M. S. BAOUENDI
C. GOULAOUIC

Problème de Cauchy multiplement caractéristique dans des espaces de distributions régulières

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A4_0>

PROBLEME DE CAUCHY MULTIPLEMENT CARACTERISTIQUE DANS DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS REGULIERES (*).

par

M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC (**)

INTRODUCTION.

L'unicité dans le problème de Cauchy a lieu dans l'espace des distributions dans le cas non caractéristique ([2]). Pour les problèmes de Cauchy du type de Fuchs par rapport à l'hypersurface initiale, étudiés dans [1], il n'y a pas unicité en général dans l'espace des distributions ; on montre ici qu'il y a cependant unicité dans des espaces de distributions "régulières" sur l'hypersurface initiale.

Dans la section I, on introduit ces espaces avec leur propriétés essentielles, dans la section II, on démontre un résultat de régularité dans la direction normale pour des opérateurs de type de Fuchs, puis dans la section III, en utilisant les résultats de [1], on montre l'unicité du problème de Cauchy.

(*) Une rédaction plus détaillée des résultats présentés ici est à paraître dans Uspechi Mathem. Nauk (1974).

(**) M.S. Baouendi : Purdue University,
C. Goulaouic : Université de Paris XI.

I. DISTRIBUTIONS REGULIERES SUR UNE HYPERSURFACE.

Soit T un réel strictement positif ; on note I l'intervalle $[0,T[$ ou $]-T,T[$.

Si E désigne un espace localement convexe séparé et complet, $k \in \mathbb{N}$, on note $C^k(I,E)$ l'espace des fonctions de classe C^k de I dans E ; pour $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, on note :

(1) $C^k_m(I,E) = \{u \in C^k(I,E) \; ; \; t^j D^j_t u \in C^k(I,E) \text{ pour } 1 \leq j \leq m\}$.

(2) $C^k_{-m}(I,E) = \{u \in \mathcal{D}'(\overset{\circ}{I},E),\ u = \sum_{j=0}^{m} t^j D^j_t u_j \ ,\ u_j \in C^k(I,E)\}$.

Evidemment, dans (1) (2), on peut utiliser $(t\, D_t)^j$ ou $(D_t t)^j$ au lieu de $t^j D^j_t$ sans changer les espaces.

Pour $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$C^{-k}_m(I,E) = \{u \in \mathcal{D}'(\overset{\circ}{I},E) \; ; \; u = \sum_{j=0}^{k} D^j_t u_j \ ,\ u_j \in C^{\circ}_m(I,E)\}.$$

Pour k, k_1, m, m_1 dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $k \leq k_1$ et $m \leq m_1$, on a :
$C^{k_1}_{m_1}(I,E) \subset C^k_m(I,E)$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a les inclusions :
$C^{k+m}_o(I,E) \subset C^k_m(I,E)$ et $C^k_{-m}(I,E) \subset C^{k-m}_o(I,E)$.

On note :

$$C^{-\infty}(I,E) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C^k_o(I,E),$$

et pour $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$C^{\ell}_{-\infty}(I,E) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} C^{\ell}_m(I,E).$$

On dira qu'un élément de $C^{-\infty}(I,E)$ est <u>régulier d'ordre ℓ à l'origine</u> si et seulement si il appartient à $C^{\ell}_{-\infty}(I,E)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

1°) La multiplication par t^p est un opérateur linéaire de $C^k_m(I,E)$ dans $C^{k+p}_{m-p}(I,E)$.

2°) L'opérateur différentiel D_t^p est un opérateur linéaire de $C_m^k(I,E)$ dans $C_m^{k-p}(I,E)$.

3°) L'opérateur différentiel $(D_t t)^p$ est un opérateur linéaire de $C_m^k(I,E)$ dans $C_{m-p}^k(I,E)$; c'est un isomorphisme pour $k \geq o$.

La vérification de ces propriétés est laissée au lecteur ; il en résulte en particulier un développement de Taylor de tout élément de $C^{-\infty}(I,E)$ régulier à l'ordre ℓ à l'origine avec $\ell \geq o$, prolongeant celui pour $C^\ell(I,E)$.

II. PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DU TYPE DE FUCHS.

1. Régularité a priori.

Considérons l'opérateur différentiel :

$$Q = (t\ D_t)^m + a_{m-1}(x)\ (t\ D_t)^{m-1} + \dots + a_o(x)$$

où les coefficients a_j sont des fonctions C^∞ définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on note $\lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq m$, les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^m + a_{m-1}(x)\ \lambda^{m-1} + \dots + a_o(x) = o.$$

Nous avons le résultat :

Proposition 1. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\mathrm{Re}\ \lambda_j(x) < \ell \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } j \in \{1,\dots,m\}.$$

Soit $u \in C_{-\infty}^{\ell}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que :

$$Qu \in C_p^{\ell+1}(I, \mathcal{D}'(\Omega)) \text{ avec } p \in \mathbb{Z}.$$

Alors, $u \in C_{p+m}^{\ell+1}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.

La démonstration consiste d'abord à se ramener au cas $\ell = o$, $u \in C^o(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ et $Qu \in C_k^1(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ avec $k \geq o$, cas que l'on traite en utilisant l'inverse de Q sous la forme d'intégrale de Hardy.

On note $\mathcal{L}(\mathcal{D}'(\Omega))$ l'espace des opérateurs linéaires continus dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; pour $j \in \{1,\dots,m\}$ soit $B_j \in C^\infty(I, \mathcal{L}(\mathcal{D}'(\Omega))$; soient m et k des entiers tels que $o \leq k \leq m$ et $a_\ell \in C^\infty(\Omega)$ pour $o \leq \ell \leq k - 1$.

On considère l'opérateur :

(3) $$P = [(t\,D_t)^k + a_{k-1}(x)\,(t\,D_t)^{k-1} + \dots + a_o(x)]\,D_t^{m-k} + \sum_{j=o}^{m-1} t^{\max(o,j-m+k+1)}\,D_t^j\,B_{m-j}\ ;$$

On note :

$$Q = (t\,D_t)^k + \dots + a_o(x),$$

et λ_j , $j \in \{1,\dots,k\}$ les racines caractéristiques de Q. On a le résultat suivant :

<u>Proposition 2</u>. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que :

Re $\lambda_j(x) < \ell - m + k$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1,\dots,k\}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $u \in C_p^\ell(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Pu \in C_{p-k}^{\ell-m+k+1}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.
Alors, $u \in C_p^{\ell+1}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.

On en déduit immédiatement :

<u>Corollaire 1</u>. Soient l'opérateur P défini par (3) et $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que :
Re $\lambda_j(x) < \ell - m + k$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1,\dots,k\}$. Soit $u \in C_{-\infty}^\ell(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Pu \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$. Alors, $u \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.

III. <u>UNICITE DANS LE PROBLEME DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS DE FUCHS</u>.

L'intervalle I est $]-T,T[$ désormais ; on considère des opérateurs P de la forme (3) avec :

(4) $$B_j = \sum_{|\beta| \leq j} a_{j,\beta}\,(t,x)\,D_x^\beta$$

et on suppose que les coefficients a_p , $o \leq p \leq k-1$, sont analytiques dans Ω et que les coefficients $a_{j,\beta}$, $1 \leq j \leq m$, $|\beta| \leq j$, sont C^∞ (par rapport à t) à valeurs dans l'espace des fonctions analytiques dans Ω.

On a alors le résultat :

Théorème 1. Soit P donné par (3) (4) et :

soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que Re $\lambda_j(x) < \ell-m+k$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1,\dots,k\}$; soit $u \in C^{\ell}_{-\infty}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Pu = o$ dans $I \times \Omega$.

Supposons de plus que l'on a : $u \equiv o$ pour $t < o$ ou bien : $m = k$ et $\ell \leq o$.

Alors, $u = o$ dans un voisinage de $\{t=o\}$ dans $I \times \Omega$.

Ce théorème résulte du corollaire 1 ci-dessus et du résultat d'unicité analogue obtenu dans [1] en supposant $u \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.

On peut appliquer ces résultats, par exemple pour montrer de la régularité analytique :

Exemple : Soit $P = (D_t\, t)^2 + (tD_x)^2$; cet opérateur n'est pas hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$; cependant, si on a $u \in C^{o}_{-\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ et Pu analytique dans $\mathbb{R}^2$, alors u est analytique dans $\mathbb{R}^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC : "Cauchy problems with characteristic initial hypersurface". C.P.A.M.

[2] L. HÖRMANDER : "Linear partial differential operators". Springer Springer Verlag, 1963.