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)^2 f''(t_k)+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-u)^2 f'''(u)\,du$$

2ème Formule : On applique cette formule à Y^n trajectoire par trajectoire où $Y_t^n = \int_o^t A_u^n \, du$ avec :

$A_u^n = \sigma(X_u^n) \circ \dot{B}_u^n$ processus à valeurs dans $\mathbb{H}$.

On obtient ainsi

$$(3.2.1.) \quad X^n(t) = \sum_{k:t_{k+1}^n \leq t} (t_{k+1}^n - t_k^n) A_{t_k}^n + \frac{1}{2} \sum_{k:t_{k+1}^n \leq t} (t_{k+1}-t_k)^2 \dot{A}_{t_k}^n$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-u)^2 \ddot{A}_u^n \, du + Y^n(t) - Y^n_{[2^n t]2^{-n}} + \int_o^t b(X_s^n) ds$$

A partir de maintenant pour les évaluations intermédiaires on ne répétera plus n : on écrira $Y_t = \int_o^t A_u du$

$$A_u = \sigma(X_u)\, \dot{B}_u$$

3.3. Formule de Dérivation et majoration.

$$(3.3.1.) \quad \dot{X}_u = A_u + b(X_u)$$

(3.3.2.) $A_u = \sigma(X_u).\dot{B}_u$ $\quad \dot{B}_u$ étant constant dans chaque intervalle $]t_k, t_{k+1}]$.

$$(3.3.3.) \quad \dot{A}_u = \left[D_x \sigma(X_u) \, . \, [A_u + b(X_u)]\right] \, . \, \dot{B}_u$$

Commentaire : $D_x \, \sigma(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \, ; \mathcal{L}(\mathbb{H} \, ; \, \mathbb{H}))$

$D_x \, \sigma(y) \, . \, h \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \, ; \, \mathbb{H})$

$[D_x \, \sigma(y) \, . \, h] \, . \, h \in \mathbb{H}$

(3.3.4.)

$$\ddot{A}_u=\left[D^2_{x^2}\sigma(X_u).[A_u+b(X_u)]^{\otimes 2}\right].\dot{B}_u+D_x\sigma(X_u).\left[\dot{A}_u+D_x b(X_u).\dot{X}_u\right].B_u$$

Utilisant la formule de définition (1.2.), et la définition 1 .

(3.3.5.) $$\dot{A}_u=2^{2^n}\left[D_x\sigma.\sigma(X_u)\right].(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 2}+2^n\left[D_x\sigma(X_u).b(X_u)\right].(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$$

pour $t_k < u \leqslant t_{k+1}$.

On voit de même qu'en explicitant A_u et $\dot{A}_u$, la formule (3.3.4.) s'écrit, pour $t_k < u \leqslant t_{k+1}$

(3.3.6.)

$$\ddot{A}_u=2^{3^n}\Psi_1(X_u).(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 3}+2^{2^n}\Psi_2(X_u)(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 2}+2^n\Psi_3(X_u)=(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$$

où Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 sont des applications continues bornées de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 3};\mathbb{H})$, $\mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 2};\mathbb{H})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$ respectivement.

On déduit évidemment des formules qui précèdent l'existence d'une constante K , telle que

$$\forall u \in \left]t_k,t_{k+1}\right]$$

(3.3.7.) $$||A_u|| \leqslant K.2^n\ ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||$$

(3.3.8.) $$||\ddot{A}_u|| \leqslant K\left[2^{3^n}\ ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^3+2^{2^n}||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^2 + 2^n||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||\right]$$

3.4. <u>Evaluation des différents termes de la formule (3.2.1.)</u>

<u>1er terme</u> : On notera dans tout ce qui suit $[u^n]=\sup\{t^n_k : t^n_k<u\}$.

On obtient ainsi :

(3.4.1.) $$\sum_{t^n_{k+1}\leqslant t}(t^n_{k+1}-t^n_k)A^n_{t^n_k}=\sum_k\sigma(X^n_{[u]})(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k})$$

$$=\int_0^t\sigma(X^n_{[u^n]})\,d\,B_u-\int_{[t^n]}^t\sigma(X^n_{[u^n]})\,dB_u$$

2ème terme :

(3.4.2.) $$\frac{1}{2}\sum_{t^n_{k+1}\leq t}(t^n_{k+1}-t^n_k)^2\,\dot{A}^n_{t_k}=\frac{1}{2}\sum_{t^n_{k+1}\leq t}D_x\sigma\cdot\sigma(X^n_{t^n_k}).(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k})^{\otimes 2}$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{[t^n]}D_x\sigma\,(X^n_u).b(X^n_{[u]})dB_u$$

3ème terme :

Le 3ème terme, en vertu de (3.3. 8.) se laisse majorer par

(3.4.3.) $$I(n,t)=K\left[\sup_k\|B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}\|+\frac{1}{2^n}\right]\left(\sum_k\|B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}\|^2+\frac{1}{2^n}\right)$$

3.5. Majoration finale pour $X_t - X^n_t$, X_t vérifiant (1.7)

(3.5.1.) $$X_t-X^n_t=\int_0^t\left[\sigma(X_u)-\sigma(X^n_{[u]})\right]d\,B_u+\int_0^t(b(X_u)-b(X^n_u))\,du$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^t D_x\sigma.\,\sigma(X_u).C\,du-\sum_{[k:t^n_{k+1}\leq t]}D_x\sigma\cdot\sigma(X^n_{t^n_k})(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k})^{\otimes 2}\right.$$

$$+\varepsilon(n,t)$$

où, compte tenu de (3.2.1.) et des formules (3.4.1.) à (3.4.3.) le terme $\varepsilon(n,t)$ donne lieu à la majoration.

(3.5.2.) $$\|\varepsilon(n,t)\|\leq \text{constante}\times\left[\sup_{[t]<s<t}\|B_t-B_s\|\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^n}\left\|\int_0^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\,B_u\right\|\right]+I(n,t)$$

Remarquons également que

$$\sup_{t\leq T}I(n,t)\leq K\left[\sup_{\substack{|t-s|\leq 2^{-n}\\ t,s\leq T}}\|B_t-B_s\|+\frac{1}{2^n}\right]\left(\sum_{\{k:t^n_{k+1}\leq T\}}\|B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}\|^2+\frac{1}{2^n}\right)$$

Comme $U_n=\sum_{\{k:t^n_{k+1}\leq T\}}\|B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}\|^2$ converge dans L^2 (lemme 1), la

décroissance vers zéro, de la suite uniformément bornée de variable $\eta_n = \sup\limits_{\substack{|t-s|\leqslant 2^{-n}\\ t,s\leqslant T}} ||B_t-B_s|| + \frac{1}{2^n}$, implique la convergence de $\eta_n \cdot U_n$ vers zéro dans L^2 (remarquer que $|U_n|^2$ est uniformément intégrable, qu'il en est de même de $\eta_n^2 \cdot U_n^2$ et que $\eta_n^2 \cdot U_n^2$ converge en outre en probabilité vers zéro).

Notons que (inégalité de Doob appliquée aux $T.2^n$ sous-martingale $(||B_t-B_{t_k}||^4)_{t\in]t_k,t_{k+1}]}$) ,

(3.5.3.) $$E \sup_{\substack{t_k<t\leqslant T\\ t-t_k\leqslant \frac{1}{2^n}}} (||B_t-B_{t_k}||^2) \leqslant \text{constante}.2^n\, E||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^4$$
$$\leqslant \text{constante}.\frac{1}{2^n}$$

et, en utilisant une inégalité de Doob (cf. [5] chap. VI, remarque 2),

$$E \sup_{t\leqslant T}||\int_0^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\, B_u||^2 \leqslant 4E||\int_0^T D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\, B_u||^2 =$$
$$\leqslant \text{constante}.E \int_0^T||\Psi||^2 d\,\langle B_u\rangle$$

où $\Psi=D_x\sigma.b\,(X^n_{[u]})$. Donc

$$E \sup_{t\leqslant T} ||\int_0^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]}).d\, B_u||^2 \leqslant \text{constante}.(E\,||B_T||^2) \quad .$$

La formule (3.2.1.) implique donc :

(3.5.4.) $$\lim_{n\to\infty} E(\sup_{t\leqslant T} ||\varepsilon(n,t)||^2) = 0$$

Notons également que si $[s] = t_k$

$$X^n_s - X^n_{[s]} = 2^n \int_{[s]}^s \sigma(X^n_u)(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})du + \int_{[s]}^s b(X^n_u)\, du$$

d'où $$||X^n_s-X^n_{[s]}||^2 \leqslant 2.2^{2^n}\, ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^2 \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}||\sigma(X^n_u)||du\right|^2$$
$$+ 2||\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X^n_u\, ds)||^2$$

Et

$$E \sup_{s\leqslant T} ||X^n_s-X^n_{[s]}||^2 \leqslant 2K^2E\left[\sup ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^2 + \frac{1}{2^{2^n}}\right] \leqslant \text{constante}.\ \frac{1}{2^n}$$

Un raisonnement déjà fait précédemment, appliqué à la martingale $\int_0^t (\sigma(X^n_s)-\sigma(X^n_{[s]}))\, d\, B_s$, et le caractère lipschitzien de σ impliquent

(3.5.5.) $E \sup\limits_{t\leqslant T} ||\int_o^t (\sigma(X_s^n)-\sigma(X_{[s]}^n))\, d\, B_s||^2 \leqslant (\int_o^T K^2 . E||X_s^n - X_{[s]}^n||^2\, ds)^2$

On voit que, compte tenu du lemme 2 , de (3.5.4.) et (3.5.5.)

on peut déduire de (3.5.1.), et du caractère lipschitzien de σ

et b

$$E\, (\sup_{t\leqslant T} ||X_t - X_t^n||^2) \leqslant 4\, K^2 \int_o^T E||X_s - X_s^n||^2\, ds + \varepsilon'(n)$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon'(n) = 0$.

Le lemme classique de "Cronwal" permet de conclure

$$E(\sup_{t\leqslant T} ||X_t - X_t^n||^2) \leqslant \varepsilon'_n \;\exp 4\, K^2 . T$$

D'où finalement le théorème.

REFERENCES

1. M-F Allain. Sur quelques types d'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques. Thèse 3ème cycle Rennes, Juin 1974.

2. R-F Curtain and P-L Falb. Stochastic Differential equations in Hilbert spaces. Journal of differential equations, 10, (1971), 412-430.

3. H Kunita. Stochastic Integrals band on martingales taking values in Hilbert spaces. Nogoya Math. J., vol. 38, (1970), 41-52.

4. M Métivier. Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif. Theory of Probability and Appl. vol. (1974),

5. A Meyer. Probabilités et Potentiels. Hermann, (1966).

6. P-W Millar. Martingale Integrals. Trans. Am. Math. Soc., vol. 133, (1968), 145-166.

7. J Stroock-Varadhan. On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle. 6th Berkeley Symposium, vol. 3.

8. E Wong et M Zakaï. On the relation between ordinary and stochastic differential equations. International Journal of Engeneering sciences, vol. 3, (1965), 213-229.