D. CONDUCHE

Groupes de Grothendieck des anneaux de dimension 1

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 6, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A6_0>

GROUPES DE GROTHENDIECK DES ANNEAUX DE DIMENSION 1

par

D. CONDUCHE

0 - Introduction

Le but de cette étude est de décrire le groupe de Grothendieck $G_o(A)$ associé à la catégorie des modules de type fini sur un anneau A commutatif noethérien semi-local de dimension 1, et de montrer que pour tout groupe commutatif H de type fini et de cardinal infini, on peut trouver un anneau A ayant ces propriétés, et tel que $G_o(A)$ soit isomorphe à H.
Ceci est fait au paragraphe 3 en utilisant la fermeture intégrale A' de l'anneau A dans son anneau total des fractions.
Dans le cas où A' n'est pas un A-module de type fini, on utilise un anneau intermédiaire A" qui est un A-module de type fini, et tel que l'extension $A" \longrightarrow A'$ soit radicielle. L'existence de cet anneau A" est établie au paragraphe 2 qui reprend les démonstrations de [9 O IV 23.2] en remplaçant l'hypothèse A intègre par l'hypothèse A réduit.
Le paragraphe 1 ne fait essentiellement que rappeler des définitions et des résultats connus de K-théorie algébrique qui seront utilisés dans la suite.
Les méthodes employées au paragraphe 3 ne semblent pas directement généralisables aux anneaux de dimension supérieure à 1, car la fermeture intégrale n'est pas toujours un anneau régulier, et peut même ne pas être un anneau noethérien [14]. Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

1 - Généralités

Définition 1.1 : Soit $\underline{C}$ une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne. On appelle groupe de Grothendieck associé à $\underline{C}$ la donnée d'un groupe commutatif $K_0(\underline{C})$ et d'une application $[\ ]_{\underline{C}}$ de la classe des objets de $\underline{C}$ dans $K_0(\underline{C})$ universel pour les propriétés suivantes :

a) $A \simeq B \Longrightarrow [A]_{\underline{C}} = [B]_{\underline{C}}$

b) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

où A, A', A'' sont des objets de $\underline{C}$

$$[A]_{\underline{C}} = [A']_{\underline{C}} + [A'']_{\underline{C}}$$

Définition 1.2 : $\underline{C}$ étant toujours une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne, soit $\underline{C}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie formée des couples (A,α) où A est un objet de $\underline{C}$ et α un automorphisme de A avec pour morphismes $(A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$ les morphismes f de $\underline{C}$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

On appelle groupe de Whitehead associé à la catégorie $\underline{C}$, la donnée d'un groupe commutatif $K_1(\underline{C})$ et d'une application $[\ ]_{\underline{C}}$ de la classe des objets de $\underline{C}^{Z}$ dans $K_1(\underline{C})$ universel pour les propriétés suivantes :

a) $(A,\alpha) \simeq (B,\beta) \Longrightarrow [A,\alpha]_{\underline{C}} = [B,\beta]_{\underline{C}}$

b) Si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et où $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont des automorphismes, alors

$$[A,\alpha]_{\underline{C}} = [A',\alpha']_{\underline{C}} + [A'',\alpha'']_{\underline{C}}$$

c) Si α et β sont des automorphismes de A

$$[A,\alpha\beta] = [A,\alpha] + [A,\beta].$$

L'existence des groupes de Grothendieck et de Whitehead est démontrée s'il existe un ensemble E d'objets de $\underline{C}$ tel que tout objet de $\underline{C}$ soit isomorphe à un élément de E (cf [8],[17]). Cette hypothèse sera toujours vérifiée ici.

Etant donné un anneau noethérien A, on notera $G_o(A)$ (resp. $K_o(A)$) le groupe de Grothendieck associé à la catégorie des A-modules de type fini (resp. des A-modules projectifs de type fini), et $G_1(A)$ le groupe de Whitehead associé à la catégorie des A-modules de type fini.
Soit S une partie multiplicative de A. On notera $G_o(A,S)$ le groupe de Grothendieck associé à la catégorie des A-modules de type fini annulés pour la localisation par rapport à S.

La démonstration des résultats suivants peut être trouvée dans [1]

Proposition 1.3 : Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal nilpotent de A. Alors le foncteur "restriction des scalaires" de la catégorie des $A/\mathfrak{J}$-modules de type fini dans la catégorie des A-modules de type fini induit un isomorphisme $G_o(A) \simeq G_o(A/\mathfrak{J})$.

Proposition 1.4 : Soit A un anneau noethérien régulier. Alors l'homomorphisme $K_o(A) \longrightarrow G_o(A)$ ("homomorphisme de Cartan") induit par le foncteur d'inclusion de ma catégorie des A-modules de type fini est un isomorphisme.

Etant donné un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ le foncteur "$\otimes_A B$" de la catégorie des A-modules projectifs de type fini dans la catégorie des B-modules projectifs de type fini induit un homomorphisme $K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$. Si B est une A-algèbre plate, le foncteur "$\otimes_A B$" de la catégorie des A-modules de type fini dans la catégorie des B-modules de type fini induit un homomorphisme $G_0(A) \longrightarrow G_0(B)$, et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_0(A) & \longrightarrow & G_0(B) \end{array}$$

où les verticales sont les homomorphismes de Cartan.

Un cas particulier d'homomorphisme plat d'anneau est l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow S^{-1}A$ de A dans un localisé de A.

Théorème 1.5 : Soient A un anneau noethérien, S une partie multiplicative de A. Alors il existe une 0-suite

$$G_1(S^{-1}A) \longrightarrow G_0(A,S) \xrightarrow{f} G_0(A) \xrightarrow{g} G_0(S^{-1}A) \longrightarrow 0$$

exacte en $G_0(A)$ et $G_0(S^{-1}A)$ où g est induit par le foncteur localisation, et f par l'inclusion de la catégorie des A-modules de type fini annulés par la localisation dans la catégorie des A-modules de type fini.
Si l'anneau $S^{-1}A$ contient un idéal $\mathfrak{J}$ nilpotent tel que $S^{-1}A/\mathfrak{J}$ soit régulier, alors la suite est exacte.

Cette dernière propriété est vérifiée en particulier si S est l'ensemble des éléments réguliers de l'anneau A.

Etant donné un anneau A, on désigne par $H_0(A)$ l'ensemble des applications continues de Spec(A), munis de la topologie de Zariski dans $\mathbb{Z}$ munis de la topologie discrète.

Proposition 1.6 : $H_o(A)$ est un groupe isomorphe à un facteur direct de $K_o(A)$:

$$K_o(A) \simeq H_o(A) \oplus Rk_o(A)$$

et cette application est fonctorielle : étant donné un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, l'homomorphisme $K_o(A) \longrightarrow K_o(B)$ induit par le produit tensoriel, se décompose en deux homomorphismes

$$H_o(A) \longrightarrow H_o(B) \qquad Rk_o(A) \longrightarrow Rk_o(B)$$

$H_o(A)$ est engendré par les éléments $(e_i A)$ $(i \in I)$ où les (e_i) $(i \in I)$ sont les idempotents de A.

Proposition 1.7 : Soit R le radical de Jacobson de l'anneau A. Alors l'homomorphisme $K_o(A) \longrightarrow K_o(A/R)$ est injectif.

Proposition 1.8 : Si A est un anneau artinien, $K_o(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les éléments $[A/m]$ où m parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A.

Corollaire 1.9 : Si A est un anneau semi-local $K_o(A)$ est un groupe abélien libre et $Rk_o(A) = 0$.

Démonstration : A/r est un anneau artinien et $K_o(A)$ s'identifie à un sous-groupe d'un groupe libre. Il suffit de montrer que $Rk_o(A/r) = 0$.
Or $\mathrm{Spec}(A/r)$ est discret, donc $H_o(A/r)$ est le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\mathrm{Spec}(A/r)$. Or $H_o(A/r)$ est un sous-groupe de $K_o(A/r)$; ce sont deux groupes libres, et ils ont le même nombre de générateurs, d'où le résultat.

2. Extensions entières d'un anneau semi-local noethérien réduit.

Lemme 2.1 : Soient A un anneau réduit, K l'anneau total des fractions de A, B une A-algèbre plate, $B_1 = B_{red}$ et R l'anneau total des fractions de B. Alors, pour toute sous-A-algèbre A' de K, l'homomorphisme canonique

$$(A' \otimes_A B)_{red} \longrightarrow (K \otimes_A R)_{red}$$

est injectif.

Démonstration : L'homomorphisme canonique $A' \otimes_A B \longrightarrow K \otimes_A R$ se décompose en les homomorphismes suivants :

$$A' \otimes_A B \xrightarrow{u} K \otimes_A B \xrightarrow{v} K \otimes_A B_1 \xrightarrow{w} K \otimes_A R$$

Comme B_1 est réduit, l'homomorphisme $B_1 \longrightarrow R$ est injectif. B et K étant des A-modules plats, u et w sont injectifs. Pour la même raison, si $\mathcal{N}$ est le nilradical de B, le noyau de v est $K \otimes_A \mathcal{N}$ qui est contenu dans le nilradical de $K \otimes_A B$; donc tout élément de $A' \otimes_A B$ dont l'image par wovou est nilpotente est nilpotent.

Proposition 2.2 : Soient A un anneau réduit, K l'anneau total des fractions de A, B un anneau noethérien qui est une A-algèbre plate, (q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les idéaux premiers minimaux de B. On suppose que les B/q_i sont des anneaux japonais. Soit A' une sous-A-algèbre de K entière sur A.
Soit (C_λ) la famille filtrante croissante des sous-anneaux de A' qui sont des A-algèbres finies. Alors :

1) Il existe un indice α tel que pour $\lambda \geqslant \alpha$ l'homomorphisme canonique $(C_\alpha \otimes_A B)_{red} \longrightarrow (C_\lambda \otimes_A B)_{red}$ soit bijectif.

2) Si, en outre, B est un A-module fidèlement plat, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha)$ est radiciel.

Démonstration :

1) Soient $B_1 = B_{red}$ et R l'anneau total des fractions de B_1. Comme B est un A-module plat, tout élément non diviseur de 0 dans A est B-régulier et, à fortiori B_1-régulier.

L'homomorphisme composé $A \longrightarrow B \longrightarrow B_1$ se prolonge donc en un homomorphisme $K \longrightarrow R$. R est composé direct des corps des fractions L_i des B/q_i. Par hypothèse, la fermeture intégrale de B/q_i dans L_i est un B/q_i-module de type fini, donc un B-module de type fini ; la fermeture intégrale B' de B dans R est donc un B-module de type fini.

D'après le lemme 1, les $(C_\lambda \otimes_A B)_{red}$ s'identifient à des sous-anneaux de R qui sont des B-algèbres finies, donc contenues dans B'. B étant noethérien et B' un B-module de type fini, la famille filtrante des $(C_\lambda \otimes_A B)_{red}$ admet un plus grand élément $(C_\alpha \otimes_A B)_{red}$, d'où le 1).

2) B étant un A-module fidèlement plat, il suffit de montrer que le morphisme $\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)$ est radiciel, ou encore que le morphisme $\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B)_{red} \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)_{red}$ est radiciel.
Or $A' \otimes_A B = \varinjlim (C_\lambda \otimes_A B)$ donc $(A' \otimes_A B)_{red} = \varinjlim (C_\lambda \otimes_A B)_{red}$, et le résultat se déduit du 1).

<u>Corollaire 2.3</u> : <u>Soient A un anneau semi-local noethérien réduit, K l'anneau total des fractions de A, et A' une sous-A-algèbre de K entière sur A. Soit</u> (A''_λ) <u>la famille filtrante croissante des sous-anneaux de A' qui sont des A-algèbres finies. Soit</u> $(\hat{C}_\lambda)$ <u>la famille des complétés des</u> C_λ. <u>Alors il existe un indice</u> α <u>tel que l'homomorphisme</u> $(\hat{C}_\alpha)_{red} \longrightarrow (\hat{C}_\lambda)_{red}$ <u>soit un isomorphisme pour</u> $\lambda \geqslant \alpha$ <u>et le morphisme</u> $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha)$ <u>soit radiciel</u>.

Démonstration : On applique la proposition 2.2 en prenant pour B le complété $\hat{A}$ de A. Les B/q_i correspondants étant des anneaux noethériens complets, sont des anneaux japonais, et B est un A-module fidèlement plat.
De plus, $C_\lambda \otimes_A B = \hat{C}_\lambda$.

Corollaire 2.4 : Avec les données et les hypothèses précédentes, A' est un anneau semi-local. Si $\underline{m}'$ est un idéal maximal de A' ayant pour restriction $\underline{m}$ dans A, le corps $A'/\underline{m}'$ est une extension finie du corps $A/\underline{m}$.

Démonstration : D'après la bijection $(\hat{C}_\alpha)_{red} \longrightarrow (\hat{C}_\lambda)_{red}$ pour $\lambda \geqslant \alpha$, le nombre des idéaux maximaux de C_λ est constant pour $\lambda \geqslant \alpha$; de plus, si $\underline{m}_\alpha$ est un idéal maximal de C_α et $\underline{m}_\lambda$ l'unique idéal maximal de C_λ au-dessus de $\underline{m}_\alpha$, les corps $C_\lambda/\underline{m}_\lambda$ et $C_\alpha/\underline{m}_\alpha$ sont canoniquement isomorphes.
La conclusion résulte de ce que, si $\underline{m}'$ est l'unique idéal maximal de A' au-dessus, $\underline{m}_\alpha$, on a $\underline{m}' = \varinjlim \underline{m}_\lambda$ et $A'/\underline{m}' = \varinjlim (C_\lambda/\underline{m}_\lambda)$

3. Groupes de Grothendieck associés aux anneaux noethériens semi-locaux de dimension 1.

Proposition 3.1 : Soient A un anneau commutatif noethérien, S une partie multiplicative de A, A" une A-algèbre finie incluse dans $S^{-1}A$.
Soit $G_0(A''/A)$ (resp. $G_0(A''/A,S)$) le conoyau de l'homomorphisme de $G_0(A'')$ (resp. $G_0(A'',S)$) dans $G_0(A)$ (resp. $G_0(A,S)$) induit par la restriction des scalaires. Alors, si $S^{-1}A_{réd}$ est un anneau régulier, on a un isomorphisme

$$G_0(A''/A,S) \simeq G_0(A''/A).$$

Démonstration : On a un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
G_1(S^{-1}A'') \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0(A'',S) \arrow[r] \arrow[d] & G_0(A'') \arrow[r] \arrow[d] & G_0(S^{-1}A'') \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
G_1(S^{-1}A) \arrow[r] & G_0(A,S) \arrow[r] \arrow[d] & G_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & G_0(S^{-1}A) \arrow[r] & 0 \\
& G_0(A''\ A,S) \arrow[r] \arrow[d] & G_0(A''\ A) \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Les égalités viennent de ce que $S^{-1}A'' = S^{-1}A'$. Les colonnes sont exactes par définition et les lignes le sont d'après le théorème 1.5.

Le résultat s'en déduit immédiatement.

Corollaire 3.2 : Si le foncteur restriction des scalaires induit un isomorphisme entre $G_0(A,S)$ et $G_0(A'',S)$, $G_0(A)$ est isomorphe à $G_0(A'')$.

Proposition 3.3 : Supposons qu'en plus des hypothèses de la proposition 3.1, l'anneau A est semi-local, et qu'il existe une A"-algèbre A' incluse dans $S^{-1}A$ telle que :

a) A' est un anneau semi-local régulier

b) Tout A-module de type fini annulé par la localisation par rapport à S est, par restriction des scalaires, un A"-module de type fini et l'homomorphisme canonique entre $G_0(A',S)$ et $G_0(A'',S)$ est bijectif.

Alors l'homomorphisme $G_0(A'') \longrightarrow G_0(A)$ est injectif et la suite exacte suivante se scinde :

$$0 \longrightarrow G_0(A'') \longrightarrow G_0(A) \longrightarrow G_0(A''|A) \longrightarrow 0.$$

Démonstration : A' étant un anneau régulier, on a $G_0(A') \simeq K_0(A')$.

A' étant semi-local, on a $Rk_0(A') = 0$. Donc $G_0(A') \simeq H_0(A')$ où $H_0(A')$ est un groupe abélien libre fini admettant pour base des éléments $[e_iA']$ $(1 \leq i \leq n)$, où les (e_i) sont des idempotents orthogonaux de A'. Comme, par hypothèse A' est un sous-anneau de $S^{-1}A'$, l'injection $A' \longrightarrow S^{-1}A'$ envoie les (e_i) sur n idempotents orthogonaux et distincts ; donc l'homomorphisme

$$H_o(A') \longrightarrow H_o(S^{-1}A') \text{ est injectif.}$$

A' étant un anneau régulier, $S^{-1}A'$ est également un anneau régulier, et l'on a :

$$G_o(S^{-1}A') \simeq K_o(S^{-1}A') = H_o(S^{-1}A') \oplus Rk_o(S^{-1}A')$$

L'homomorphisme $G_o(A') \longrightarrow G_o(S^{-1}A')$ est donc injectif. Comme on a la suite exacte :

$$G_1(S^{-1}A') \longrightarrow G_o(A',S) \longrightarrow G_o(A') \longrightarrow G_o(S^{-1}A') \longrightarrow 0$$

l'homomorphisme $G_1(S^{-1}A') \longrightarrow G_o(A',S)$ est surjectif.

D'après les hypothèses, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G_1(S^{-1}A') \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_o(A',S) \arrow[d, "\wr"] \\ G_1(S^{-1}A'') \arrow[r] & G_o(A'',S) \end{tikzcd}$$

donc l'homomorphisme $G_1(S^{-1}A'') \longrightarrow G_o(A'',S)$ est surjectif, d'où, d'après l'exactitude de la suite

$$G_1(S^{-1}A'') \longrightarrow G_o(A'',S) \longrightarrow G_o(A'') \longrightarrow G_o(S^{-1}A'')$$

l'isomorphisme $G_o(A'') \simeq G_o(S^{-1}A'')$. D'après le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G_o(A'') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G_o(S^{-1}A'') \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ G_o(A) \arrow[r] & G_o(S^{-1}A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

l'homomorphisme $G_o(A'') \longrightarrow G_o(A)$ admet une rétraction, d'où le résultat.

<u>Théorème 3.4</u> : <u>Soit A un anneau semi-local, noethérien, de dimension 1. Soient $(\underline{m}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les idéaux maximaux de A, et soit p le nombre des idéaux premiers minimaux de A. Alors $G_o(A) \simeq \mathbb{Z}^p \times \widetilde{G_o(A)}$, où $\widetilde{G_o(A)}$ est un groupe fini somme directe des n sous-groupes monogènes engendrés par les éléments</u> $[A/\underline{m}_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Soit A' la fermeture intégrale de A dans l'anneau total des fractions de $A_{réd}$ et, pour chaque i, soient $(\underline{m}'_{i\lambda})$ $(1 \leq \lambda \leq r_i)$ les idéaux maximaux de A' au-dessus de $\underline{m}_i$. Alors dans $\widetilde{G_o(A)}$, l'élément $[A/\underline{m}_i]$ est d'ordre p.g.c.d. $[A'/\underline{m}'_{i\lambda} : A/\underline{m}_i]$. En particulier, si A est local $\widetilde{G_o(A)}$ est un groupe cyclique fini, éventuellement 0.

Démonstration :

a) Soit $\mathfrak{I}$ le nilradical de A.

On a $G_o(A) \simeq G_o(A/\mathfrak{I})$, et il y a bijection entre les idéaux premiers de A et ceux de $A/\mathfrak{I}$. On peut donc supposer A réduit.

b) On suppose désormais A réduit. Si S est l'ensemble des éléments non diviseurs de 0 dans A l'anneau total des fractions K de A, est égal à $S^{-1}A$. D'après les corollaires 2.3 et 2.4, il existe une extension finie A" de A, telle qu'il existe une bijection entre les idéaux maximaux de A" et ceux de A', et telle que pour tout idéal maximal $\underline{m}'$ de A' de restriction $\underline{m}''$ dans A" on ait un isomorphisme $A'/\underline{m}' \simeq A''/\underline{m}''$. Les anneaux A, A' et A" vérifient les hypothèses de la proposition 2.3, et l'on a :

$$G_o(A) \simeq G_o(A'') \times G_o(A''|A) \simeq G_o(K) \times G_o(A''|A,S)$$

A ayant p idéaux premiers minimaux et étant réduit, K est isomorphe à un produit de p corps, d'où $G_o(K) \simeq \mathbb{Z}^p$.

La catégorie des A-modules M tels que $S^{-1}M = 0$ est égale à la catégorie des A-modules de longueur finie, donc $G_o(A,S)$ est le groupe abélien libre engendré par les éléments $[A/\underline{m}_i]$ $(1 \leq i \leq n)$:

$$G_o(A,S) \simeq \coprod_{1 \leq i \leq n} G_o(A/\underline{m}_i) \simeq \mathbb{Z}^n$$

De même, si on note $\underline{m}^{"}_{i\lambda}$ la restriction à A" de l'idéal maximal $\underline{m}'_{i,\lambda}$ de A' :

$$G_o(A",S) \simeq \coprod_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq \lambda_i \leq r_i}} G_o(A"/m"_{i\lambda}) \simeq \mathbb{Z}^{r_1+\dots+r_n}$$

l'homomorphisme $G_o(A",S) \longrightarrow G_o(A,S)$ est la somme des homomorphismes

$$\coprod_{1\leq \lambda \leq r_i} G_o(A"/\underline{m}"_{i\lambda}) \xrightarrow{\varphi_i} G_o(A/\underline{m}_i)$$

avec

$$\varphi_i[A"/\underline{m}"_{i\lambda}] = [A"/m"_{i\lambda} : A/\underline{m}_i] \cdot [A/\underline{m}_i]$$

Comme tout idéal maximal de A est la restriction d'au moins un idéal maximal de A", et qu'aucun des homomorphismes φ_i n'est nul, $\widetilde{G_o(A)} = G_o(A"|A,S)$ est un groupe fini engendré par les éléments $[A/\underline{m}_i]$.

La fin résulte de ce que :

$$[A'/\underline{m}'_{i\lambda} : A/\underline{m}_i] = [A"/\underline{m}"_{i\lambda} : A/\underline{m}_i]$$

<u>Corollaire 3.5</u> : <u>Si l'anneau A vérifie les hypothèses de la proposition 3.4, et si les corps résiduels</u> $A/\underline{m}_i$ <u>de A sont algébriquement clos, on a</u> :

$$G_o(A) \simeq \mathbb{Z}^p$$

C'est le cas, en particulier, si A est l'anneau local en un point d'une courbe algébrique définie sur un corps algébriquement clos, ou le complété d'un tel anneau ; si le corps de base n'est pas algébriquement clos, ce n'est pas forcément vérifié (cf. exemple 3.6).

<u>Démonstration</u> : Pour tout idéal $\underline{m}"$ de A", $A"/\underline{m}"$ est une extension algébrique de $A/\underline{m}" \cap A$, donc $A"/\underline{m}" \simeq A/\underline{m}" \cap A$; l'homomorphisme $G_o(A",S) \longrightarrow G_o(A,S)$ est surjectif, et l'on a :

$$\widetilde{G_o(A)} = G_o(A"|A) = G_o(A"|A,S) = 0.$$

Exemple 3.6 : Pour $A = \left(\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2+Y^2)}\right)_{(X,Y)}$ ou $A = \frac{\mathbb{R}[[X,Y]]}{(X^2+Y^2)}$ on a $G_o \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$

Proposition 3.7 : Pour tout groupe commutatif fini G, et tout entier p non nul, il existe un anneau A noethérien, semi-local de dimension 1 tel que

$$G_o(A) \simeq \mathbb{Z}^p \times G$$

Démonstration : G peut se décomposer en un produit de r groupes cycliques

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$

d'ordres $n_1,\ldots,n_r$. Soit k un corps ayant au moins r éléments ; soit $K = k(X_1,\ldots X_r)$, et pour tout i $(1 \leq i \leq r)$ soit $K_i = k(X_1,\ldots X_i^{n_i},\ldots X_r)$. Alors on a $[K : K_i] = n_i$. Soient $a_1,\ldots a_r$, r éléments distincts de k. Soit T le complémentaire dans $K[Y]$ de la réunion des idéaux premiers $(Y-a_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ et soit $A_1' = T^{-1}K[Y]$.

Soit A_1 le sous-anneau de A_1' formé des éléments P(Y) tels que $P(a_i) \in K_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Alors A_1 vérifie la proposition pour p = 1. En effet A_1' est la clôture intégrale de A_1. A_1' étant un A_1-module de type fini peut jouer en même temps le rôle du A' et du A" de la proposition 2.4. Soit $S = A_1 - \{0\}$.

On a :

$$G_o(A_1,S) \simeq \coprod_{1 \leq i \leq r} G_o(A_1/(Y-a_i)) \; ; \; G_o(A_1',S) \simeq \coprod_{1 \leq i \leq r} G_o(A_1'/(Y-a_i))$$

et

$$G_o(A_1'\, A_1,S) \simeq \coprod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$$

avec $p_i = [A_1'/(Y-a_i)A_1' : A_1/(Y-a_i)A_1] = (K : K_i) = n_i$; d'où, A_1 vérifiant les hypothèses de la proposition 2.4 :

$$G_o(A_1'|A_1) \simeq G_o(A'|A,S) \simeq G$$

Pour p > 1, on peut prendre pour A_i $(2 \leq i \leq p)$ un anneau de valuation discrète, par exemple, pour A_1 l'anneau qui vient d'être construit et $A = A_1 + \ldots + A_p$.

On a alors :

$$G_o(A) \simeq \prod_{i=1}^{n} G_o(A_i) = \mathbb{Z}^p \times G.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS Algebraic K-theory. Benjamin. New York 1968.

[2] H. BASS K-theory and Stable algebra. Publ. Maths I.H.E.S, pp. 5-60. Paris I964.

[3] H. BASS Sur la K-théorie algébrique. Comptes rendus du premier K-colloque, volume 2. Faculté des Sciences de Montpellier 1967-68 n° 29.

[4] H. BASS Topics in algebraic K-theory Tata institute of fondamental research lecture in Math n° 41 Bombay 1966.

[5] N. BOURBAKI Algèbre, chapitre 8 Modules et anneaux semi-simples Hermann Paris 1958.

[6] N. BOURBAKI Algèbre commutative, chapitres 1 à 7 Hermann Paris (1961 à 1967).

[7] P. GABRIEL Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math de France 90 (1962), pp. 323 à 448.

[8] I. GIORGIUTTI Groupes de Grothendieck. Thèse à l'Université de Paris 1963.

[9] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de géométrie algébrique (première édition) P.U.F. Publ. Math. de l'I.H.E.S. Paris 1960.

[10] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de géométrie algébrique (deuxième édition) chapitre 1 Springer Berlin Heidelberg New York 1971.

[11] A. HELLER Some exact sequences in algebraic K-theory Topology 3 (1965), pp. 389-408.

[12] F.Y. LAM Inductions theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups of finite groups Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 1, 1968, pp. 91 à 148.

[13] J. MILNOR Introduction to algebraic K-theory Ann. of Maths Studies nb. 72. Princeton University Press an University of Tokyo Press Princeton 1971.

[14] M. NAGATA Local rings Interscience Publishers tracts in pure and applied Mathematics nb. 13 1960.

[15] J.R. STROCKER Le foncteur G en théorie des mutiplicités. Comptes rendus du 2^{e} K-colloque, pp. 108 à 133. Publication n° 100 du Secrétariat de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc 1970.

[16] R.G. SWAN Algebraic K-theory. Actes du congrès international Math 1970, tome 1, pp. 191 à 199.

[17] R.G. SWAN Algebraic K-theory. Lecture Notes in Mathematics 76 Springer 1968.