PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE CREPEL

Convergence de μ sur un groupe abélien et sur un groupe nilpotent discret

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 3
« Séminaires de probabilité », , p. 12-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___3_12_0>

CONVERGENCE DE μ^n SUR UN GROUPE ABELIEN ET SUR UN GROUPE NILPOTENT DISCRET

Par P. CREPEL (*)

Laboratoire de Probabilités - ERA 250 C.N.R.S. - RENNES

- G est, dans la première partie, un groupe abélien localement compact, et, dans la seconde, un groupe nilpotent discret.

- μ désigne une probabilité sur G. On dira que μ est <u>apériodique</u> si son support S_μ n'est porté par aucun sous-groupe fermé propre de G.
  On dira que μ est strictement apériodique si S_μ n'est porté par aucune classe d'un sous-groupe fermé distingué propre de G.

- On confondra les mesures finies absolument continues par rapport à la mesure de Haar avec leur densité. Par exemple $\nu \in L_0^1(G)$ signifie que ν est finie, $\nu << m$ et $\nu(G) = 0$.

- L'objet de cet exposé est de démontrer la convergence en norme L^1 de $\|\mu^n * \nu\|_1$ vers 0 lorsque μ est strictement apériodique et lorsque $\nu \in L_0^1(G)$.
  L'exposé est, dans sa première partie, la reproduction fidèle de la démonstration de Foguel [1] ; et, dans sa deuxième partie, une adaptation de cet article de Foguel inspirée des méthodes introduites par Y. GUIVARC'H dans sa thèse (cf. [3]) . On retrouve ainsi, de manière simple, un cas particulier d'un résultat démontré dans [3].

(*) Exposé fait au séminaire KGB - Rennes des 18 et 25/10/73

ITEREES D'UNE MESURE SUR UN GROUPE ABELIEN

d'après

S.R. FOGUEL [1]

I. Rappels sur les caractères et l'analyse harmonique

G groupe localement compact abélien

Γ groupe des caractères (i.e. homomorphismes continus de G dans $\mathbb{T}$).

- L'algèbre $L^1(G)$ et les caractères (i.e. transformation de Fourier)

Soit $\nu \ll m$ finie :

$$\nu \longmapsto \hat{\nu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\, \nu(dx) ,$$

$$L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un homomorphisme d'algèbre continu pour la norme de L^1

(γ étant un caractère fixé).

On les obtient tous comme ça.

- Idéaux et caractères

$\gamma \in \Gamma$ fixé; $\{\nu \ll m \,/\, \hat{\nu}(\gamma) = 0\}$ est un idéal (facile) maximal (difficile).

Chaque caractère correspond à un idéal maximal de $L^1(G)$.

Théorème : Loomis p. 151, version simplifiée : [5]

> Si $\mathcal{a}$ est un idéal fermé de $L^1(G)$, s'il est contenu dans un seul idéal maximal $\mathcal{a}_1$, alors $\mathcal{a} = \mathcal{a}_1$

Dans la suite, G est un groupe abélien localement compact, et μ est une mesure de probabilité sur G.

II - Théorème :

Si μ est strictement apériodique, si $\nu << m$ ($\frac{d\nu}{dm} \in L^1$), alors

$$\|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0 \iff \nu(G) = 0$$

CN $|\nu(G)| = |(\mu^n * \nu)(G)| \leq \|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0$

(Rem : ceci est d'ailleurs vrai pour tout opérateur markovien :

si $f \in L^1$: $|\langle f,1\rangle| = |\langle fP^n,1\rangle| \leq \|fP^n\|_1$)

CS Soit $\mathcal{A} = \{\nu << m \,/\, \|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0\}$

$\mathcal{A}_1 = \{\nu << m \,/\, \nu(G) = 0\}$

On sait déjà que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$, et on veut démontrer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

Pour cela, en utilisant le rappel (n° I), il suffit de voir que $\mathcal{A}_1$ est le seul idéal maximal qui contient $\mathcal{A}$. En d'autres termes, il suffit de voir que $\gamma_0(.) \equiv 1$ est le seul caractère qui s'annule sur $\mathcal{A}$ (puisque l'idéal maximal associé à $\gamma_0(.) \equiv 1$ est précisément $\mathcal{A}_1$:

$$\hat{\lambda}(\gamma_0) = \int_G \lambda(dx) = \lambda(G)).$$

Lemme :

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs qui commutent (sur un espace de Banach E) alors $\forall\, \alpha, \beta \geq 0$ $\alpha+\beta = 1$, on a $\|(\alpha P_1+\beta P_2)^n (P_1-P_2)\| \longrightarrow 0$

Démonstration : [2]

On peut d'abord supposer $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (sinon prendre :

P'_1 : $2\alpha P_1 + (1-2\alpha) P_2$, en supposant $\alpha < \frac{1}{2}$, et se ramener au cas $\frac{1}{2}$).

Maintenant

$$\left\|\left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)^n (P_1-P_2)\right\| = \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_1^k P_2^{n-k} (P_1-P_2)\right\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} |C_n^k - C_n^{k-1}|.$$

Or cette dernière quantité A vaut (si n est pair) deux fois $C_n^{n/2}$, d'où :

$$\|\ \| \sim \frac{K}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad ▨$$

Suite de la démonstration de la CS :

- On déduit du lemme que

$\forall A \quad 0<\mu(A)<1, \quad \|\mu^n * (\mu_1-\mu_2)\| \longrightarrow 0$ où $\mu_1 = \dfrac{\mu|_A}{\mu(A)} \quad \mu_2 = \dfrac{\mu|_{A^c}}{\mu(A^c)}$

d'où en faisant la différence $\mu_1-\mu_2 = \dfrac{\mu|_A-\mu\mu(A)}{\mu(A)(1-\mu(A))}$:

$$\mu|_A - \mu\mu(A) \in \mathfrak{a}$$

Il en est de même de $[\mu|_A - \mu\mu(A)] * \tau \qquad \forall \tau << m$ ($\mathfrak{a}$ est un idéal).

- Soit maintenant γ un caractère qui s'annule sur $\mathfrak{a}$, alors

$$[\hat{\mu}|_A(\gamma) - \mu(A)\hat{\mu}(\gamma)] \cdot \hat{\tau}(\gamma) = 0 \qquad \forall \tau << m$$

donc (puisque pour au moins un τ, $\hat{\tau}(\gamma)$ doit être différent de 0) :

$$\hat{\mu}|_A(\gamma) = \mu(A)\,\hat{\mu}(\gamma)$$

ou

$$\int_A \underset{\Pi=1}{\gamma(-x)}\,\mu(dx) = \mu(A)\int_G \gamma(-x)\,\mu(dx)$$

ce qui implique que $\gamma(-x) = \mu(\gamma)$ pour $x \in \text{Supp}\,\mu$

Or $\{\gamma(.) = \hat{\mu}(\gamma)\}$ est une classe du sous-groupe fermé $\{\gamma(.) = 1\}$

L'hypothèse de stricte apériodicité entraîne donc que $\gamma(.) = C^{te}$, et cette constante est 1, ce qu'on voulait démontrer. ▨

Définition : f μ-harmonique $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_G f(x-y)\mu(dy) = f(x)$ (m.p.s.).

Corollaire (Lemme de Choquet-Deny)

Si μ est apériodique, toutes les foctions μ-harmoniques bornées sont constantes p.s.(m).

Démonstration :

- Supposons d'abord μ strictement apériodique :

Soit $f \in L^\infty(G)$, il suffit de démontrer que $\forall \nu << m$, on a $\nu * f = 0$, ce qui résulte de :

$$|\nu*f| = |\nu*\mu^n*f| \leq \|f\|_\infty \, \|\nu\times\mu^n\| \longrightarrow 0.$$

- Si μ est apériodique, maintenant, on se ramène au cas précédent en remarquant que $p = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^n}{2^n}$ est strictement apériodique :

alors f μ-harmonique $\Longrightarrow$ f p-harmonique $\Longrightarrow$ $f = C^{te}$ m.p.s.

ITEREES D'UNE MESURE SUR UN GROUPE NILPOTENT DISCRET

Définition : Soit G un groupe, on notera G^1 le groupe engendré par les

$$\{xy\, x^{-1}\, y^{-1} \;/\; x \in G,\ y \in G\} \;:\quad G^1 = [G,G]$$

puis $G^2 = [G,G^1]$ .... $G^n = [G,G^{n-1}]$.

On dira que G est nilpotent de classe r si pour un r, $G^r = \{e\}$.

Alors G^{r-1} est contenu dans le centre, les G^{n-1}/G^n sont des groupes abéliens... En particulier, si r=2, G^1 est dans le centre de G (exemple : le groupe des matrices triangulaires sur $\mathbb{R}^3$).

Théorème :

Soit μ une probabilité strictement apériodique sur un groupe nilpotent discret G, alors pour tout $\nu \in L^1_0(G)$, on a

$$\|\mu^n * \nu\|_1 \longrightarrow 0$$

Remarque : Nous démontrerons ce théorème dans le cas où G est de classe 2. La démonstration s'étend par récurrence facilement au cas général.

Démonstration : Elle se fait en plusieurs étapes dont la principale est le lemme suivant (qui est évidemment un cas particulier du théorème, puisque $\varepsilon_e - \varepsilon_c \in L^1_0(G)$ (G étant discret)).

Lemme 1 : $\forall\, c \in G^1 \qquad \|\mu^n * (\varepsilon_e - \varepsilon_c)\|_1 \longrightarrow 0.$

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en la démonstration du théorème, en quelques étapes :

* $\underline{\|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0 \qquad \forall\, \nu \in L^1_0(G^1).}$

En effet, il est facile de voir que si $\nu \in L^1_0(G^1)$, on peut écrire $\nu = \sum_{c \in G^1} a_c\, (\varepsilon_e - \varepsilon_c)$ avec $a_c \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite d'écrire que

$$\|\mu^n * \nu\|_1 \leq \sum_{c \in G^1} |a_c| \; \|\mu^n * (\varepsilon_e - \varepsilon_c)\|_1$$

ε étant donné, ν étant une mesure finie, et $\tau \longrightarrow \mu^n * \tau$ étant une contraction de L^1, on a :

$$\|\mu^n * \nu\|_1 < \sum_{c \in I} |a_c| \; \|\mu^n * (\varepsilon_e - \varepsilon_c)\|_1 + \sum_{c \in I^c} |a_c|$$

où l'on peut choisir la partie finie I de G^1 de manière que $\sum_{c \in I^c} |a_c| < \frac{\varepsilon}{2}$, puis (I étant fixé) N assez grand pour que $\forall\, n > N$, le premier terme soit $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$*$ $\underline{\|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0 \qquad \forall\, \nu \in L^1_0(G,G^1)}$

$\left[L^1_0(G,G^1)\right.$ désigne l'ensemble des mesures finies d'intégrale nulle sur chaque classe de $\left.G^1\right]$.

En effet, il suffit de remarquer que si $\nu \in L^1_0(G,G^1)$, on peut écrire $\nu = \sum_{x \in G} (\nu_x * \varepsilon_x)$ où $\nu_x \in L^1_0(G^1)$ $(\forall x)$, et de raisonner comme ci-dessus.

$*$ $\underline{\|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0 \qquad \forall\, \nu \in L^1_0(G)}$

Remarquons d'abord pour cela que $L^1_0(G/G^1) = L^1_0(G) / L^1_0(G,G^1)$ (G^1 est dans le centre et G/G^1 est abélien). Ce résultat est facile à vérifier. μ étant strictement apériodique sur G/G^1, il en est de même de sa projection $\overline{\mu}$ sur G/G^1, et on peut appliquer le théorème de Foguel (cas abélien) à $\overline{\mu}$ et G/G^1 ; on a donc :

$$\begin{cases} \|\mu^n * \nu\| \longrightarrow 0 & \forall\, \nu \in L^1_0(G,G^1) \\ \|\mu^n * \tau\| \longrightarrow 0 & \forall\, \tau \in L^1_0(G/G^1) \end{cases}$$

Le théorème sera donc démontré si on applique le lemme élémentaire suivant sur les espaces de Banach à $E = L^1_0(G)$ et $F = L^1_0(G,G^1)$:

Lemme 2 :

Si T est une contraction de E qui laisse stable F, et si $(T|_F)^n$ et $\overline{T}^n$ (sur E/F) convergent simplement vers 0, alors il en est de même pour T^n (sur E).

Démonstration : Cf [3]

Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on veut rendre $\|T^n x\| < \varepsilon$, ce qui est facile : fixons d'abord p assez grand pour que $\|\overline{T}^p \overline{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, on peut alors trouver $y \in F$ (par définition de la norme dans l'espace quotient) tel que $\|T^p x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors :

$$\|T^{m+p}x\| \leq \|T^m(T^p x-y)\| + \|T^m y\|$$

est inférieur à ε pour m assez grand, puisque, pour le premier morceau, T^m est une contraction, et que pour l'autre $(T|_F)^m$ converge vers 0. ▨

Moyennant le lemme 1, le théorème est donc démontré.

Démonstration du lemme 1 :

- Remarquons d'abord qu'il suffit de vérifier le lemme 1 pour tout c appartenant à un système de générateurs S de G^1

  En effet $\|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_c)\| \longrightarrow 0 \implies \|\mu^n*(\varepsilon_{c^{-1}}-\varepsilon_e)\| \longrightarrow 0$

  $$\left.\begin{array}{l} \text{et } \|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_{c_1})\| \longrightarrow 0 \\ \|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_{c_2})\| \longrightarrow 0 \end{array}\right| \implies \begin{array}{l} \|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_{c_1c_2})\| \leq \|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_{c_1})\| \\ \qquad + \|\mu^n*(\varepsilon_e-\varepsilon_{c_2})*\varepsilon_{c_1}\| \longrightarrow 0 \end{array}$$

  Quitte à montrer que sous l'hypothèse "μ strictement apériodique", $S = \{xy\,x^{-1}\,y^{-1} / x, y \in S_\mu\}$ engendre bien G^1, il suffit de prouver le lemme pour $c \in S$.

- S engendre G^1

  Soit G' le sous-groupe engendré par S, il est évident que $G' \subset G^1$ est contenu dans le centre, donc distingué.

μ est apériodique, donc S_μ engendre G ; il en est donc de même de $S_{\bar\mu}$ sur G/G' (où $\bar\mu$ est la projection de μ sur G/G').

Mais, par construction et par définition de G', deux éléments de $S_{\bar\mu}$ commutent. Donc G/G' est abélien, ce qui implique que $G' = G^1$, puisque G^1 est le groupe de commutateurs.

- Pour tout $c \in S$, il existe deux mesures positives $\alpha_c \neq 0$ et β_c dont la somme des masses est 1, telles que :

$$\mu^2 = \alpha_c * \frac{\varepsilon_e+\varepsilon_c}{2} + \beta_c$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{cases} u = cv & \text{où} \quad u=xy \\ v = ev & \phantom{\text{où}} \quad v = yx \end{cases} \qquad x,y \in S_\mu$$

u et v sont donc dans S_{μ^2} $\quad (\mu^2(\{u\}) > 0 \;\text{ et }\; \mu^2(\{v\}) > 0)$

et par suite :

$$\begin{cases} \mu^2 = a\,\varepsilon_c * \varepsilon_v + \beta \\ \mu^2 = a'\varepsilon_e + \varepsilon_v + \beta' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a,a' \in \mathbb{R}^{+*} \\ \beta,\beta' \text{ mesures} \geqslant 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\mu^2 = \varepsilon_v * \dfrac{a\varepsilon_c+a'\varepsilon_e}{2} + \beta + \beta'$

d'où le résultat.

- $\forall\, c \in S \qquad \|\mu^n * (\varepsilon_e-\varepsilon_c)\|_1 \longrightarrow 0$

Il suffit de voir que $\forall\, c \in S$:

$$\left\| \left(\alpha_c * \frac{\varepsilon_e+\varepsilon_c}{2} + \beta_c\right)^n * (\varepsilon_e-\varepsilon_c) \right\|_1 \longrightarrow 0$$

S étant inclus dans le centre de G, le résultat est un cas particulier du lemme suivant :

<u>Lemme 3</u> :

Soit E un espace normé. Si P_1, P_2, Q et R sont des contractions de E telles que P_1 et P_2 commutent entre elles et avec Q et R, alors

$$\forall\, a \in \,]0,1] \qquad \left\| \left[a\, Q\, \frac{P_1+P_2}{2} + (1-a)\, R \right]^n (P_1-P_2) \right\| \longrightarrow 0.$$

<u>Démonstration</u> : Soit A_n l'opérateur entre $\| \; \|$, on a

$$\|A_n\| = \sum_{k=o}^{n} \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)^k (P_1-P_2) \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_p=k \\ j_1+\ldots+j_p=n-k}} Q^{i_1} R^{j_1} \ldots Q^{i_p} R^{j_p} \,.\, a^k (1-a)^{n-k}$$

d'où $\|A_n\| \leq \sum_{k=o}^{n} C_n^k \, a^k \, (1-a)^{n-k} \, \varepsilon_k$ où $\varepsilon_k = \left\| \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)^k (P_1-P_2) \right\|$

(puisque $\|Q\| \leqslant 1$ et $\|R\| \leqslant 1$).

Comme ε_k tend vers 0 (d'après le lemme de Foguel), $\|A_n\|$ tend aussi vers 0, comme il est facile de le voir :

en effet, soit $\varepsilon > 0$, pour $k > N$: $\varepsilon_k < \varepsilon$, d'où

$$\|A_n\| \leq \sum_{k=o}^{N} C_n^k \, a^k \, (1-a)^{n-k} \underbrace{\varepsilon_k}_{<1} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k \, a^k \, (1-a)^{n-k}}_{\leqslant 1} \varepsilon$$

et N étant fixé, pour k donné, on a $C_n^k (1-a)^{n-k} \longrightarrow 0$, il suffit alors de prendre n assez grand.

(N.B. Il y a dans [4] une démonstration probabiliste élégante de $\sum_{k=o}^{n} C_n^k \, a^k \, (1-a)^{n-k} \, \varepsilon_k \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon_k \longrightarrow 0$). ▨

<u>Remarques</u> :

- Comme on l'a dit plus haut, ce résultat se démontre de proche en proche pour G nilpotent discret de classe quelconque.

- Si G n'est pas discret, le résultat général n'est pas connu pour une probabilité μ strictement apériodique quelconque.

  Guivarc'h a néanmoins obtenu ce résultat dans [3] pour trois cas :

  * G de classe 2
  * G de classe quelconque et μ étalée (i.e., pour un n, μ^n non étranger à m)
  * G de classe quelconque et μ admettant un moment fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.R. FOGUEL : On iterates of convolutions (à paraître)

[2] S.R. FOGUEL, B. WEISS : On convex power series of a conservative Markov operator (Proc. Amer. Math. Soc. 38-2. Avril 1973, p. 325-30).

[3] Y. GUIVARC'H : Extension d'un théorème de Choquet-Deny à une classe de groupes non abéliens (Astéristique n° 4, S.M.F. 1973).

[4] G. LETAC, M. METIVIER : Les théorèmes de renouvellement de D. Ornstein (U.E.R. Math. Informatique Université de Rennes (France)).

[5] L.H. LOOMIS : An introduction to abstract harmonic analysis Van Nostrand (1953).