PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

BERNARD ALFONSI

Autour du théorème de l'élément primitif

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n^{o} 5, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A5_0>

AUTOUR DU THEOREME DE L'ELEMENT PRIMITIF

par

Bernard ALFONSI

Tous les anneaux sont commutatifs et possèdent un élément unité. Un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ est tel que $f(1) = 1$.

Si $A \longrightarrow B$ est une A-algèbre, on désigne par I_B (ou I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité), le noyau de l'homomorphisme canonique $p : B \otimes_A B \longrightarrow B$ défini par $p(x \otimes y) = xy$, et par $\Omega_{B/A}$ le B-module des différentielles I_B/I_B^2.

On se propose, dans ce qui suit, de caractériser le nombre de générateurs d'une A-algèbre finie B en fonction du nombre de générateurs du B-module $\Omega_{B/A}$.

Je tiens à remercier Daniel FERRAND, sans l'aide et les conseils de qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

§ 1. LE RESULTAT PRINCIPAL.

Théorème 1. Soient A un anneau semi-local, B une A-algèbre finie. Supposons que A soit à corps résiduels infinis, ou que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe au plus deux idéaux maximaux de B au-dessus de $\mathfrak{m}$.

Alors, B est une A-algèbre engendrée par moins de n éléments si et seulement si $\Omega_{B/A}$ est un B-module engendré par moins de n éléments.

Preuve : Le théorème résultera de la proposition suivante :

Proposition 1. Soient k un corps, B une k-algèbre finie. On suppose que k est infini, ou que B possède au plus deux idéaux maximaux. Alors, B est une k-algèbre monogène si et seulement si $\Omega_{B/k}$ est un B-module monogène.

Preuve de la proposition :

Lemme 1. Soient A un anneau, I un idéal de type fini de A, contenu dans tous les idéaux maximaux de A, sauf au plus un nombre fini $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_r$; $p : I \longrightarrow I/_{I^2}$ la surjection canonique, et $y_1,\dots,y_n$ un système générateur de $I/_{I^2}$. Alors, il existe un système générateur, $x_1,\dots,x_n$ de I tel que $p(x_i) = y_i$ pour tout $i = 1,\dots,n$.

En effet, l'homomorphisme $A \longrightarrow A/_I \times A/_{\mathfrak{m}_1} \times \dots \times A/_{\mathfrak{m}_r}$ est surjectif ; il en est donc de même de l'application obtenue par tensorisation :

$$I \longrightarrow I/_{I^2} \times I/_{\mathfrak{m}_1 I} \times \dots \times I/_{\mathfrak{m}_r I} .$$

Comme $I/_{\mathfrak{m}_j I} = I/_{\mathfrak{m}_j \cap I} = A/_{\mathfrak{m}_j}$, $I/_{\mathfrak{m}_j I}$ est monogène ; soit z_j un générateur.

Il existe des éléments $x_i \in I$, tels que, par l'application surjective considéré plus haut, l'image de x_1 soit $(y_1, z_1,\dots,z_r)$, et pour $i > 1$, l'image de x_i soit $(y_i, 0,\dots,0)$. Pour voir que les x_i engendrent I, on peut supposer A local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$: si $\mathfrak{m}$ est distinct de l'un des $\mathfrak{m}_j$, il contient I , $(I/_{\mathfrak{m}_j I})_{\mathfrak{m}} = 0$, et les y_i engendrant $(I_{\mathfrak{m}}/_{I^2_{\mathfrak{m}}})$, il résulte de Nakayama que les x_i engendrent $I_{\mathfrak{m}}$; si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_j$,

$$(I/_{I^2})_{\mathfrak{m}_j} = 0 = (I/_{\mathfrak{m}_k I})_{\mathfrak{m}_j} \text{ si } k \neq j : z_j \text{ engendrant } (I/_{\mathfrak{m}_j I})_{\mathfrak{m}_j} , \text{ il}$$

en résulte encore que x_j engendre $I_{\mathfrak{m}_j}$. C.Q.F.D.

Lemme 2. Soient A un anneau, I un idéal monogène de A. Pour que $x \in I$ engendre I, il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $I \neq \mathfrak{m}I$, on ait $x \notin \mathfrak{m}I$.

Ce n'est qu'une traduction de Nakayama : cela revient à dire que x engendre I modulo mI, pour tout idéal maximal m de A.

Lemme 3. Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels stricts de E formant un recouvrement de E.

Alors $\mathrm{Card}\,(I) \geq 1 + \mathrm{Card}\,(k)$.

Cela résulte immédiatement de [1] (Chap. II. § 7, ex. 5).

Lemme 4. Soient k un corps, B une k-algèbre finie, I le noyau de l'homomorphisme canonique $p : B \otimes_k B \longrightarrow B$. On suppose que k est infini, ou que B possède au plus deux idéaux maximaux.

Alors, si I est monogène, il existe $x \in B$ tel que $1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre I.

Preuve : Soit V le k-espace vectoriel engendré par les $1 \otimes x - x \otimes 1$, où $x \in B$. $\displaystyle\bigcup_{\substack{m \in \mathrm{Max}(B \otimes_k B) \\ mI \neq I}} (mI \cap V) \neq V$, car sinon, vu les hypothèses sur k ou B, il existerait, d'après le lemme 3, un idéal maximal m de $B \otimes_k B$, tel que $V = mI \cap V$ et que $mI \neq I$, d'où $V \subset mI$, ce qui impliquerait que $I \subset mI$, puisque V engendre lidéal I ; d'où la contradiction.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1 : d'après les lemmes 1 et 4, il existe $x \in B$ tel que $1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre lidéal I. Soit $C = k[x]$ la sous k-algèbre de B engendrée par x, et considérons le diagramme cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_k C \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & B \otimes_k B \arrow[d, "q"] \\
C \arrow[r] & B \otimes_C B
\end{tikzcd}$$

$1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre $J = \mathrm{Ker}\, p$, donc aussi $\mathrm{Ker}\, q$, d'où $\mathrm{Ker}\, q = I$, et donc $B \otimes_C B \xrightarrow{\sim} B$.

Or, on a une suite $B \rightrightarrows B \otimes_C B \longrightarrow B$, où les composés sont l'identité ; chacune des flèches $B \rightrightarrows B \otimes_C B$ est donc un isomorphisme. Ceci étant, la suite exacte de C-modules :

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow B/_C \longrightarrow 0$$

donne, par tensorisation avec B au-dessus de C, la suite exacte :

$$B \longrightarrow B \otimes_C B \longrightarrow B/_C \otimes_C B \longrightarrow 0$$

d'où

$$B/_C \otimes_C B = 0.$$

$C \longrightarrow B$ étant fini, on a : $\emptyset = \mathrm{Supp}_C(B/_C \otimes_C B) = \mathrm{Supp}_C(B/_C) \cap \mathrm{Supp}_C(B)$; comme $\mathrm{Supp}_C(B/_C) \subset \mathrm{Supp}_C(B)$, on a $\mathrm{Supp}_C(B/_C) = \emptyset$, donc $B/_C = 0$, i.e. $B=C$.

<u>Remarque</u>. Si k est fini, on ne peut supprimer l'hypothèse sur B, comme le montre l'exemple suivant : $k = \mathbb{F}_2$; $B = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, n'est pas monogène.

<u>Proposition 2</u>. Soient A un anneau semi-local, B une A-algèbre finie. Supposons que A soit à corps résiduels infinis, ou que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe au plus deux idéaux maximaux de B au-dessus de $\mathfrak{m}$.

Alors, pour que B soit une A-algèbre monogène, il faut et il suffit que $\Omega_{B/A}$ soit un B-module monogène.

<u>Preuve</u> : Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $\Omega_{B/\mathfrak{m}B \,/\, A/\mathfrak{m}}$ est un $B/_{\mathfrak{m}B}$-module monogène ; $B/_{\mathfrak{m}B}$ est donc une $A/_{\mathfrak{m}}$-algèbre monogène d'après la proposition 1.

$\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} B/_{\mathfrak{m}B}$ est donc une $\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} A/_{\mathfrak{m}}$-algèbre monogène [4].

Or $\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} B/_{\mathfrak{m}B} \xrightarrow{\sim} B \otimes_A \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} A/_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A/_{\mathrm{Rad}(A)}$, et Nakayama montre une fois de plus que B est monogène.

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème : on peut toujours se ramener au cas où A est un corps k.

D'autre part, pour $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(B)$, $\Omega_{B/k} \otimes_B B_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{B_{\mathfrak{m}}/k}$; comme $B_{\mathfrak{m}}$ est une k-algèbre finie, puisque facteur direct de B, si l'on suppose le théorème démontré pour une k-algèbre finie et locale, on sait que

$$B \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(B)} B_{\mathfrak{m}}$$

sera engendré par moins de n éléments si k est infini ([4]). Si k est fini, et si B possède deux idéaux maximaux, soient $(a_1,\dots,a_n)$ (resp. $(b_1,\dots,b_n)$) un système générateur de la k-algèbre B_1 (resp. B_2), où B_1 et B_2 désignent les deux composants locaux de B. $B \xrightarrow{\sim} B_1 \times B_2$ est une $k[a_1] \times k[a_2]$ - algèbre engendrée par moins de n-1 éléments, et la proposition 1 montre que $k[a_1] \times k[a_2]$ est monogène, puisqu'elle n'a que deux idéaux maximaux. Il résulte alors de [2] que B est engendrée sur k par moins de n éléments. On peut donc supposer que B est locale.

Dans ce cas, comme d(B) est un système générateur de $\Omega_{B/k}$, on peut en extraire un système minimal de générateurs (Nakayama...) ;

Il existe donc $x_1,\dots,x_n$ dans B tels que $dx_1,\dots,dx_n$ engendrent $\Omega_{B/k}$. Posons $A = k[x_1,\dots,x_{n-1}]$. La suite exacte :

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

montre que $\Omega_{B/A}$ est engendré par un élément, l'image de dx_n dans $\Omega_{B/A}$, donc que B est une A-algèbre monogène : $B = A[b]$, d'où $B = k[x_1,\dots,x_{n-1},b]$.

C.Q.F.D.

§ 2. CAS DES CORPS RESIDUELS FINIS.

On peut améliorer les résultats précédents, en remplaçant l'hypothèse faite sur la A-algèbre B par des hypothèses sur les cardinaux des corps résiduels de A :

Proposition 3. Soient A un anneau semi-local, k_i ses corps résiduels, B une A-algèbre finie, $n_i = rg_{k_i} (B \otimes_A k_i)$. Si, pour tout i, on a :

$$\text{card } (k_i) > n_i(n_i-1),$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega_{B/A}$ est un B-module monogène ;

(ii) B est une A-algèbre monogène.

Preuve : Comme dans le cas de la proposition 2, il suffit de faire la démonstration lorsque A est un corps k. B se décompose alors en composants locaux $B_1,\ldots,B_p$. D'après la proposition 1, chaque B_j est monogène :

$$B_j \xrightarrow{\sim} k[X]/_{(F_j)} \text{ ; soit } r_j = \deg (F_j) \ (j=1,\ldots,p) \ ;$$

On suppose que $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_p$. D'après [4] (prop. 3), si

$$\text{card } k > (r_1 + \ldots + r_{p-1}) \, r_p \text{ , B est monogène. Or}$$

$$n = rg_k \, B = \sum_{j=1}^{p} r_j \ ;$$

d'autre part, $1 \leq r_p \leq n$, donc :

$$(r_1+\ldots+ r_{p-1}) \, r_p = (n-r_p) \, r_p \leq (n-1)n \ ,$$

d'où le résultat en vertu de l'hypothèse faite sur card (k).

Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega_{B/A}$ est un B-module engendré par moins de n éléments ;

(ii) B est une A-algèbre engendrée par moins de n éléments.

On peut supposer que A est un corps k. D'après le théorème 1, chaque composant local B_j de B est engendré par moins de n éléments, soit :

$$B_j = k\,[x_{1,j}\ ,\ldots,\ x_{n-1,j}]\ ;$$

désignons par C_j la sous k-algèbre $k\,[x_{1,j}\ ,\ldots,\ x_{n-1,j}]$. $\prod_{j=1}^{p} C_j$ est engendré par moins de n-1 éléments (récurrence), et $\prod_j B_j$ est une $\prod_j C_j$ - algèbre monogène (prop. 3), donc $\prod_j B_j \xrightarrow{\sim} B$ est bien engendrée sur k par moins de n éléments.

C.Q.F.D.

§ 3. GLOBALISATION.

Le théorème 1 admet la forme globale suivante :

Théorème 2. Soit $A \longrightarrow B$ une A-algèbre finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une A-algèbre A' telle que Spec (A') $\longrightarrow$ Spec (A) soit étale et surjectif et telle que $B' = A' \otimes_A B$ soit une A'-algèbre engendrée par n éléments.

ii) Il existe une B-algèbre C telle que Spec (C) $\longrightarrow$ Spec (B) soit étale et surjectif et telle que $\Omega_{C/A}$ soit un C-module engendré par n éléments.

iii) Pour tout idéal premier q de B, $\Omega_{B_q/A}$ est un B_q-module engendré par n éléments.

Preuve : i) $\Longrightarrow$ ii) Il suffit de prendre pour C la B-algèbre étale B' et d'utiliser l'exactitude de la suite

$$0 = \Omega_{A'/A} \otimes_{A'} B' \longrightarrow \Omega_{B'/A} \longrightarrow \Omega_{B'/A'} \longrightarrow 0$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Comme $B \longrightarrow C$ est étale, on a un isomorphisme

$$\Omega_{B/A} \otimes_C C \xrightarrow{\sim} \Omega_{C/A}$$

Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C tel que $q = B \cap \mathfrak{r}$. On a un isomorphisme :

$$\Omega_{B_q/A} \otimes_{B_q} C_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{C_{\mathfrak{r}}/A} \ ;$$

donc

$$\mathrm{rg}_{k(q)} \left(\Omega_{B/A} \otimes_B k(q)\right) = \mathrm{rg}_{k(\mathfrak{r})} \left(\Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{r})\right) \leq n$$

et on conclut par Nakayama.

iii) $\Longrightarrow$ i) On peut supposer que A est local strictement hensélien, puis par Nakayama, que A est un corps k séparablement clos, donc infini ; B est alors isomorphe au produit de ses composants locaux B_i et l'hypothèse iii) dit que pour tout i, $\Omega_{B_i/k}$ est engendré par n éléments. Donc, $\Omega_{B/k}$ est un B-module engendré par n éléments et le théorème 1 permet de conclure puisque k est infini.

§ 4. CONTRE-EXEMPLES.

On ne peut espérer améliorer les résultats du § 1 dans le cas général :

Contre-Exemple 1 : *Il existe un anneau principal* A, *une* A*-algèbre finie et libre* B, *telle que* $\Omega_{B/A}$ *soit monogène, mais que* B *ne soit pas monogène.*

Soient k un corps infini de caractéristique o, non algébriquement clos ; $A = k[X]$; p, q deux polynômes irréductibles tels que $\deg(p) - \deg(q) \not\equiv 0$ (mod3) ; $K = k(X)$; L le corps cubique $K[u]$, où $u^3 = p^2q$ ($T^3 - p^2q$ est irréductible par le critère d'Eisentein) ; $v = pq/u$; $B = A + Au + Av$; A' l'anneau des entiers de L ; montrons que A' = B :

i) On vérifie aisément que le polynôme minimal de v sur K est $T^3 - pq^2$, que $v^2 = qu$, et $u^2 = pv$; enfin, que B est un sous-anneau de A', et un A-module libre de rang 3, dont (1,u,v) est une base (sinon le polynôme minimal de u serait de degré ≤ 2).

ii) $A' = B + qA'$: il faut montrer que l'homomorphisme canonique : $B/_{qB} \longrightarrow A'/_{qA'}$ est surjectif ; or $B/_{qB}$ et $A'/_{qA'}$ sont des $A/_{qA}$ -espaces vectoriels de dimension 3 ; il suffit donc de montrer que cet homomorphisme est injectif, i.e. que $qA' \cap B = qB$. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A' contenant qA', et $a + bu + cv \in qA' \cap B$; comme u^3 et v^3 sont dans qA', donc dans $\mathfrak{q}$, u et v appartiennent à $\mathfrak{q} \cap B$, et $a \in (\mathfrak{q} \cap B) \cap A = qA$; il faut donc montrer que $bu + cv \in qB$.

Or, $bu + cv \in qA' \cap B \Longrightarrow u(bu + cv) = bu^2 + cpq \in qA' \cap B \Longrightarrow bu^2 = qx$ avec $x \in A'$. Prenant la norme des deux membres, on a :

$$b^3(p^2q)^2 = q^3\ N(x)$$

$$b^3\ p^4 = q\ N(x)$$

Comme p et q sont étrangers dans A, on en tire $b^3 \in qA$ d'où $b \in qA$.

On montrerait de même que $c \in qA$.

De façon analogue, on a $A' = B + pA'$, d'où $A' = B + pqA'$.

iii) Soit $x = a + bu + cv$ ($a, b, c \in K$) un entier de L. $Tr(X) = 3a \in A$, d'où $a \in A$: $Tr(vx) = 3\ bpq \in A$, d'où $bpq \in A$; de même $cpq \in A$, d'où $pqx \in B$, et donc $pqA' \subset B$, ce qui montre que $A' = B$.

iv) B n'est pas monogène : pour le voir, calculons les discriminants : $D(1,u,v) = (p^2q^2)$; si $x = a + bu + cv \in B$, on a :

$$D(1,x,x^2) = p^2q^2(b^3q - c^3p)^2$$

Pour que x soit un générateur, il faut ([6], chap. V) que $b^3q - c^3p$ soit inversible, ce qui implique que $3\deg(b) + \deg(q) = 3\deg(c) + \deg(p)$ donc que 3 divise $\deg(p) - \deg(q)$, ce qui est impossible vu les hypothèses.

v) $\Omega_{B/A}$ est un B-module monogène d'après le résultat suivant :

Proposition 4. Soient A un anneau de Dedekind tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A/_{\mathfrak{m}}$ soit un corps parfait, et B la clôture intégrale de A dans une extension finie séparable de son corps des fractions. Alors $\Omega_{B/A}$ est monogène.

Preuve : Soient K le corps des fractions de A, L celui de B. Comme $K \longrightarrow L$ est séparable, $\Omega_{B/A} \otimes_A K = 0$; considéré comme A-module, $\Omega_{B/A}$ a donc un support fini $\{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_r\}$ d'idéaux maximaux de A. Posons $E = \Omega_{B/A}$. L'application : $E \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} E_{\mathfrak{m}_i}$ étant bijective, il suffit de voir que chaque $E_{\mathfrak{m}_i}$ est un $B_{\mathfrak{m}_i}$-module monogène, et on peut donc supposer que A est de valuation discrète.

Soient alors A' un hensélisé de A, $B' = B \otimes_A A'$; E étant un A-module de torsion, une puissance $\mathfrak{m}^d$ de l'idéal maximal de A annule E, et comme $A/_{\mathfrak{m}^d} \longrightarrow A'/_{\mathfrak{m}^d A'}$ est un isomorphisme ([5] chap. VIII), il en est de même de $E \longrightarrow E \times_A A' = E' \xrightarrow{\sim} \Omega_{B'/A'}$. Il suffit donc de montrer que E' est un B'-module monogène.

Or B étant normal, et A' une A-algèbre locale ind-étale, B' est normal ([5] chap. VIII) ; de plus, dim B' = dim A' = 1 ; on en déduit que chaque composant local B'_i de B' est un anneau de valuation discrète ([2], 1, prop. 11). En outre, il suffit de montrer que chaque facteur E'_i du module des différentielles est un B'_i-module monogène. Finalement, on peut donc supposer que A et B sont des anneaux de valuation discrète ; soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de B. On a la suite exacte :

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B K' \longrightarrow \Omega_{K'/K} \longrightarrow 0$$

où k et k' sont les corps résiduels de ^{A} et ^{B} respectivement ; $\Omega_{k'/k} = o$ puisque $k \longrightarrow k'$ est séparable par hypothèse ; comme B est de valuation discrète, $\mathfrak{n}$ est un B-module monogène, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

On peut se demander si le résultat du § 1 peut se généraliser à un anneau non nécessairement semi-local, sous la forme suivante :

"si I_B est monogène, alors B est une A-algèbre monogène".

Ceci impliquerait en particulier qu'une algèbre finie et nette est monogène ; de même, si $A \longrightarrow B$ est fini radiciel, et si $\Omega_{B/A}$ est monogène, B serait monogene, puisque I_B étant nilpotent, il serait monogène. Voici donc :

<u>Contre-Exemple 2</u> : *Il existe un anneau principal* A *et une* A*-algèbre finie, libre et étale qui n'est pas monogène.*

Soient k un corps de caractéristique 3 ; $F \in k[X,Y]$ le polynôme $X^2 - Y(Y^2 - 1)$; $A = k[X]$; $B = k[X,Y]/_{(F)}$; x et y les images de X et Y dans B. B est l'anneau d'une cubique passant par l'origine O ; on pose I $I = \mathrm{div}(O)$. On sait ([5], chap. VI) que I est un idéal de B qui est localement principal, mais non principal, et que I^2 est principal ; il existe donc (loc. cit. prop. 2) sur le B-module $C = B \oplus I$ une structure de B-algèbre finie étale ; A étant principal, C est en outre un A-module libre.

D'autre part, $\Omega_{B/A}$ est le B-module engendré par dY, avec la relation $F'_Y\, dY = dY = 0$ (car k=3). B est donc une A-algèbre finie étale, et par transitivité, il en est de même de C.

C n'est pas une A-algèbre monogène car ce n'est pas une B-algèbre monogène : en effet, C est un B-module localement libre de rang 2 ; si C était monogène, ce serait un B-module libre, et on aurait $C \xrightarrow{\sim} B^2$, donc

$$\Lambda^2 C \xrightarrow{\sim} \Lambda^2 (B^2) \xrightarrow{\sim} B.$$

Comme $\Lambda^n (E \oplus F) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (\Lambda^p E) \otimes (\Lambda^q F)$, on a aussi :

$$\Lambda^2 C \xrightarrow{\sim} \Lambda^1 B \otimes_B \Lambda^1 I \xrightarrow{\sim} I,$$ et I serait monogène.

Remarques.

(i) Nous n'avons pas réussi à trouver de contre-exemple en caractéristique 0, ce qui conserve l'intérêt du premier contre-exemple ;

(ii) Si l'on suppose, dans le second contre-exemple, que car $k=o$, on obtient toujours que C est une B-algèbre étale non monogène ; en outre, dans ce cas, B est un anneau de Dedekind, car la courbe d'équation $x^2 - y(y^2 - 1)$ n'a pas de point singulier. D'où un contre-exemple avec un anneau de Dedekind, en caractéristique résiduelle 0.

§ 5. UNE APPLICATION.

Lemme. Soient A un anneau intègre, B une A-algèbre plate. Si M est A-module sans torsion, $M \otimes_A B$ est un B-module sans torsion.

Par passage à la limite inductive, on peut supposer que M est de type fini. M est alors un sous-module d'un A-module libre de type fini L : l'hypothèse de platitude entraîne que $M \otimes_A B$ est un sous-module du B-module libre $L \otimes_A B$, d'où le résultat.

Proposition 5. Soient un anneau qui est un produit fini d'anneaux intègres et intégralement clos, B une A-algèbre finie sans torsion.

Alors, si $\Omega_{B/A}$ est un B-module ponctuellement monogène, B est un A-module projectif.

Preuve : Il est clair qu'on peut supposer A intègre et intégralement clos, toutes les propriétés se vérifiant sur chaque composante. Dans ce cas, il suffit ([3]) de montrer que $A \to B$ est plat ; pour cela, on peut, d'après le lemme, supposer A local et hensélien. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, $B_{\mathfrak{m}}$ est alors une A-algèbre finie monogène, et on peut supposer B locale.

Soient x un générateur de B, K le corps des fractions de A, F le polynôme minimal de x sur K ; comme A est intégralement clos, $F \in A[X]$; posons $C = A[X]/_{(F)}$, $I = \mathrm{Ker}\,(C \to B)$. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I\otimes_A K & \longrightarrow & C\otimes_A K & \longrightarrow & B\otimes_A K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $I\otimes_A K = 0$, $I = 0$ et B est libre sur A.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI : Algèbre. Chap. II (Hermann)

[2] N. BOURBAKI : Algèbre commutative. Chap. VII (Hermann)

[3] C.U. JENSEN : : A Remark on flat and projective modules. Canad. J. Math. 18 (1966) pp. 943-949.

[4] L. MAILHOS : Algèbres commutatives ponctuellement de type fini sur un anneau semi-local hensélien. (Bull. des Sci. Math. - 94 (2) Avril-Juin 1970)

[5] M. RAYNAUD : Anneaux locaux henséliens. Lecture Notes in Mathématics n° 169 (Springer-Verlarg)

[6] ZARISKI-SAMUEL : Commutative Algebra. T.1 (Van Nostrand)