S. ALINHAC

Problèmes de Cauchy hyperboliques singuliers

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n^o 5, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A5_0>

PROBLEMES DE CAUCHY HYPERBOLIQUES SINGULIERS.

par

S. ALINHAC

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions d'une classe de problèmes de Cauchy hyperboliques singuliers.

Les domaines de définition des fonctions et des opérateurs sont des ouverts du demi-espace $t > 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ (dont un point a pour coordonnées : $(x_1,\dots,x_n,t) = (x,t)$).

Plus précisément, on envisage les deux cas suivants :

(i) le domaine de travail est la bande $\beta = \{(x,t),\ o < t < T\}$, éventuellement le demi-espace supérieur tout entier.

(ii) le domaine est limité par un ouvert borné singulier Ω de R^n_x et par une surface S régulière au-dessus de Ω, s'appuyant sur $\partial\Omega$:

$$\exists\ \varphi \in C^1(\bar{\Omega}),\ d\varphi \neq 0, \text{ telle que :}$$

$$\varphi > 0 \text{ dans } \Omega,\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\quad S = \{(x,t),\ x \in \bar{\Omega},\ t = \varphi(x)\}$$

On étudie dans ces domaines des systèmes hyperboliques singuliers de la forme :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B}{t},$$

où A_i et B sont des matrices (p x p), variables, complexes B bornée, les A_i bornées ainsi que leurs dérivées premières. L'hypothèse d'hyperbolicité porte sur la "partie principale" :

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

$\tilde{L}$ est choisie hyperbolique symétrisable dans la direction du vecteur de coordonnées (0,...,0,1), en tout point du domaine (pour les définitions, cf. [1]).

Le type de la singularité choisie est celui qui apparait lorsqu'on écrit une équation différentielle du type de Fuchs sous forme de système.

Pour des équations ayant une singularité plus forte (en $\frac{1}{t^\lambda}$, $\lambda > 1$) on peut construire (à une variable et, dans la plupart des cas simples, à n variables) une solution u indéfiniment différentiable de $Lu = 0$, plate sur l'hyperplan $t = 0$, ce qui semble exclure la possibilité d'un problème bien posé dans des espaces à poids de type t^μ , $\mu \in \mathbb{R}$, construits sur L^2.

La méthode employée consiste à établir des inégalités d'énergie pour L et son adjoint formel $L^{(*)}$ (considérés comme des opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert) à l'aide d'intégrations par parties.

Les espaces envisagés sont du type L^2_μ (les fonctions f pour lesquelles $t^\mu f \in L^2$) ; une fonction de L^2_μ , d'image nulle par L, n'est elle-même nécessairement nulle que si $\mu < \mu_0(\tilde{L}, R)$, comme on l'a déjà noté dans un cas particulier [5]. Cela justifie, étant admis le cadre hilbertien de travail, l'introduction de poids en vue d'obtenir un problème bien posé (dans un cadre analytique, des résultats complets pour des opérateurs du même type, mais à coefficients analytiques, sont obtenus dans [7]).

Les intégrations par parties, où intervient le symétriseur R de L, qui est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, s'effectuent selon les techniques de [1].

Il n'est alors naturellement pas possible, dans le cas le plus général, d'obtenir des inégalités exactes ; seules sont obtenues des inégalités souffrant un nombre fini d'exceptions.

On obtient, en désignant par $\overline{L_\mu}$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ des fermetures convenables de L et $L^{(*)}$ considérés comme opérateurs non bornés dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$ et $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}$ respectivement, le théorème principal

$\exists\, \mu_0 \in R$ tel que si $\mu < \mu_0$,

$\overline{L_\mu}$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ sont à indice.

Dans de nombreux cas particuliers, on obtient des isomorphismes et il est parfois possible de préciser μ_o à sa valeur optimale.

Les questions de régularité ne sont pas abordées dans le cas général. Elles ne sont envisagées qu'incidemment dans le cas particulier simple où A_i et B ne dépendent que de t, en vue de montrer l'usage que l'on peut faire du théorème principal, "asymptotique", pour obtenir des résultats dans la classe C^∞ (D_{L^2} dans une bande). Les théorèmes 3) et 4) précisent dans quelle mesure on peut, pour ces opérateurs, bien poser le problème de Cauchy en termes d'images et de traces sur $t = 0$.

En particulier, ils fournissent des éléments de réponse au problème posé par J.L. LIONS, à la fin de [2].

I. GENERALITES : NOTATIONS ; RESULATS.

1) Domaines : On note, pour le cas (i)

$$\beta = \{(x,t),\ 0 < t < T\}\ ,\ \beta_i = \{(x,t),\ t=o\},\ \beta_s = \{(x,t),\ t=T\}.$$

en outre, pour $T > \varepsilon > 0$, $\beta_\varepsilon = \{(x,t),\ \varepsilon < t < T\}$.

Pour le cas (ii) : S est définie plus haut ; on désigne par

$$D = \{(x,t),\ x \in \Omega,\ 0 < t < \varphi(x)\},\ D_\varepsilon = \{(x,t),\ x \in \Omega,\ \varepsilon < t < \varphi(x)\}\ .$$

2) Opérateurs :

On étudie, dans β ou D, des systèmes du premier ordre du type

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B(x,t)}{t}\ ,$$

B bornée, les A_i bornées ainsi que leurs dérivées premières. On pose :

$$L^{(*)} = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i^H + \frac{B^H}{t}$$ (où M^H désigne la transposée hermitienne de la matrice M) ; $L^{(*)}$ est appelé "adjoint formel" de L.

On note $a(x,t,\xi,\tau) = \tau\ \mathrm{id} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)\ \xi_i$; $\tilde{L}$ est hyperbolique symétrisable signifie qu'il existe un symbole $r(x,t,\xi,\tau)$ d'ordre 0 et de degré 2 (i.e. $D^{\alpha}_{x,t}\, D^{\beta}_{\xi,\tau}\, r \in O(-|\beta|)$ pour tous multi indices α,β, $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 2$) qui symétrise la matrice a, soit :

$r\,a = a^H\, r^H$, avec les propriétés supplémentaires :

s_1) $r + r^H > \alpha_o I$, où α_o est un nombre positif fixe.

s_2) $r(x,t,\xi,\tau) \longrightarrow r_\infty(x,t,\xi)$ lorsque $\tau \longrightarrow \pm\infty$, et $r - r_\infty$ est d'ordre 0 en $\dfrac{|\xi|}{|\tau|}$.

s_3) $r(x,t,\xi,\tau)$ se prolonge analytiquement en τ dans $\mathbb{C}$.

En fait, il est montré dans [1] que l'existence d'un tel symétriseur "spatial" implique celle d'un symétriseur "de surface" $r(x,\xi)$ ayant la propriété s_1).

C'est ce dernier, noté $r(x,\xi)$, que nous emploierons désormais dans les calculs.

3) Prédomaines des opérateurs L et $L^{(*)}$:

Pour $\mu \in R$, on pose, dans le cas d'une bande,

$D_\mu = \{u \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}\,([0,T]\ ,\ L^2(R^n_x))$, u continue sur $]0,T]$, et ,

pour $|\alpha| = 1$, $D^\alpha u \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}\,(\beta)\}$, et

$D^{(*)}_\mu = \{v \in L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}\,([0,T],\ L^2(R^n_x))$, v continue sur $]0,T]$

$v(T) = 0$ et, pour $|\alpha| = 1$, $D^\alpha\, v \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}\,(\beta)\}$.

On note L_μ (resp. $L^{(*)}_\mu$) les opérateurs de domaines D_μ (resp. $D^{(*)}_\mu$) dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$) définis par :

$u \in D_\mu$, $L_\mu\, u = Lu$

(resp. $v \in D^{(*)}_\mu$, $L^{(*)}_\mu\, v = L^{(*)}\, v$).

On verra plus loin (cf. II) que les graphes de L_μ (resp. $L^{(*)}_\mu$) dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta) \times L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta) \times L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}$) ont pour adhérences dans ces espaces produits des graphes fonctionnels ; on note alors $\overline{L_\mu}$ (resp. $\overline{L_\mu^{(*)}}$) les opérateurs, de domaines $\overline{D_\mu}$ (resp. $\overline{D_\mu^{(*)}}$), qui ont pour graphes, ces adhérences.

4° <u>Enoncé du résultat principal</u> :

$\exists\, \mu_o \in R$ tel que, si $\mu < \mu_o$,
$\overline{L_\mu}$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ sont à indice.

Les calculs détaillés prouvant ce résultat sont fournis en II) et III) dans le cas d'une bande ; ils sont esquissés (étant analogues) en IV dans le cas d'un domaine noté D.

II. <u>UNE FORMULE DE GREEN POUR</u> L_μ <u>et</u> $L_\mu^{(*)}$.

1) On établit, pour $u \in D_\mu(\beta)$ et $v \in D_\mu^{(*)}(\beta)$, la formule

$$(L_\mu\, u,v)_\beta = (u, L_\mu^{(*)} v)_\beta \ .$$

<u>Preuve</u> : Soit $\varepsilon > o$; on intègre par parties $(L_\mu\, u,v)_{\beta_\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$(L_\mu\, u,v)_{\beta_\varepsilon} = (t^{\frac{\mu+1}{2}} L_\mu\, u, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} = (t^{\frac{\mu-1}{2}} u,\, B^H t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} +$$
$$+ (t^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t},\, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} (t^{\frac{\mu+1}{2}} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i},\, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} \ .$$

Or, $\frac{\partial}{\partial t}(t^{\frac{\mu+1}{2}} u) = t^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu+1}{2} t^{\frac{\mu-1}{2}} u$, d'où $(L_\mu\, u,v)_{\beta_\varepsilon} =$

$$= (L(t^{\frac{\mu+1}{2}} u),\, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} - \frac{\mu+1}{2} (t^{\frac{\mu-1}{2}} u,\, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} \ .$$

Le premier terme écrit s'intègre par parties et vaut

$$(t^{\frac{\mu-1}{2}} u, t\, L^{(*)}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v))_{\beta_\varepsilon} + \underbrace{(u,v)_{\beta_S}}_{o} - (u,v)_{t=\varepsilon} .$$

Or $$\frac{\partial}{\partial t}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v) = -\frac{\mu+1}{2} t^{-\frac{\mu+1}{2}-1} v + t^{-\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t} \ , \text{ d'où}$$

$$(t^{\frac{\mu-1}{2}} u, t\, L^{(*)}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v))_{\beta_\varepsilon} = \frac{\mu+1}{2} (t^{\frac{\mu-1}{2}} u,\, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\varepsilon} + (t^{\frac{\mu-1}{2}} u,\, t^{-\frac{\mu-1}{2}} L^{(*)} v)_{\beta_\varepsilon}$$

Soit enfin $(L_\mu\, u,v)_{\beta_\varepsilon} = (u, L_\mu^{(*)} v)_{\beta_\varepsilon} - (u,v)_{t=\varepsilon}$.

La fonction $\varphi : \varepsilon \longmapsto |(u,v)|_{t=\varepsilon}$ est telle que

$$\int_0^T \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon < +\infty, \text{ car } \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \left\|\varepsilon^{\frac{\mu-1}{2}} u\right\|_{L^2(R^n_x)} \left\|\varepsilon^{-\frac{\mu+1}{2}} v\right\|_{L^2(R^n_x)} ;$$

il existe donc une suite $\varepsilon_n \underset{>}{\longrightarrow} o$ telle que $\varphi(\varepsilon_n) \longrightarrow 0$. En donnant à ε les valeurs ε_n dans la formule précédente et en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $(L_\mu u,v) = (u, L_\mu^{(*)} v)$.

2) Une conséquence immédiate de 1) est la suivante :

Si $(0,W)$ est adhérent, au sens de $L^2_{\frac{\mu-1}{2}} \times L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu+1}{2}} \times L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}$) au graphe de L_μ (resp. $L_\mu^{(*)}$), alors $W = 0$.

Cela permet de définir $\overline{L}_\mu$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$, comme annoncé en I), 3), et l'on a :

$$\forall\, u \in \overline{D}_\mu \;,\; \forall\, v \in \overline{D_\mu^{(*)}} \;,\; (\overline{L}_\mu\, u,v) = (u, \overline{L_\mu^{(*)}}\, v).$$

III. INEGALITES D'ENERGIE (CAS D'UNE BANDE) :

On note R l'opérateur (tengentiel) de symbole r, et u une fonction de $D_\lambda\,(\beta)$ $(\lambda \in R)$.

1) Identité quadratique de base :

On l'obtient en intégrant "à demi" par parties l'expression $(R\, t^{\frac{\lambda+1}{2}} \tilde{L}\, u,\; t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\varepsilon}$, puis en faisant tendre convenablement ε vers zéro (cf. II.1).

En effet, $\quad t \dfrac{\partial}{\partial t}(t^{\frac{\lambda-1}{2}} u) = \dfrac{\lambda-1}{2}\, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u + t^{\frac{\lambda+1}{2}} \dfrac{\partial u}{\partial t}$, d'où $(R\, t^{\frac{\lambda+1}{2}} \dfrac{\partial u}{\partial t},\; t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\varepsilon} +$

$$\sum_{i=1}^n (R\, A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\, t^{\frac{\lambda+1}{2}} u,\; t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)\,\beta_\varepsilon = -\frac{\lambda-1}{2}\,(R\, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u,\; t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\varepsilon} +$$

$$+\, (R\, t \frac{\partial}{\partial t}(t^{\frac{\lambda-1}{2}} u) + \sum_{i=1}^n R\, t\, A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u,\; t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\varepsilon}.$$

On note T le dernier terme écrit, $v = t^{\frac{\lambda-1}{2}} u$, et on intègre T par parties :

$$T = (\frac{\partial v}{\partial t}, t R^* v)_{\beta_\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial v}{\partial x_i}, t A_i^H R^* v)_{\beta_\varepsilon}$$

$$T = -(v, \frac{\partial}{\partial t} (t R^* v))_{\beta_\varepsilon} - \sum_{i=1}^{n} (v, \frac{\partial}{\partial x_i} (t A_i^H R^* v))_{\beta_\varepsilon}$$

$$+ (R t v, v)_{\beta_s} - (R t v, v)_{t=\varepsilon}$$

$$T = -(v, \left[t R_t^* + \sum_{i=1}^{n} (t A_i^H R^*)_{x_i}\right] v)_{\beta_\varepsilon} - (v, R^* v)_{\beta_\varepsilon} - (R t v, \frac{\partial v}{\partial t})_{\beta_\varepsilon} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (R t A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{\beta_\varepsilon} + (R tv, v)_{\beta_s} - Rtv, v)_{t=\varepsilon}.$$

Grâce aux hypothèses faites sur A_i et R, l'opérateur Q, entre $[\ ]$ qui intervient dans le premier terme écrit est d'ordre 0.

On transforme maintenant les termes

$$(R tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} (R t A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i})$$

de façon à faire apparaitre le terme $\overline{T}$:

$$(Rtv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} (Rt A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i}) = (R^* tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} (A_i^H R^* tv, \frac{\partial v}{\partial x_i}) +$$

$$+ ((R-R^*)t v, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} ((RA_i - A_i^H R^*) tv, \frac{\partial v}{\partial x_i})$$

On utilise alors la formule

$$((R-R^*)tv, \frac{\partial v}{\partial t})_{\beta_\varepsilon} = -(\frac{\partial}{\partial t} (R-R^*)tv, v)_{\beta_\varepsilon} + ((R-R^*)tv, v)_{\beta_s} - ((R-R^*)tv, v)_{t=\varepsilon}$$

qui permet d'écrire :

$$((R-R^*)tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} ((RA_i - A_i^H R^*)tv, \frac{\partial v}{\partial x_i}) = -(Nv, v)_{\beta_\varepsilon} +$$

$$+ ((R-R^*)tv, v)_{\beta_s} - ((R-R^*)tv, v)_{t=\varepsilon}$$

où l'on a posé $N = \frac{\partial}{\partial t} (R-R^*) t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (RA_i - A_i^H R^*)t$.

Finalement :

$$T = -(v, Qv)_{\beta_\varepsilon} - (v, R^* v)_{\beta_\varepsilon} + (Nv, v)_{\beta_\varepsilon} + (R^* tv, v)_{\beta_s} - (R^* tv, v)_{t=\varepsilon} - \overline{T}$$

Soit

$$2\mathrm{Re}\,(R\,t^{\frac{\lambda+1}{2}}\tilde{L}u,\ t^{\frac{\lambda-1}{2}}u) = -\lambda\,\mathrm{Re}\,(Rv,v)_{\beta_\varepsilon} - \mathrm{Re}\,(v,Qv)_{\beta_\varepsilon} + \mathrm{Re}\,(Nv,v)_{\beta_\varepsilon}$$

$$+ \mathrm{Re}\,(R^{*}\,tv,v)_{\beta_s} - \mathrm{Re}\,(R^{*}tv,v)_{t=\varepsilon}$$

et

$$2\mathrm{Re}\,(Rt^{\frac{\lambda+1}{2}}\,Lu,\ t^{\frac{\lambda-1}{2}}u) = -\lambda\,\mathrm{Re}\,(Rv,v)_{\beta_\varepsilon} - \mathrm{Re}\,(v,Qv)_{\beta_\varepsilon} + \mathrm{Re}\,(Nv,v)_{\beta_\varepsilon}$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,(RBv,v)_{\beta_\varepsilon} + \mathrm{Re}\,(R^{*}tv,v)_{\beta_s} - \mathrm{Re}\,(R^{*}tv,v)_{t=\varepsilon}\ .$$

Il ne reste plus qu'à établir maintenant, grâce à l'hypothèse que R symétrise L, que N est d'ordre 0 : en effet, $N = N't$, et :

$$\underbrace{N' = R\tilde{L} - (R\tilde{L})^{H}}_{\substack{\cap\\ O(0)\\ \text{par hypothèse}}} + \underbrace{(R\tilde{L})^{H} - (R\tilde{L})^{*}}_{\substack{[(R\tilde{L}) - (R\tilde{L})^{R}]^{H}\\ \cap\\ O(0)}}$$

En faisant tendre ε vers 0 comme en II), 1), il vient :

$$2\,\mathrm{Re}\,(R\,t^{\frac{\lambda+1}{2}}\,Lu,\ t^{\frac{\lambda-1}{2}}u) = -\lambda\,\mathrm{Re}\,(Rv,v) + 2\,\mathrm{Re}\,(RBv,v) + \mathrm{Re}\,(N'tv,v)$$

$$- \mathrm{Re}\,(v,Qv) + \mathrm{Re}\,(R^{*}tv,v)_{\beta_s}\ .$$

Cette dernière égalité est dite "identité quadratique de base".

2) Dérivation des inégalités d'énergie à partir de l'identité quadratique.

a) Généralités : On a

$$2\,\mathrm{Re}\,(Rv,v)_{\beta} = \mathrm{Re}\,\left[(R+R^{H})v,v\right]_{\beta} + \mathrm{Re}\,\left[(R^{*}-R^{H})v,v\right]_{\beta}\ .$$

Or, l'opérateur $R^{*} - R^{H} = (R^{R} - R)^{H}$ est d'ordre -1 (vu les hypothèses faites sur R) ; en outre, $R+R^{H}$ a un symbole hermttien positif par hypothèse : peut donc s'écrire : $R+R^{H} = \Lambda + T_{-1}$, où T_{-1} est un opérateur d'ordre -1 et Λ un opérateur hermitien positif (d'après l'inégalité de Garding fine, cf. [1]).

T_{-1} étant lui-même assez régulier, peut être approché en norme par des opérateurs de rangs finis dans L^{2}.

On a donc : $2\,\mathrm{Re}\,(Rv,v)_\beta = \mathrm{Re}\,(\Lambda' v,v)_\beta + \mathrm{Re}\,(T_f\, v,v)_\beta$, où T_f est de rang fini et Λ' hermitien positif.

On opère de même pour le terme de bord :

$$\mathrm{Re}\,(t\,Rv,v)_{\beta_s} = \mathrm{Re}\,(t\,\Lambda'' v,v)_{\beta_s} + \mathrm{Re}\,(T'_f\, v,v)_{\beta_s} ,$$

où T'_f est de rang fini et Λ'' hermitien positif.

En notant P_0 l'opérateur d'ordre 0

$P_0 = N - Q^* + 2RB$, l'identité quadratique s'écrit alors :

$$2\,\mathrm{Re}\,(Rt^{\frac{\lambda+1}{2}} Lu,\ t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_\beta = -\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Re}\,(\Lambda' v,v)_\beta - \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Re}\,(T_f v,v)_\beta$$

$$+ \mathrm{Re}\,(P_0 v,v)_\beta + \mathrm{Re}\,(t\Lambda'' v,v)_{\beta_s} + \mathrm{Re}\,(T'_f v,v)_{\beta_s} .$$

b) Inégalité d'énergie pour $\overline{L}_\mu$ dans $\overline{D}_\mu$:

On choisit $\lambda = \mu$. Grâce à la positivité (stricte) de Λ', on voit alors que si $\mu < \mu_0$, et si u est dans un sous-espace de codimension finie de D_μ (où les termes $(T_f v,v)_\beta$ et $(T'_f\, v,v)_{\beta_s}$ sont nuls), on a l'inégalité :

$$(\mu_0-\mu)\,\|u\|_{L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)} \leq \mathrm{cte}\,\|L_\mu\, u\|_{L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)} .$$

Cette inégalité demeure valable pour $u \in \overline{D}_\mu$ et $\overline{L}_\mu$, pourvu que u appartienne à un sous-espace fermé de codimension finie de $\overline{D}_\mu$.

c) Inégalité d'énergie pour $\overline{L_\mu^{(*)}}$ dans $\overline{D_\mu^{(*)}}$:

On choisit $\lambda = -\mu$, puis on multiplie l'identité de base par -1 : le terme de bord est cette fois nul, et l'on obtient aisément, pour $v \in \overline{D_\mu^{(*)}}$ (sauf un nombre fini d'exceptions) et $\mu < \mu_0^*$,

$$(\mu_0^* - \mu)\,\|v\|_{L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)} \leq \mathrm{cte}\,\|\overline{L_\mu^{(*)}}\, v\|_{L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)} .$$

3) Fin de la preuve du théorème principal I.4 :

Elle repose sur les faits suivants :

$$\left(\overline{L_\mu^{(*)}}\right)^* = \overline{L}_\mu \ , \ (\overline{L}_\mu)^* = \overline{L_\mu^{(*)}} .$$

Preuve de ces identités : On montre que $(\overline{L}_\mu)^* = \overline{L_\mu^{(*)}}$, l'autre égalité se traitant par la même méthode, mais beaucoup plus aisément, grâce à l'absence de traces dans la définition de D_μ.

On sait déjà (formule de Green II.1)), que $\overline{L_\mu^{(*)}} \subset (\overline{L}_\mu)^*$. Soit donc $v \in L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ une solution faible de $(\overline{L}_\mu)^* v = f$, i.e. $\exists f \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$ telle que

$$\forall\, u \in \overline{D}_\mu(\beta),\ (u,f) = (\overline{L}_\mu u, v).$$

On se donne $T > \eta > 0$, et $\varphi(t)$ une fonction réelle test dans $]0,T]$, avec $\varphi(t) = 1$ pour $\eta \leq t \leq T$.

Alors φv est solution faible de $(\overline{L}_\mu)^* (\varphi v) = \tilde{f}$, où

$\tilde{f} = \varphi f - \varphi' v$.

Les poids ne jouent alors plus aucun rôle dans la démonstration, qui s'effectue comme dans [4], section 1. On obtient ainsi que v est continue sur $]0,T]$ à valeurs dans $H^{-1}(R^n_x)$, et $v(T) = 0$; de plus,

$$v_t \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}([0,T],\ H^{-1}(R^n_x)).$$

Si maintenant $\varphi_\varepsilon(x)$ est un régularisateur de Friedrichs horizontal, alors $v_\varepsilon = v * \varphi_\varepsilon \in D_\mu^{(*)}$, $v_\varepsilon \longrightarrow v$ dans $L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ et $L^{(*)} v_\varepsilon \longrightarrow f$ dans $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$, ce qui signifie que $v \in \overline{D_\mu^{(*)}}$ et $f = \overline{L_\mu^{(*)}}\, v$.

La preuve du théorème s'achève alors d'une façon habituelle.

Remarque : Dans le cas d'une bande, si l'opérateur tangentiel R lui-même est postif, ou si $r(x,\xi)$ ne dépend que de x seul ou de ξ seul, alors, pour $\mu < \mu_0$, $\overline{L}_\mu$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ sont des isomorphismes.

IV. CAS D'UN DOMAINE D.

a) Inégalité pour $L_\mu^{(*)}$.

Les fonctions de $D_\mu^{(*)}$ s'annulent sur S ; après prolongement de ces fonctions par zéro hors de D, on intègre par parties exactement comme en III).

b) Inégalité pour L_μ .

On ne peut l'établir, et c'est là une condition de validité du théorème principal, que si la normale extérieure à S est, en tout point de S, une direction dans laquelle $\tilde{L}$ est hyperbolique (ce qui est toujours assuré si D est assez "aplati").

On choisit une fonction C^∞ réelle non négative $\psi(t)$, telle que $\psi(t) = 0$ si $t \leq 1$, $\psi(t) = 1$ si $t \geq 2$, puis on pose

$$u_\varepsilon(x,t) = \psi(t/\varepsilon)\; u(x,t).$$

On vérifie aisément que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(D)$, et que $Lu_\varepsilon \longrightarrow Lu$ dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(D)$, lorsque $\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0$.

Soit d'autre part θ une fonction test de R^{n+1} prolongeant hors de D la fonction t.

Pour intégrer par parties, on effectue d'abord le changement de variables $x'=x$, $t' = \varphi(x) - t$, qui transforme S en une partie de $R^n_{x'}$, puis on prolonge par 0 la fonction transformée $\tilde{u}_\varepsilon$ hors du nouveau domaine $\tilde{D}$.

On calcule alors comme en III) 1), et ce faisant seuls, les commutateurs du type $[\tilde{R},\tilde{\theta}]D^\alpha$, où $|\alpha|=1$ (les $\sim$ indiquant les fonctions et opérateurs transformés dans le changement de variables) apparaissent, ce qui modifie tout au plus l'opérateur noté P_0 en III) 2) a) d'un opérateur d'ordre 0. Revenant aux coordonnées (x,t) et passant à la limite lorsque $\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0$, on achève la discussion des signes comme en III) 2) a), en notant que l'hypothèse faite sur la normale extérieure ν à S assure la positivité (au sens flou de III) 2) a)) du terme de bord sur S.

V. QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION A LA RESOLUTION DANS LES FONCTIONS REGULIERES.

On suppose dorénavant que les A_i et B sont des matrices C^∞ dépendant de t seul.

Le symétriseur tangentiel, dans le cas d'une bande, ne dépend donc que de ξ, et les inégalités obtenues en III) 2) b) et c) sont exactes (i.e. ont lieu pour tout $u \in \overline{D}_\mu$ (resp. $v \in \overline{D_\mu^{(*)}}$)).

Dans le cas d'un domaine D, on obtient des inégalités exactes lorsque r ne dépend que de x.

1) Un lemme de régularité.

On suppose $\mu < \mu_o$:

i) Si $u \in \overline{D}_\mu$, $\overline{L}_\mu\, u = f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \overline{D}_\mu$.

ii) Si $u \in \overline{D}_\mu$, $\overline{L}_\mu\, u = f$, et $\forall\, i$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$,

alors $\forall i$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \overline{D}_\mu$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$.

iii) Si $D^\alpha f \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ pour tout α, $|\alpha| \leq 2$, α tangentiel, et si

$t\,\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$,

alors $\forall i$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \overline{D}_\mu$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$,

et $t\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$.

iv) et ainsi de suite, en perdant une unité de poids en t par dérivation normale.

Preuve du lemme :

i) φ_ε étant un régularisateur horizontal, on pose :

$$u_n = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(u * \varphi_{1/n}).$$

On a : $u_n \in D_\mu$ (cela suit de la preuve de III) 3)),

et $Lu_n = \frac{\partial f}{\partial x_i} * \varphi_{1/n}$. Donc $Lu_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ lorsque $n \to +\infty$, dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$.

L'inégalité d'énergie relative à $\overline{L}_\mu$ montre que u_n est de Cauchy dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$, et converge vers $v \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$. De fait, $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions, et $v \in \overline{D}_\mu$.

ii) Suit de $Lu = f$ au sens des distributions.

iii) Suit d'une application itérée de i) et d'une dérivation de l'équation par rapport à t.

iv) On procède comme précédemment.

2) <u>Un calcul sur des développements limités.</u>

Soit $u(x,t)$ une fonction de la forme

$$u(x,t) = t^\rho (a_o(x) + \dots + t^k\, a_k(x))$$

On notera, provisoirement :

$$A_i(t) = A_i(o) + t\, A_i'(o) + \dots + \frac{t^k}{k!}\, A^{(k)}(o) + \overline{A}_i$$

$$B(t) = B(o) + \dots + \frac{t^k}{k!}\, B^{(k)}(o) + \overline{B}$$

On se propose d'écrire Lu en un développement suivant les puissances croissantes de t, avec un reste d'ordre $\rho+k$ en t.

On a :
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho t^{\rho-1}\,(a_o + \dots + t^k\, a_k) + t^\rho (a_1 + \dots + k t^{k-1}\, a_k)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = t^\rho\, \Big(\frac{\partial a_o}{\partial x_i} + \dots + t^k\, \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\Big)$$

d'où

$$Lu = t^{\rho-1}(\rho + B(o))\, a_o + \dots + t^{\rho+j}\left[(\rho+j+1+B(o))\, a_{j+1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=o}^{j} \frac{A_i^{(j-\ell)}(o)}{(j-\ell)!}\, \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i} + \sum_{\ell=o}^{j} \frac{B^{(j+1-\ell)}}{(j+1-\ell)!}\, a_\ell\right] + \dots + R\ ;$$

où j varie de 0 à k-1, et où R est le produit par $t^{\rho+k}$ d'une fonction C^∞ de t, ayant en x une régularité aisément déduite de celle des a_i.

3) <u>Théorème</u> : Soit $\rho \in R$ tel que :

$\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\rho + 1 + q$ n'est pas valeur propre de $- B(o)$.

Alors, pour toute fonction f telle que $t^{-\rho} f \in D_{L^2}(\beta)$, il existe une unique fonction u telle que $t^{-(\rho+1)} u \in D_{L^2}(\beta)$ et $Lu = f$.

<u>Preuve</u> :

a) On choisit un entier k tel que $-2(\rho+k+1)-1 < \mu_o$, puis on développe f sous la forme

$$f(x,t) = t^{\rho}(f_o(x) + tf_1(x) + \ldots + t^k f_k(x)) + \overline{f}\,(x,t).$$

Ici, les $f_i(x) \in D_{L^2}(R^n_x)$ et $\overline{f}$ est telle que

$$t^{-(\rho+k+1)}\,\overline{f} \in L^2(\beta).$$

On construit alors une solution, notée u_k, de $Lu = f$, de la façon suivante : $u_k = u'_k + u''_k$, et chacune des fonctions u'_k et u''_k est construite ainsi :

i) $u'_k(x,t)$ est prise sous la forme :

$$u'_k(x,t) = t^{\rho+1}(a_o(x) + \ldots + t^k\, a_k(x)),$$

les $a_i(x)$ étant des fonctions de $D_{L^2}(R^n_x)$ déterminées par les relations de récurrence

$$\{\left[(\rho+j+1) + B(o)\right] a_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\rho=o}^{j-1} \frac{A_i^{(j-1-\ell)}}{(j-1-\ell)!} \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i} + \sum_{\ell=o}^{j-1} \frac{B^{(j-\ell)}}{(j-\ell)!}\, a_\ell = f_j$$

où $j=o,\ldots,k$, en sorte que :

$$Lu'_k - f = -R, \text{ avec } t^{-(\rho+k+1)}\, R \in L^2(\beta).$$

ii) u''_k est l'unique élément de $\overline{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta)$ tel que

$$Lu''_k = R = f - Lu'_k\,.$$

b) Supposons alors choisi un entier $k' > k$, et soit $u_{k'} = u'_{k'} + u''_{k'}$ la solution de $Lu = f$ construite comme indiqué en a).

La fonction $v = u_k - u_{k'}$ est telle que $Lv = o$.

De plus, $u''_{k'} \in \overline{D}_{-2(\rho+k'+1)-1}(\beta) \subset \overline{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta)$, et, comme il est clair par construction

$$u'_{k'} - u'_k \in D_{-2(\rho+k+2)+1}(\beta) = D_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta), \text{ en sorte que}$$

finalement

$$v \in \overline{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta). \text{ D'où } v=0.$$

c) $u'_{k'}$ est telle que $t^{-(\rho+1)}\ u'_{k'} \in D_{L^2}(\beta)$, par construction. D'autre part, le lemme de régularité et les hypothèses faites sur f montrent que $t^{-(\rho+1)}\ u''_{k'}$ possède des dérivées horizontales de tous ordres dans $L^2(\beta)$ et des dérivées par rapport à t qui sont dans $L^2(\beta)$ jusqu'à l'ordre k'.

Donc, puisque pour tout $k' \geq k$,

$$t^{-(\rho+1)}\ u_k = t^{-(\rho+1)}\ u_{k'} = t^{-(\rho+1)}\ u'_{k'} + t^{-(\rho+1)}\ u''_{k'}\ ,$$

on a $\quad t^{-(\rho+1)}\ u_k \in D_{L^2}(\beta)$.

d) Soit $u = t^{\rho+1}v$, $v \in D_{L^2}(\beta)$, telle que $Lu = 0$.

En développant v à un ordre suffisant et en utilisant le calcul 2), puis le théorème d'unicité de III), on obtient $u = o$.

4 <u>Théorème</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λ soit valeur propre de $-B(o)$, mais qu'aucun des nombres $\lambda+1+q$, $q \in \mathbb{N}$, ne le soit.

Alors, pour tout $u_o \in D_{L^2}(\mathbb{R}^n_x)$, $u_o \in \operatorname{Ker}(\lambda+B(o))$, il existe un unique u tel que

$$t^{-\lambda}\ u \in D_{L^2}(\beta),\ t^{-\lambda}\ u\big|_{t=o} = u_o\ ,\ Lu = 0 \text{ dans } \beta.$$

<u>Preuve</u> : a) On choisit $k \in \mathbb{N}$ en sorte que $-2(\lambda+k)-1 < \mu_o$, puis l'on détermine des fonctions $a_o, \ldots, a_k$ de $D_{L^2}(\mathbb{R}^n_x)$ par les conditions $a_o = u_o$ et

$$\{\left[(\lambda+j+1) + B(o)\right] a_{j+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=o}^{j} \frac{A_i^{(j-\ell)}}{(j-\ell)!} \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i} + \sum_{\ell=o}^{j} \frac{B^{(j+1-\ell)}}{(j+1-\ell)!} a_\ell = o,$$

où $j = o, \ldots, k-1$.

De cette façon, si l'on pose $v = t^{\lambda}\,(a_o(x) + \ldots + t^k\, a_k(x))$, on a

$$t^{-\lambda}\, v\big|_{t=o} = u_o \text{ et } t^{-(\lambda+k)}\, Lv \in D_{L^2}(\beta).$$

D'après le théorème V.3), il existe w tel que $t^{-(\lambda+k+1)}\, w \in D_{L^2}(\beta)$, et $Lw = Lv$. La fonction $u = v-w$ est une solution du problème posé.

b) Soit u tel que $t^{-\lambda}\, u \in D_{L^2}(\beta)$, $t^{-\lambda} u\big|_{t=o} = o$, et $Lu = 0$.

Le calcul 2) et les hypothèses montrent que u s'annule suffisamment pour qu'on puisse conclure $u = o$.

<u>Remarque</u> : Dans certains cas (par exemple λ et $\lambda+1$ valeurs propres de $-B(o)$, mais non les autres nombres $\lambda+1+q$, $q \in \mathbb{N}_*$), on obtient des solutions du noyau avec d'autres traces que celles indiquées dans le théorème 4). Les traces imposées doivent alors vérifier les conditions de compatibilité déduites des relations de récurrence de 2).

5. Illustration des méthodes et des résultats sur un exemple.

Les opérateurs d'Euler-Poisson-Darboux.

On étudie un opérateur P du type

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{b(t)}{t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c(t)}{t^2}$$

pour lequel la matrice $(n \times n)$ $A = (a_{ij})$ est hermitienne et telle que

$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j \Big) \geq \alpha_o\, |\xi|^2$$

(où $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$, α_o un nombre positif fixe), l'inégalité ayant lieu en tout point d'un domaine D d'un type précédemment défini.

Si u est une solution régulière de $Pu = f$, en posant

$$u_o = \frac{\partial u}{\partial t}\,,\ u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\,,\ u_{n+1} = \frac{u}{t}\,,$$ on observe que

$\mathcal{U} = (u_o, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est solution de $L\mathcal{U} = \mathcal{F}$,

avec $\mathcal{F} = (f, o, \ldots, o)$, et

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & -a_{i1} \; \ldots \; -a_{in} \;\; 0 \\ \hline \vdots & \\ -1 & \bigcirc \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)}_{A_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} b & 0 & \ldots\ldots & 0 & c \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \bigcirc & & \vdots \\ & & & & 0 \\ -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \frac{1}{t}\,.$$

$i+1^{\text{ème}}$ ligne

C'est au système $L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B}{t}$ que l'on va appliquer les résultats précédents.

On peut choisir comme symétriseur $R = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \hline 0 & & \\ \vdots & A & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 1 \end{array}\right)$, car

$$- RA_i = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & a_{i1} \ldots\ldots a_{in} & 0 \\ \hline a_{1i} & & \\ \vdots & \bigcirc & \\ a_{ni} & & \\ \hline 0 & - & 0 \end{array}\right) \qquad \text{et } R + R^H > 0.$$

Lorsque l'on établit l'identité quadratique III.1) apparaissent les opérateurs $Q = t\, R_t + \sum_{i=1}^{n} t\, (A_i^H R)_{x_i}$ et $N = 0$.

Le terme de bord sur S s'écrit :

$$\mathrm{Re}\, (t\, Rv, A_\nu v)_S \ , \text{ où } A_\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i A_i \ , \ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

étant le vecteur unitaire normal à S dirigé vers l'extérieur de D. Soit

$$A_\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\ \varphi|^2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i A_i\right), \text{ où } t = \varphi(x)$$

est l'équation de S au-dessus de Ω, et $\varphi_i = \varphi_{x_i}$.

Le terme s'écrit donc

$$\mathrm{Re} \int_S t^\lambda \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\ \varphi|^2}} \left[(Ru, u) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, (u, RA_i\, u)\right] , \text{ et il est}$$

non négatif dès que les φ_i sont assez petits, comme indiqué en IV) b).

Supposons en particulier que S soit caractéristique au-dessus de tout Ω, i.e.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \varphi_i\, \varphi_j = 1 \ ;$$

c'est en fait le cas qui fournit le plus grand domaine D où l'on peut résoudre, mais il n'est pas toujours possible d'établir l'existence d'une telle surface au-dessus d'un Ω donné, d'où l'hypothèse retenue en IV) b). Dans ce cas :

$$(Ru,u) = |u_o|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i \overline{u}_j + |u_{n+1}|^2$$

$$-\varphi_i(RA_i u,u) = 2\ \varphi_i \ \mathrm{Re}\ (\overline{u}_o \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j)$$

en sorte que

$$(Ru,u) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \ (u,\ RA_i u) = |u_{n+1}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \tilde{u}_i \overline{\tilde{u}}_j ,$$

où bien sûr, $\tilde{u}_i = u_i + \varphi_i u_o$.

Dans le cas général, le calcul de μ_o fait intervenir Q ; si on envisage le cas particulier $a_{ij} = \delta_{ij}$, b et c constantes, on a Q=0 et on choisira pour μ_o la plus petite des valeurs propres de $B+B^H$.

Pour pouvoir appliquer les théorèmes V)3) et 4), on supposera dorénavant que les a_{ij} ne dépendent plus que de t.

Calculons les valeurs propres de -B(o) :

$$\det\ (\lambda+B(o)) = \lambda^n \left[\lambda^2 + \lambda(b(o)+1) + b(o) + c(o)\right]$$

on note λ_1 et λ_2 les racines de l'équation $\lambda^2 + \lambda(b(o)+1) + b(o) + c(o) = 0$, en sorte que les valeurs propres de -B(o) sont 0 n fois, λ_1 et λ_2.

A titre d'exemple, on discutera l'application des théorèmes 3) et 4) pour les valeurs $\rho=0$ et $\lambda=0$ respectivement, ce qui amène à supposer que <u>l'équation $\lambda^2 + \lambda\ (b(o)+1) + b(o) + c(o) = 0$ n'a pas de racines entières supérieures ou égales à 1.</u>

Le théorème 3) indique alors que :

$$\forall\, \mathcal{F} \in C^\infty(\overline{D}),\ \exists\, \mathcal{U} \text{ unique},\ \mathcal{U} \in C^\infty(\overline{D}),\ \mathcal{U}|_{t=o} = 0,$$

$$L\,\mathcal{U} = \mathcal{F}.$$

En vue de revenir à l'opérateur P, prenons $\mathcal{F} = (f, o, \dots, o)$, et posons : $u = t u_{n+1}$. L'équation $L\mathcal{U} = \mathcal{F}$ implique

$$u'_t = u_{n+1} + t u'_{n+1_t} = u_{n+1} + t\left(\frac{u_o}{t} - \frac{u_{n+1}}{t}\right) = u_o ,$$

puis $(u_{x_i})_t - (u_i)_t = (u_o)_{x_i} - (u_i)_t = 0$. Puisque $u_{x_i}\big|_{t=o} = 0 = u_i\big|_{t=o}$, on a $u_{x_i} = u_i$ et donc $Pu = f$. On a obtenu :

$\forall\ f \in C^\infty(\overline{D})$, $\exists\, u$ unique, $u \in C^\infty(\overline{D})$, $u\big|_{t=o} = u'_t\big|_{t=o} = 0$, telle que $Pu = f$.

Pour appliquer le théorème 4), calculons Ker B(o) :

Si $b(o) + c(o) \neq o$, $\mathrm{Ker}\, B(o) = \{(v_o, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}),\ v_o = v_{n+1} = 0\}$

Si $b(o) + c(o) = o$, $\mathrm{Ker}\, B(o) = \{(v_o, v_1, \dots, v_{n+1}),\ v_o = v_{n+1}\}$.

S'il existe dans le noyau de P un $u \in C^\infty(D)$ tel que $u\big|_{t=o} = g \neq o$, cela implique :

$$\exists\, \mathcal{U},\ t\,\mathcal{U} \in C^\infty(\overline{D}),\ t\,\mathcal{U}\big|_{t=o} = (o, \dots, o, g),\ L\mathcal{U} = 0$$

ce qui entraîne, d'après le calcul 2), que -1 est valeur propre de -B(o), soit $c(o) = 0$.

On ne peut donc, si $c(o) \neq o$, espérer bien poser le problème $Pu = f$ en se donnant deux traces $u\big|_{t=o} = g$, $u'_t\big|_{t=o} = h$ (dans C^∞).

On distingue donc les cas suivants :

i) <u>$c(o) = o$, $b(o) \neq o$.</u>

. Si en fait $c \equiv 0$ (et c'est le cas des opérateurs qui interviennent dans les problèmes de moyenne, cf [3], [6], etc...), il suffit de choisir $\mathcal{U}\big|_{t=o} = (o, g_{x_1}, \dots, g_{x_n}, o)$, où $g(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et d'appliquer le théorème 4). On pose ensuite $u = t u_{n+1} + g(x)$, d'où $u'_t = u_o$, $(u_{x_i} - u_i)_t = 0$ et $(u_{x_i} - u_i)\big|_{t=o} = 0$, soit enfin

$$u \in C^\infty(\overline{D}),\ u\big|_{t=o} = g(x),\ u'_t\big|_{t=o} = o,\ Pu = 0.$$

. Sinon, on peut utiliser la remarque qui suit le théorème 4), et appliquer ce dernier (convenablement modifié) avec $\lambda = -1$. On obtient le résultat suivant :

Si $a_o \in \mathrm{Ker}\,(B(o) - 1)$, et a_1 tel que $Ba_1 + \Sigma A_i \frac{\partial a_o}{\partial x_i} + B'(o)\, a_o = 0$, il existe un unique $\mathcal{U}$ tel que $t\,\mathcal{U} \in C^\infty(\overline{D})$,

$$t\,\mathcal{U}\big|_{t=o} = a_o \;,\; (t\,\mathcal{U})'_{t=o} = a_1 \;,\; L\,\mathcal{U} = 0.$$

On choisit ici $a_o = (o,\ldots,o,g)$, où $g(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et

$$a_1 = \left(-\frac{c'(o)g}{b(o)}\,,\, g_{x_1},\ldots,\, g_{x_n}\,,\, -\frac{c'(o)g}{b(o)}\right).$$

On pose alors $u = tu_{n+1}$, et l'on en déduit

$$u \in C^\infty(\overline{D}),\; u'_t = u_o \;,\; (u_{x_i})_t - (u_i)_t = o \;,\; u\big|_{t=o} = g.$$

De plus, $u_{x_i}\big|_{t=o} = g_{x_i}$, et $u_i\big|_{t=o} = a_1^i = g_{x_i}$, d'où $u_{x_i} = u_i$, soit finalement

$$u \in C^\infty(\overline{D}),\; u\big|_{t=o} = g,\; u'_t\big|_{t=o} = -\frac{c'(o)}{b(o)}\,g,\; Pu = 0.$$

ii) $c(o) \neq o$. On aura, comme il a été déjà noté, $u\big|_{t=o} = 0$. Si $b(o) + c(o) \neq o$, on est ramené au cas du théorème 3).

Si $b(o) + c(o) = o$, pour tout $h(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, on trouve, par application du théorème 4), un unique $\mathcal{U} \in C^\infty(\overline{D})$

$$\mathcal{U}\big|_{t=o} = (h(x),o,\ldots,o,h(x)),\text{ et } L\,\mathcal{U} = o.$$

On en déduit l'existence d'un $u \in C^\infty(\overline{D})$ ($u = t\,u_{n+1}$), tel que

$$u\big|_{t=o} = o,\; u'_t\big|_{t=o} = h(x),\text{ et } Pu = o.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K.O. FRIEDRICHS : "Pseudo-differential operators".
Courant Institute of Math. Sc. New-York University.

[2] J.L. LIONS : "Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes".
Bulletin de la Société Math. de France, 84 (1956).

[3] J. DELSARTE et J.L. LIONS : "Moyennes généralisées"
Bulletin de la S.M.F.

[4] P.D. LAX et PHILLIPS : "Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators".
Communications on Pure and Applied Math,
Vol. 13 (1960)

[5] S. ALINHAC : "L'opérateur $y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans le demi-plan y   o". Orsay 1973.

[6] S. ALINHAC : "Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert borné par des propriétés de moyenne sur certaines boules". Thèse de 3ème cycle - ORSAY 1972.

[7] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : "

S. ALINHAC

40, rue Clément Perrot

94400 VITRY