M. S. BAOUENDI

C. GOULAOUIC

Sur une classe de problèmes de Cauchy singuliers non linéaires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___1_A1_0>

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES DE CAUCHY

SINGULIERS NON LINEAIRES

par

M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

On dégage une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour lesquels des théorèmes d'existence et d'unicité locale pour le problème de Cauchy sont démontrés. Ces systèmes sont une généralisation au cas non linéaire des systèmes linéaires "de Fuchs" (cf. [1]).

I - Problème de Cauchy singulier sous forme réduite

Soit $(X_s)_{0<s\leqslant 1}$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach ; soit un opérateur linéaire de $\bigcup\limits_{0<s\leqslant 1} X_s$ dans lui-même dont, pour tout $s \in]0,1]$, la restriction à X_s est continue de X_s dans lui-même $(\Lambda \in \mathcal{L}(X_s,X_s))$; on suppose que Λ vérifie :

(1) Il existe un compact $K \subset \mathbb{C}$, un contour γ entourant K et $M > 0$ tels que : pour tout $s \in]0,1]$, le spectre $sp_s\ \Lambda$ de Λ opérant dans X_s est contenu dans K et

$$\sup_{\substack{z \in \gamma \\ s \in]0,1]}} \|(z-\Lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_s,X_s)} \leq M$$

et aussi

(2) Le contour γ est contenu dans $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\ z < 0\}$.

On se donne $T > 0$, une fonction h continue de $[-T,T]$ dans X_1 $(h \in \mathcal{C}([-T,T], X_1))$ et on désigne par u_0 l'unique élément de X_1 vérifiant

(3) $$-\Lambda u_0 = h(0).$$

Soient $R > 0$ et g une fonction continue de $[-T,T] \times \{u \in X_s \ ; \ \|u-u_0\|_s < R\}$ dans $X_{s'}$, pour tous $0<s'<s\leqslant 1$.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \in]0,1]$ et tout $u \in X_r$ vérifiant $\|u-u_0\|_r < R$, il existe $A_u \in \mathcal{C}([-T,T], \mathcal{L}(X_s,X_{s'}))$ pour tout $0<s'<s\leq r$ et vérifiant

(4) $$\sup_{|t|\leq T} \|A_u(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s'})} \leq \frac{C}{s-s'}$$

et

(5) Pour tout $v \in X_s$, $\|v-u_0\|_s < R$,

$$\sup_{|t|\leq T} \|g(t,v)-g(t,u)-A_u(t)(v-u)\|_{s'} < \frac{C}{s-s'} \|v-u\|_s^2 .$$

On a alors avec les hypothèses précédentes :

<u>Théorème 1</u>. L'équation

(6) $$tu' - \Lambda u = t\, g(t,u) + h(t)$$

admet, au voisinage de $t=0$, une solution unique au sens suivant :
il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \in]0,a_0[$ et tout $s \in]0,1[$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}(]-a(1-s),a(1-s)[, X_s)$ vérifiant
$\sup_{|t|<a(1-s)} \|u(t)-u_0\|_s < R$ et (6). De plus, $u(0) = u_0$.

La démonstration est une adaptation au cas singulier de celle de L. Nirenberg [2] ; on résoud d'abord un problème de Cauchy pour une équation linéaire de la forme $tu' - \Lambda u = t\, Au + k$ où A vérifie (4), à l'aide d'une intégrale de Hardy "opérationnelle" ; on obtient une estimation de u en fonction de k ; on utilise ensuite une méthode itérative du type de celle de Newton.

II - Réduction du problème de Cauchy du 1er ordre

Pour tout $i = 1,\dots,n$, soit

$A_i \in \mathcal{C}^\infty([-T,T], \mathcal{L}(X_s, X_{s'}))$ pour tout $0<s'<s\leq 1$ et vérifiant :

(7) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{|t|\leq T\\ i=1,\dots,n}} \|A_i^{(p)}(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s'})} \leq \frac{C_p}{s-s'} .$$

On note $A_{i+n}(t) = \dfrac{A_i(t) - A_i(0)}{t}$ pour $1\leq i\leq n$.

Soit $u_o \in X_1$ et (quitte à réduire la chaîne (X_s)), on suppose que $A_i(0)\, u_o \in X_1$ pour tout $i = 1,\dots,2n$.

Soit $R > 0$; on note

$$\Omega_{R,s} = \{(u,v_1,\dots,v_n) \in (X_s)^{n+1} ;\ \|u-u_o\|_s < R \ \text{ et } \|v_i - A_i(0)u_o\|_s < R \quad \text{pour } i = 1,\dots,n\}.$$

On considère une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty([-T,T] \times \Omega_{R,s}, X_s)$ pour tout $s \in]0,1]$;

on suppose :

(8) $F(0,u_o,A_1(0)u_o,\dots,A_n(0)u_o) = 0.$

On se propose de résoudre au voisinage de $t = 0$ l'équation

(9) $tu' = F(t,u,A_1u,\dots,A_nu)$, avec $u(0) = u_o$.

On note $\tilde{F}(t,u) = F(t,u,A_1u,\dots,A_nu)$ et

(10) $$\Lambda = \tilde{F}'_u(0,u_o) - I = F'_u(0,u_o,A_i(0)u_o,\dots) + \sum_{j=1}^{n} F'_{A_ju}(0,u_o,A_i(0)u_o,\dots).\, A_j(0) - I.$$

Pour tout $0<s'<s\leq 1$, on a : $\Lambda \in \mathcal{L}(X_s,X_{s'})$.

On désigne par K_i le commutateur $[\Lambda, A_i(0)]$ pour $i = 1,\dots,2n$.

On fait l'hypothèse décrivant <u>le caractère fuchsien</u> de l'équation (9) :

(11) Les opérateurs Λ et K_i pour $i = 1,\dots,2n$ vérifient (1).

On a alors :

Théorème 2. Si $(sp_1\Lambda) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, l'équation (9) admet une solution $\mathcal{C}^\infty$ unique au sens suivant :

il existe $a_o > 0$ tel que pour tout $a \in]0,a_o[$ et tout $s \in]0,1[$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(]-a(1-s),a(1-s)[, X_s)$ vérifiant

$$\sup_{|t|<a(1-s)} \|u(t)-u_o\|_s < R \ , \qquad \sup_{\substack{|t|<a(1-s)\\ i=1,\dots,n}} \|A_i(t)u-A_i(0)u_o\|_s < R$$

et l'équation (9).

Les étapes essentielles de la démonstration sont :

1) On pose $u = u_o + tv$, ce qui permet de mettre l'équation (9) sous la forme

(12) $$tv' - \Lambda v = t\, G(t,v,A_1v,\dots,A_{2n}v) + H(t)$$

où G et H vérifient les hypothèses de régularité similaires à celles de F.

2) Dans le cas où Λ (qui vérifie (1)) ne vérifie pas (2), on utilise un développement de Taylor de v jusqu'à l'ordre m (tel que $\gamma \subset \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\, z < m\}$); cela permet de se ramener au cas où Λ vérifie (2), modulo la discussion d'un système fini d'équations stationnaires ; cette discussion permet aussi de traiter le cas où $sp_1 \Lambda$ rencontre $\mathbb{N}$.

3) Après s'être ramené au cas àù (2) est vérifiée, on quasilinéarise (12) en posant :

$$w_o = v \ ; \quad w_i = A_i v \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,2n$$

et en appliquant A_i à (12) pour $i = 1,\dots,2n$.

On obtient pour $W = (w_o,\dots,w_{2n})$ un système d'équations qui vérifie les hypothèses du théorème 1.

III - Remarques

1) Si les données (g, h ou F) sont holomorphes en t, les solutions u données par les théorèmes 1 ou 2 sont aussi holomorphes en t au voisinage de t = 0.

2) Le cadre abstrait du paragraphe II s'applique en particulier au problème de Cauchy pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre de la forme :

$$t\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

où $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et F est une fonction vectorielle ananlytique de $x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pour $i = 1,\ldots,n$.

Pour cela, on prend comme espace X_s, l'espace des fonctions analytiques bornées sur le polydisque

$$\{z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n \;;\; |z_i| < s\} \quad \text{et} \quad A_i(t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

En particulier, la condition (11) s'écrit ici :

$$F'_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\left(0,x,u_0(x),\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x),\ldots\right) = 0 \quad \text{pour } |x_i| < 1 \quad \text{et} \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

Dans le cadre abstrait ci-dessus, on peut aussi traiter par exemple le cas où les opérateurs A_i sont des pseudo-différentiels convenables sur une variété analytique.

3) Une discussion du cas des équations d'ordre supérieur de la forme

$$t^k\, D_t^m u = F(t,x,u,D_t^p\, D_x^\alpha u \quad \text{pour} \quad p+|\alpha| \leq m,\ p < m)$$

se fait aussi à l'aide du théorème 2 après avoir fait une réduction au 1er ordre.

Les résultats détaillés et les démonstrations complètes feront l'objet d'une publication à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC - Cauchy problems with characteristic initial hypersurface
Comm. Pure appl. Math. XXVI (1973) 455-475.

[2] L. NIRENBERG - An abstract from of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. J. Differential Geometry 6 (1972) 561-576.