M. S. BAOUENDI

J. SJOSTRAND

Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n^{o} 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___1_A4_0>

REGULARITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES SINGULIERS EN UN POINT

par

M.S. BAOUENDI - J. SJOSTRAND

On considère un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :

(1) $$P(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$$

où a_α est un <u>polynôme</u> de n variables <u>homogène de degré</u> $|\alpha|$. On suppose que P est <u>elliptique en dehors de 0 dans $\mathbb{R}^n$</u>.

Le cas particulier suivant :

$$L_{\lambda,\mu} = r^2\, \Delta + \mu\, r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ rentre dans ce cadre. Il a été démontré dans [1] que, pour tous $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $L_{\lambda,\mu}$ n'est pas hypoelliptique dans $\mathbb{R}^n$, mais que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, si $u \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ et $L_{\lambda,\mu} u$ est analytique dans Ω, u est aussi analytique dans Ω.

On se propose de généraliser ces résultats pour des opérateurs de la forme (1).

On désigne par S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On a un difféomorphisme naturel

$$S_{n-1} \times \mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}^n - \{o\}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il en résulte le difféomorphisme

(2) $$T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R} \simeq T^*(\mathbb{R}^n)\big|_{S_{n-1}} .$$

Soit $p_o(x,\xi)$ le symbole principal de P défini sur $T^*(\mathbb{R}^n)$, et pour $((\theta,\eta),\zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R}$, soit $q_o(\theta,\eta,\zeta)$ la composition de p_o avec le difféomorphisme (2). La fonction $q_o(\Theta,\eta,\zeta)$ est un polynôme homogène de degré m en les variables (η,ζ).

On note

$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > o,\ \exists (\Theta,\eta) \in T^* S_{n-1} \setminus o,\ q_o(\Theta,\eta,-iz) = o\}$.

L'ellipticité de P en dehors de l'origine entraîne que Γ_+ est un cône fermé dans $\mathbb{C} - \{o\}$ ne rencontrant pas l'axe imaginaire.

On introduit l'hypothèse suivante :

Il existe des nombres Θ_o , Θ_1 ,..., Θ_ℓ satisfaisant

$$(H)\qquad \begin{cases} -\frac{\Pi}{2} < \Theta_o < \Theta_1 < \dots < \Theta_\ell < \frac{\Pi}{2}, \\ \Theta_{j+1} - \Theta_j < \frac{\Pi}{n-1} \quad \text{pour } j=o,\dots,\ell-1, \\ \Gamma_+ \subset \bigcup_{j=o}^{\ell-1} \{z \in \mathbb{C} \mid \Theta_j < \arg z < \Theta_{j+1}\} \end{cases}$$

On a alors :

<u>Théorème 1.</u>

On suppose (H) *vérifiée ; soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *telle que* Pu *soit analytique dans* Ω, *alors* u *est aussi analytique dans* Ω.

<u>Théorème 2.</u>

Sous l'hypothèse (H), P *n'est pas hypoelliptique ; plus précisément, il existe* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $Pu = o$.

<u>Exemples</u> :

1°) Pour n=2, l'hypothèse (H) est toujours satisfaite.

2°) On suppose que m est pair et que l'on a la factorisation

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha = q(x)\, (A(D))^{\frac{m}{2}}$$

où A(D) est un opérateur elliptique homogène d'ordre 2 à coefficients constants, à symbole réel. Après un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer

$A(D) = \Delta$, dans le cas $\Gamma_+ = \mathbb{R}_+$ et donc (H) est satisfaite.

Remarque :

La condition (H) n'est évidemment pas invariante sous des changements de coordonnées linéaires. Il existe des opérateurs P de la forme (1), elliptiques en dehors de O dans $\mathbb{R}^n$ pour lesquels la condition (H) n'est pas satisfaite, même après un changement linéaire des variables. On ignore si de tels opérateurs satisfont ou non les conclusions des théorèmes 1 et 2 ci-dessus.

Indications sur la démonstration du théorème 1.

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\overline{B})$ où $\overline{B}$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$; on écrit le développement de Taylor de f à l'origine, en utilisant les coordonnées polaires, sous la forme :

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k(\Theta) \tag{3}$$

($\Theta \in S_{n-1}$, $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $f_k \in V_k$ = espace des restrictions à S_{n-1} des polynômes homogènes de degré k).

La transformée de Mellin de f est donnée par :

$$\tilde{f}(z,\Theta) = \int_0^1 f(r\Theta)\, r^{-z-1}\, dr. \tag{4}$$

C'est une fonction méromorphe en z à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(S_{n-1})$. Les seuls pôles sont les points de $\mathbb{N}$; ils sont simples ; le résidu en k vaut $f_k(\Theta)$. On a aussi :

$$\tilde{f}(z,\Theta) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f_k(\Theta)}{z-k} + g_N(z,\Theta) .$$

où

$$\| g_N(z,\Theta) \|_{L^2(S_{n-1})}$$

est uniformément bornée dans $\{\mathrm{Re}\, z \leq N + \frac{1}{2}\}$.

Enfin, l'analyticité de f implique l'existence de M tels que :

$$\| f_k(\Theta) \|_{L^2(S_{n-1})} \leq M^{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

et (5) implique que la série de Taylor de f converge vers une fonction analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

On montre d'abord :

Lemme 1.

Sous l'hypothèse (H), si $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B})$, u *plate à l'origine et* $Pu = o$, *alors* $u = o$.

Pour cela, on prend la transformée de Mellin de Pu et on obtient :

(6) $(A_m(\theta,D_\theta) + A_{m-1}(\theta,D_\theta)z + \ldots + A_o(\theta)\, z^m)\, \tilde{u}(z,\theta) = C_o(\theta) + \ldots + C_{m-1}(\theta)\, z^{m-1}$,

où $A_j(\theta,D_\theta)$ est un opérateur différentiel d'ordre j sur S_{n-1} à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et $C_j \in \mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$, en outre $A_o(\theta) \neq 0$.

On réduit alors (6) à une équation vectorielle du premier ordre de la forme

(7) $$(z-\mathcal{A}(\theta,D_\theta))\quad U(z,\theta) = \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta)\, z^j$$

où $\mathcal{A}(\theta,D_\theta)$ est une matrice pseudo-différentielle elliptique d'ordre 1 sur S_{n-1} , $\tilde{u}(z,\theta)$ étant la première composante du vecteur $U(z,\theta)$.

Comme u est plate à l'origine, il s'en suit que $U(z,\theta)$ est entière en z ; on va montrer que U est un polynôme en z ce qui implique $u = 0$. Pour cela, il suffit de montrer une inégalité de la forme

(8) $$\|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C\ (1+|z|)^N$$

où C et N sont indépendants de θ.

Mais on a :

(9) $$\sup_{\mathrm{Re}\ z \leq k} \|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C_k < \infty \qquad \forall\ k \in \mathbb{R}.$$

D'après [3] on a :

(10) $$\|(z-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{sur } \gamma_j = \{r\, e^{i\theta_j} \mid r > o\} \text{ et } |z| \text{ assez grand.}$$

En utilisant des résultats de [2] et [4] on a :

(11) $$\|(z-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq e^{|z|^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{avec } \rho = n-1 \quad \text{et } \varepsilon > o$$

sur une suite de cercles centrés à l'origine de rayons tendant vers l'infini.

L'utilisation de (9), (10), (11) et du théorème de Phragmén-Lindelöf donne alors aisément (8), ce qui termine la démonstration du lemme 1.

Lemme 2.

Soit u $\in \mathcal{C}^\infty(\bar{B})$ *et* Pu = v *où* v *est analytique, alors le développement de Taylor à l'origine de* u *est une série convergente.*

Ici aussi, on prend la transformée de Mellin de l'équation Pu = v. Une réduction analogue à celle de la démonstration du lemme précédent donne :

(12) $$(z-\mathcal{A}(\theta,D_\theta))\ U(z,\theta) = V(z,\theta) + \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta)\ z^j.$$

On pose $\hat{U}(z,\theta) = (\sin(2\pi z))\ U(z,\theta)$; alors $\hat{U}(z,\theta)$ est entière en z, et

$$\hat{U}(k,\theta) = (2\pi)\ U_k(\theta) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

(U_k est un coefficient de Taylor de U comme dans (3)).

On va montrer que les $U_k(\theta)$ vérifient une inégalité de la forme (5).

On déduit de (12) :

(13) $$\hat{U}(z,\theta) = (z-\mathcal{A})^{-1}\ ((\sin(2\pi z))\ (V(z,\theta) + \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta)\ z^j).$$

L'analyticité de v, (10), (11) et de nouveau le théorème de Phragmén-Lindelöf donnent alors :

$$\|\hat{U}(z,\theta)\|_{L^2(\delta_{n-1})} \leq C\ e^{C|z|} \text{ pour tout } z \in \mathbb{C},$$

ce qui implique bien une inégalité de la forme (5) sur $U_k(\Theta)$ et montre l'analyticité de u.

Indications sur la démonstration du théorème 2.

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 elliptique sur S_{n-1} introduit dans (7) et (12).

On montre alors :

Lemme 3.

Sous l'hypothèse (H), il existe $z_o \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z_o < 0$ *et* z_o *est une valeur propre de* $\mathcal{A}$.

On ne montre pas ici le lemme 3.

Pour montrer le théorème 2, on considère $U \in (\mathcal{C}^\infty(S_{n-1}))^m$ tel que $U \neq 0$

$$(z_o - \mathcal{A})\ U = 0.$$

Soit $u_o(\Theta)$ la première composante de U ; on a : $u_o \neq 0$. On pose alors :

$$f(x) = r^{z_o}\ u_o(\Theta).$$

On vérifie assez aisément que l'on a

$$P(x,D)\ f(x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Soit F une distribution dans $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est f. On a alors :

$$P(x,D)\ F = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha\, D^\alpha \delta \quad , \quad C_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Soit E_N l'espace des distributions de la forme $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha\, D^\alpha \delta$.

P est un opérateur dans E_N ; on distingue alors deux cas :

i) P est bijectif dans E_N ; dans ce cas, on modifie F par un élément de E_N pour avoir

$$P\ u = 0$$

et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $u \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) P n'est pas bijectif ; dans ce cas, il existe $u \in E_N$ $u \neq 0$ et $Pu = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC and L.J. LIPKIN : On the operator $\Delta r^2 + \mu(\frac{\partial}{\partial r})\, r + \lambda$. J. Diff. Equ. 15 (1974), p. 499-509.

[2] N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ : Linear Operators part. II, John Wiley (1963).

[3] R.T. SEELEY : Complex powers of an elliptic Operator. Proc. Symp. Pure Math A M S 10 (1967), p. 288-307.

[4] E.C. TITCHMARSH : The theory of functions, secund edition. London (1939).