P. Bolley

J. Camus

Étude d'une classe de systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 3, p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A3_0>

ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS

ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

P. BOLLEY et J. CAMUS

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ associés à des systèmes d'opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés sur le bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique. C'est une extension de l'étude faite dans [3] dans le cas d'un seul opérateur.

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞, de bord Γ. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > o\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = o\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq o \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } \Gamma. \end{cases}$$

où grad $\varphi(x)$ est le vecteur gradient de $\varphi(x)$.

Pour $i,j=1,\dots,M$ soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x\,;D_x)$ définis sur Ω par

$$L_{ij}\, u(x) \equiv L_{ij}(x\,;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j\,;\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x\,;D_x)\,\{\varphi(x)^{\alpha_j-h}\,u(x)\}$$

où s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$, α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$, $P_{ij}^{s_i+t_j-h}$ sont des opérateurs aux dérivées partielles d'ordre s_i+t_j-h au plus, avec une condition d'ellipticité pour l'opérateur matriciel $(P_{ij}^{s_i+t_j})_{i,j=1,\dots,M}$.

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1,\dots,M}$; on se propose d'étudier le problème aux limites associé à L :

$$\begin{cases} L\ u = f \text{ dans} \\ B\ \ u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs aux dérivées partielles frontières en nombre fini, du point de vue de l'existence des solutions $u = (u_1,\dots,u_M)$ dans des espaces de Sobolev avec poids $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ pour p entier ≥ 0 où

$$W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) = \{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\Omega)\ ;\ \varphi^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\Omega)\}.$$

Comme dans le cas elliptique, on ne peut pas se donner arbitrairement l'opérateur (L,B) pour que le problème soit bien posé ; aussi, sera-t-on amené à introduire certaines conditions sur cet opérateur. Le but essentiel de cette étude est de montrer que l'opérateur (L,B) est un opérateur à indice entre espaces convenables, le second membre $f = (f_1,\dots,f_M)$ étant dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)$ et on montre en particulier comment l'indice dépend de p. Cette étude donne par ailleurs des résultats de régularité pour les problèmes aux limites associés. A la différence des systèmes elliptiques, il est nécessaire de faire une étude directe dans le cadre H^p, p étant un entier $\geq$ o, le nombre d'opérateurs frontières pour les problèmes aux limites associés dépendant explicitement de l'entier p.

Dans le chapitre I, on fait une étude systématique des systèmes d'opérateurs correspondant à une variable sur $\mathbb{R}_+$ (et comme corollaire sur $\mathbb{R}$). La méthode utilisée est différente de celle utilisée dans [2] pour un seul opérateur ; elle redonne évidemment les résultats de [2] pour M=1, mais de façon beaucoup plus élégante et sans faire appel aux résultats fins de la théorie de Fuchs.

Dans le chapitre II, on construit des estimations a priori pour les opérateurs à plusieurs variables par une technique d'homothétie à partir de théorèmes d'isomorphisme obtenus dans le chapitre I pour les opérateurs correspondant à une variable. De ces estimations a priori, on déduit les résultats d'indice.

Notons que cette même méthode permet d'étudier des systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés avec une dégénérescence qui a lieu sur une hypersurface contenue dans l'ouvert, et de montrer en particulier, comme dans [5], que ces opérateurs sont partiellement hypo-elliptiques.

Cette méthode permet aussi d'établir comme dans [6] les conditions nécessaires et suffisantes de coercivité pour les formes intégro-différentielles formellement positives, dégénérées ou non, dans le cas non dégénérées, on retrouve ainsi les résultats de [7] et [8].

Le plan est le suivant :

I. UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS DIFFERENTIELS, DEGENERES, ELLIPTIQUES.

I.1. Les opérateurs.

Pour $i,j=1,\dots,M$, on considère les opérateurs différentiels $L_{ij} \equiv L_{ij}(t\,;D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_{ij}\,u(t) \equiv L_{ij}(t\,;D_t)\,\{u(t)\} \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_t)\,\{t^{\alpha_j-h}\,u(t)\}$$

où

(i) $D_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$;

(ii) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$ avec $s_i \leq o$ (on peut toujours se ramener à cette hypothèse) ; α_j est un entier de $\mathbb{N}$;

(iii) $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_t)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq s_i + t_j - h$, identiquement nul si $s_i + t_j - h < o$, à coefficients constants complexes de la forme :

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_t) = \sum_{\ell=o}^{s_i+t_j-h} p_{ij\ell}^{s_i+t_j-h}\, D_t^{\ell}\,.$$

Ainsi, L_{ij} considéré comme un opérateur différentiel est d'ordre $\leq s_i + t_j$ en la différentiation, admet le point $t=o$ comme point singulier à l'ordre α_j ; le point à l'infini étant aussi un point singulier pour L_{ij}.

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M} L_{ij}\,u_j(t) = f_i(t),\ t \in \mathbb{R}_+. \\ i=1,\dots,M \end{cases}$$

soit en désignant par L l'opérateur matriciel (L_{ij}), $u(t)$ le vecteur $(u_j(t))_{1 \leq j \leq M}$ et $f(t)$ le vecteur $(f_i(t))_{1 \leq i \leq M}$, on s'intéresse au problème :

$$Lu(t) = f(t),\quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Cet opérateur L induit un opérateur linéaire, continu de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ pour tout entier $p \geq o$ où $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+) = \{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\mathbb{R}_+)\ ;\ t^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)\}$$

muni de la norme du graphe. (cf. [2] pour les propriétés de ces espaces).

On se propose de démontrer que sous une condition algébrique, cet opérateur L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ et de calculer cet indice qui, comme on le verra, dépend de l'entier p.

I.2. Le résultat.

On définit le polynôme déterminant $\phi(\rho\ ;L) = \phi(\rho)$ associé à L par $\phi(\rho) = \text{dét}\ (\phi_{ij}(\rho - t_j + \alpha_j))$ où ϕ_{ij} est donné par :

$$\phi_{ij}(\rho) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(s_i+t_j,\alpha_j)} p_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}\ i^{\alpha_j-h}\ \rho(\rho-1)\ldots(\rho-\alpha_j+h+1).$$

Il faut noter que seul le coefficient $p_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}$ de la dérivée maximum dans l'opérateur $P_{ij}^{s_i+t_i-h}(D_t)$ intervient. Du point de vue de la théorie de Fuchs, $\phi_{ij}(\rho) = o$ est l'équation déterminante de l'opérateur $\widehat{L_{ij}}$ transformé de Fourier de l'opérateur L_{ij} au point singulier à l'infini.

Cette équation est d'ailleurs liée de très près à l'équation déterminante de l'opérateur L_{ij} au point singulier t=0. En fait, comme on le verra, on n'a pas besoin de faire appel directement à la théorie de Fuchs.

On définit le polynôme $\psi(\rho) = \text{dét}\ (P_{ij}^{s_i+t_j}(\rho))$. Il faut noter que seul l'opérateur de dérivation maximum $P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t)$ de l'opérateur L_{ij} intervient.

On note m_+ le nombre de zéros de $\psi(\rho)$ tels que Im $\rho > o$ et r_p le nombre de zéros de $\phi(\rho)$ tels que Re $\rho > -p-\frac{1}{2}$.

<u>Théorème I.1.</u>

Soit p un entier $\geq o$. Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro sur la droite Re $\rho = -p-\frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel, alors l'opérateur L considéré comme opérateur de $\prod_{j=1}^{M} W_j^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ est un opérateur à indice, d'indice $\chi_p = m_+ - r_p$.

Remarque : Si une des racines ρ de l'équation $\phi(\rho) = o$ est telle que $\mathrm{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$,, on ne peut plus rien dire ; dans certains cas, l'image n'est pas fermée.

La démonstration de ce théorème sera faite en trois étapes : on fait une étude sur un voisinage de 0, puis une étude sur un voisinage de $+\infty$ et ensuite, on regroupe ces deux résultats pour obtenir l'étude globale sur $\mathbb{R}_+$.

I.3. Etude au voisinage de $+\infty$.

Proposition I.1.

Soit p un entier $\geq o$. Si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel, alors (pour tout T tel que $o < T < +\infty$), l'opérateur L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,+\infty)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice m_+.

Démonstration :

(i) l'opérateur $M = (M_{ij})$ avec $M_{ij}\, u(t) = P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t)\,\{t^{\alpha_j} u(t)\}$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $\prod_{j=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice m_+.

En effet, pour $T > o$, il y a une correspondance bijective de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,+\infty)$ dans $\prod_{j=1}^{M} H^{t_j+p}(T,+\infty)$ par l'application :

$$(u_1,\ldots,u_M) \longrightarrow (t^{\alpha_1} u_1,\ldots, t^{\alpha_M} u_M).$$

Si bien qu'il suffit de montrer que l'opérateur $N = (P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} H^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice m_+. Or, comme dét $(P_{ij}^{s_i+t_j}(\rho))$ n'a pas de zéro réel, ce résultat est classique (cf. [1] par exemple) : le noyau de N est de dimension m_+ (ce sont les solutions du noyau à décroissante exponentielle) et N est surjectif.

(ii) l'opérateur L-M est un opérateur compact de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,+\infty)$.

En effet, l'injection $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $W_{\alpha_j-1}^{t_j+p-1}(T,\infty)$ est compacte pour $\alpha_j \geq 1$ et $L_{ij}-M_{ij}$ est linéaire et continu de $W_{\alpha_j-1}^{t_j+p-1}(T,+\infty)$ dans $H^{p-s_i}(T,\infty)$ pour $\alpha_j \geq 1$. De plus, $L_{ij}-M_{ij} = 0$ si $\alpha_j = 0$.

(iii) On en déduit que L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice m_+. (*)

I.4. Etude au voisinage de 0.

Proposition I.2.

Soit p un entier ≥ 0. Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro sur la droite, $\mathrm{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$, alors pour tout T tel que $0 < T < +\infty$, l'opérateur L est un opérateur à indice de :

$$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0,T) \text{ dans } \prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(0,T) \text{ d'indice } \sum_{i=1}^{M}(s_i+t_i) - r_p.$$

Démonstration :

(i) l'opérateur $P = (P_{ij})$ avec $P_{ij}\,u(t) = \sum_{h=o}^{t_j} p_{ij}^{t_j-h}\, D_t^{t_j-h}\,(t^{t_j-h}\,u(t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j}(0,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} L^2(0,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_o(P)$, où $r_o(P)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\mathrm{Re}\,\rho > -\frac{1}{2}$ du polynôme déterminant $\phi(\rho\,;P)$ associé à P, sous la condition que $\phi(\rho,P)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\mathrm{Re}\,\rho = -\frac{1}{2}$.

En effet, on fait la transformation d'Euler $-\tau = \mathrm{Log}\,t$ et le changement de fonctions $u_j(t) = e^{\tau/2}\,w_j(\tau)$; si bien que le système $Pu(t) = f(t)$ pour $t \in (o,T)$ se transforme en un système $Qw(\tau) = h(\tau)$ pour τ $(-\mathrm{Log}\,T,+\infty)$

(*) Pour les propriétés sur les opérateurs à indice, on renvoie à [4].

qui est un système ordinaire différentiel ordinaire, à coefficients constants, dont le déterminant caractéristique est précisément $\phi(-i\,\xi-\frac{1}{2}\,;P)$ qui est non nul pour ξ réel (d'après l'hypothèse faite sur $\phi(\rho\,;P)$) ; par conséquent, de la surjectivité de Q, de $\prod_{j=1}^{M} H^{t_j}(-\mathrm{Log}\,T,+\infty)$ sur $\prod_{j=1}^{M} L^2(-\mathrm{Log}\,T,\infty)$, on déduit la surjectivité de P de $\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j}(0,T)$ sur $\prod_{i=1}^{M} L^2(0,T)$, et de plus, la dimension de l'espace des solutions du noyau de Q dans $\prod_{j=1}^{M} H^{t_j}(-\mathrm{Log}\,T,+\infty)$ (i.e. : à décroissance exponentielle en $\tau = +\infty$) étant égale au nombre de zéros ξ du polynôme $\phi(-i\,\xi-\frac{1}{2};\,P)$ tels que $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ c'est-à-dire, $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_o(P)$.
On en déduit que la dimension du noyau de P dans $\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j}(0,T)$ est $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_o(P)$.

(ii) l'opérateur P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j+p}(0,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(P)$, où $r_p(P)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\mathrm{Re}\,\rho > -p-\frac{1}{2}$ du polynôme $\phi(\rho\,;P)$, sous la condition que $\phi(\rho\,;P)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\mathrm{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$.

Pour cela, on considère l'opérateur $Q = (Q_{ij})$ avec $Q_{ij}\,u(t) = D_t^p\,P_{ij}\,(t^p\,u(t))$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j+p}(o,T) & \xrightarrow{\quad P \quad} & \prod_{i=1}^{M} H^p(o,T) \\
{\scriptstyle t^p}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle D_t^p} \\
\prod_{j=1}^{M} W_{t_j+p}^{t_j+p}(o,T) & \xrightarrow[\quad Q \quad]{} & \prod_{i=1}^{M} L^2(0,T)
\end{array}$$

La multiplication par t^p est un opérateur à indice de $W_{t_j+p}^{t_j+p}(o,T)$ dans $W_{t_j}^{t_j+p}(o,T)$ d'indice $-p$.

La dérivation D_t^p est un opérateur à indice de $H^p(o,T)$ dans $L^2(o,T)$ d'indice p.

L'opérateur Q est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} L^2(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} (t_j+p) - r_o(Q)$ d'après (i). Le calcul de $\phi(\rho\,;Q)$ en fonction de $\phi(\rho\,;P)$ montre que cet indice égale $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(P)$.

Par conséquent, P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{t_j}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(P)$.

(iii) l'opérateur $R = (R_{ij})$ avec $R_{ij}\,u(t) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(t_j,\,\alpha_j)} p_{ij}^{t_j-h}\, D_t^{t_j-h}\,(t^{\alpha_j-h}\,u(t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\prod_{j=1}^{M} t_j - r_p(R)$, où $r_p(R)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\mathrm{Re}\,\rho > -p-\frac{1}{2}$ du polynôme déterminant $\phi(\rho\,;R)$ associé à R, sous la condition que $\phi(\rho\,;R)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\mathrm{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$.

Pour cela, on pose $\alpha'_j = \mathrm{Min}\,(t_j\,,\,\alpha_j)$ et on considère les opérateurs $R' = (R'_{ij})$ avec $R_{ij}\,u(t) = R'_{ij}\,(t^{\alpha_j-\alpha'_j}\,u(t))$ et $P = (P_{ij})$ avec $P_{ij}\,u(t) = R'_{ij}\,(t^{t_j-\alpha'_j}\,u(t))$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{t_j}(o,T) \arrow[d, "t^{t_j-\alpha'_j}"'] \arrow[dr, "P"] \arrow[dr, phantom, "1"', near start] & \\
\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha'_j}(o,T) \arrow[r, "R'"'] & \prod_{i=1}^{M} H^p(o,T) \\
\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(o,T) \arrow[u, "t^{\alpha_j-\alpha'_j}"] \arrow[ur, "R"'] \arrow[ur, phantom, "2", near start] &
\end{tikzcd}$$

La multiplication par $t^{t_j-\alpha'_j}$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{t_j}(o,T)$ dans $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha'_j}(o,T)$ d'indice $-\sum_{j=1}^{M} (t_j - \alpha'_j)$.

L'opérateur P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{t_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{p} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(P)$ d'après (ii). Le calcul de $\phi(\rho\,;P)$ en fonction de $\phi(\rho\,;R')$ montre que cet indice égale $\sum_{j=1}^{M} \alpha'_j - r_p(R')$ (car $r_p(P) = r_p(R') + \sum_{j=1}^{M} t_j - \alpha'_j$).

Par conséquent, d'après le diagramme ①, R' est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha'_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(R')$.

On fait la même opération avec le diagramme ② : R est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(R)$.

(iv) Sous les hypothèses de la proposition 2, l'opérateur $S = (S_{ij})$ avec

$$S_{ij}\, u(t) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(s_i+t_j,\alpha_j)} p_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}\; D_t^{s_i+t_j-h}\left(t^{\alpha_j-h}\, u(t)\right)$$

est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} (t_j - s_j) - r_p$.
(On remarquera que $\phi(\rho\,;S) = \phi(\rho\,;\, L) = \phi(\rho)$).

Pour cela, on pose $D_t^{-s_i} S_{ij}\, u(t) = R_{ij}\, u(t)$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T) \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \prod_{i=1}^{M} H^p(o,T) \\
\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T) \arrow[ur, "D_t^{-s_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

La dérivation $D_t^{-s_i}$ est un opérateur à indice de $H^{p-s_i}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$ d'indice $-s_i$.

L'opérateur R est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^p(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p(R)$ d'après (iii) ; le calcul de $\phi(\rho\,;R)$ montre qu'il est égal à $\phi(\rho)$; donc cet indice est égal à $\sum_{j=1}^{M} t_j - r_p$.

Par conséquent, S est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M}(t_j+s_j) - r_p$.

(v) l'opérateur L-S est un opérateur compact de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T)$.

En effet, L-S est un opérateur linéaire continu de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i+1}(o,T)$ et $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i+1}(o,T)$ s'injecte de façon compacte dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T)$.

(vi) on en déduit que L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M}(t_j+s_j) - r_p$.

I.5. Démonstration du théorème I.1.

Soit T tel que $0 < T < +\infty$. On considère les opérateurs suivants :

- M : $u \longmapsto (u|_{(0,T)}, u|_{(T,\infty)})$; c'est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T) \times \prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ d'indice $-\prod_{j=1}^{M} t_j - M_p$;

- N : $(u_1,u_2) \longmapsto (Lu_1, Lu_2)$; c'est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(o,T) \times \prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T,\infty)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T) \times \prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice $\sum_{j=1}^{M}(t_j+s_j) - r_p + m_+$ (d'après les propositions 1 et 2) ;

- P : $f \longmapsto (f|_{(o,T)}, f|_{(T,\infty)})$ est un opérateur à indice de $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(o,T) \times \prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(T,\infty)$ d'indice $-Mp + \sum_{i=1}^{M} s_i$.

Comme N o M = P o L , on en déduit le théorème 1.

I.6. Corollaires.

Du calcul explicite de l'indice, on déduit les résultats de régularité suivants :

Corollaire I.1.

Soient p et q deux entiers ≥ 0. Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro dans la bande $-(p+q)-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\rho \leq -p-\frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel alors, si u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}_+)$, u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}_+)$.

De cette étude sur $\mathbb{R}_+$ et d'une étude analogue sur $\mathbb{R}$, on déduit comme en I.5 le résultat sur $\mathbb{R}$ suivant :

Corollaire I.2.

Soit p un entier ≥ 0. Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro sur la droite, $\mathrm{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel alors, l'opérateur L, considéré comme opérateur de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R})$, est un opérateur à indice, d'indice $\chi_p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j - 2r_p$.

Il en résulte que le corollaire I.1 reste valable en changeant $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$.

II. ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS AUX DERIVEES PARTIELLES, ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

Dans ce chapitre, on établit des majorations a priori, les unes pour l'opérateur (L,B), les autres pour l'opérateur transposé ; moyennant un lemme abstrait, on en déduit l'existence de l'indice, puis des conséquences de ce résultat. De telles majorations a priori sont d'abord établies dans le cas du demi-espace pour des opérateurs à coefficients constants à partir des résultats obtenus dans le chapitre I pour les opérateurs correspondants à une variable sur $\mathbb{R}_+$, puis avec l'artifice de Korn et avec des cartes locales, on les transporte sur un ouvert Ω régulier.

C'est la méthode utilisée dans [3], dans le cas d'un seul opérateur. Plusieurs difficultés techniques dues aux systèmes apparaissent, et pour faciliter la tâche du lecteur, on donne les calculs correspondants.

II.1. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ pour le cas des coefficients constants.

II.1.1. Notations et hypothèses.

Pour $i,j=1,\dots,M$, soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x_n ; D_{x'}, D_{x_n})$ définis sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L_{ij}\, u(x) \equiv L_{ij}(x_n ; D_{x'}, D_{x_n})\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n})\,\{x_n^{\alpha_j-h}\, u(x)\}$$

où

(i) $(D_{x'}, D_{x_n}) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} ; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

(ii) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leq o$ et $t_j \geq o$ (on peut se ramener à ce cas).

(iii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$.

(iv) $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients constants complexes, homogène d'ordre $s_i + t_j - h$, ou identiquement nul (si $s_i + t_j - h$ est $< o$, $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n})$ est l'opérateur identiquement nul) :

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+\ell=s_i+t_j-h} p_{ij,\ell,\alpha}^{s_i+t_j-h} D_{x'}^{\alpha} D_{x_n}^{\ell}$$

(où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ appartient à $\mathbb{N}^{n-1}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$).

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{1 \le i,j \le M}$: cet opérateur induit, pour tout entier $p \geq o$, une application linéaire et continue de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)$ où $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ est l'espace de Sobolev avec poids $\{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\mathbb{R}_+^n),\ x_n^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)\}$ muni de la norme canonique (pour les propriétés classiques de ces espaces, on renvoie à [3]).

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport aux variables tangentielles $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, l'opérateur L est transformé en un opérateur $L(x_n ; \xi', D_{x_n})$ qui est l'opérateur matriciel $(L_{ij}(x_n ; \xi', D_{x_n}))$ où chaque opérateur $L_{ij}(x_n ; \xi', D_{x_n})$ est un opérateur différentiel ordinaire en x_n, dépendant du paramètre ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_{ij}(x_n ; \xi', D_{x_n}) \{v(x_n)\} \equiv \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(\xi', D_{x_n}) \{x_n^{\alpha_j-h} v(x_n)\}.$$

L'opérateur $L(x_n ; \xi', D_{x_n})$ appartient à la classe des opérateurs étudiés en I. Ceci nous amène à définir les conditions $H_o(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p ; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p ; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p ; \mathbb{R}_+^n)$ suivantes :

<u>$H_o(\mathbb{R}_+^n)$</u> : pour tout (ξ', ρ) appartenant à $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, le polynôme dét $(P_{ij}^{s_i+t_j}(\xi', \rho))$ est non nul et pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{o\}$ le nombre $m_+(\xi')$ de zéros à partie imaginaire $> o$ du polynôme dét $(P_{ij}^{s_i+t_j}(\xi', \rho))$ en ρ est constant et égal à m_+.

Pour chaque entier $p \geq o$, on pose :

<u>$H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$</u> : le polynôme $\phi(\rho) = \text{dét}\,(\phi_{ij}(\rho - t_j + \alpha_j))$ où $\phi_{ij}(\rho) = \sum_{h=0}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} p^{s_i+t_j-h}_{ij,s_i+t_j-h,0}\; i^{\alpha_j-h}\; \rho(\rho-1)\,\ldots\,(\rho-\alpha_j+h+1)$ n'a pas de zéro ρ sur la droite $\text{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$.

On désigne par r_p le nombre de zéros ρ du polynôme $\phi(\rho)$ tels que $\text{Re}\,\rho > -p-\frac{1}{2}$ et on pose :

<u>$H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$</u> : le nombre $\chi_p = m_+ - r_p$ est ≥ 0.

Etant donné u appartenant à $W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$, on lui associe t_j+p traces généralisées définies pour x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ par :

$$\gamma_q\, u(x') = \begin{cases} D^q_{x_n}\, u(x') \text{ pour } q=0,\ldots,\, t_j+p-\alpha_j-1 \text{ si } 0 \leq \alpha_j < t_j+p \\ (-1)^{-q-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} x_n^{-q-1}\, u(x',x_n)\,dx_n \text{ pour } q=-\alpha_j,\ldots,\, \min\,(-1,t_j+p-\alpha_j-1) \\ \qquad \text{si } 1 \leq \alpha_j\,. \end{cases}$$

On note $\gamma u = (\gamma_{-\alpha_j} u, \ldots, \gamma_{t_j+p-\alpha_j-1} u)$; l'application $\gamma : u \longrightarrow \gamma u$ est linéaire, continue et surjective de

$$W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+) \text{ sur } \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} H^{t_j+p-\alpha_j-q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque χ_p est > 0, pour $i=1,\ldots,\chi_p$, $j=1,\ldots,M$ soient les opérateurs $B^p_{ij} \equiv B^p_{ij}(D_{x'})$ définis par :

$$B^p_{ij}\,\gamma\, u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(D_{x'})\;\gamma_q u$$

où $B_{ijq}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients complexes, homogène d'ordre $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$ ou identiquement nul, si $\sigma_i + t_j - q$ est < 0, $B_{ijq}(D_{x'})$ est l'opérateur identiquement nul, σ_i étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_i \leq p-1$.

On note $B_p\gamma$ l'opérateur matriciel $(B^p_{ij}\gamma)_{\substack{i=1,\ldots,\chi_p \\ j=1,\ldots,M}}$: cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+) \text{ dans } \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$, l'opérateur $B_p\gamma$ est transformé en un opérateur $B_p(\xi')\gamma$ qui est l'opérateur matriciel $(B^p_{ij}(\xi')\gamma)$ où chaque opérateur $B^p_{ij}(\xi')\gamma$ dépend du paramètre ξ' de $\mathbb{R}^{n-1}$ et est défini par :

$$B^p_{ij}(\xi')\,\gamma u = \sum_{q=-\chi_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(\xi')\,\gamma_q u.$$

On pose enfin :

<u>$H_3(p\,;\mathbb{R}^n_+)$</u> : pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(x_n\,;\,\omega\,,\,D_{x_n})\,v(x_n) = 0 \\ B_p(\omega)\,\gamma v = 0 \end{cases}\quad ,\ \text{si } \chi_p > 0$$

ou

$$\{L(x_n\,;\,\omega\,,\,D_{x_n})\,v(x_n) = 0\quad ,\ \text{si } \chi_p = 0$$

n'admet que la solution $v = o$ dans $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}_+)$

II.1.2. <u>Enoncé des résultats.</u>

Pour tout entier $p \geq o$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu,\ B_p\,\gamma u) & \text{si } \chi_p > 0 \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0 \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

On désigne enfin par $\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$ (resp. $\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$) le dual de $H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $W^{t_j+p}_{j}(\mathbb{R}^n_+)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}^*_p$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} \left[H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\right]$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$) dans $\prod_{j=1}^{M} \left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$ si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = 0$).

On désigne enfin par j_{p-s_i} l'isomorphisme canonique de $|H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)|'$ sur $H_o^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions de $H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.1.

Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_o(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p\,;\mathbb{R}^n_+)$ sont réalisées. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ on ait :

$$\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

$$\text{(resp. } \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

Remarque II.1.

Le terme $\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ figurant dans le terme complémentaire $\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ des estimations précédentes peut être remplacé par $\|(1+x_n^{\alpha_j})\,u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $\alpha_j < t_j + p$ et par $\|x_n^{\alpha_j}\,u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $\alpha_j \geq t_j + p$.

Théorème II.2. Soit un entier $p \geq o$. On suppose que les conditions $H_o(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p,\mathbb{R}^n_+)$ sont réalisées. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f,g) (resp. f) appartenant à

$$\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ (resp. } \prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'\text{)}$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$) on ait :

$$\|(f,g)\|_{\prod_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'\times\prod_{i=1}^{\chi_p}H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\left\{\|\mathcal{P}^*_p(f,g)\|_{\prod_{j=1}^{M}\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} + \sum_{i=1}^{M}\|j_{p-s_i}f\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p}H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}$$

$$\text{(resp. } \|f\|_{\prod_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} \leq C\left\{\|\mathcal{P}^*_p f\|_{\prod_{j=1}^{M}\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} + \sum_{i=1}^{M}\|j_{p-s_i}f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)}\right\}$$

II.1.3. Démonstration du théorème II.1.

On suppose $\chi_p > 0$. Les hypothèses $H_0(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ impliquent que pour tout ω appartenant à S_{n-2} le couple d'opérateurs $\mathcal{P}_p(\omega) \equiv (L(x_n;\omega,D_{x_n}),\ B_p(\omega)\gamma)$ réalise un isomorphisme de $\prod_{i=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}_+)$ sur $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)\times \mathbb{C}^{\chi_p}$. La sphère S_{n-2} étant compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ω appartenant à S_{n-2} et pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{\ell=0}^{t_j+p}\|D^\ell_s(s^{\alpha_j}v_j)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\left\{\sum_{i=1}^{M}\left\|\sum_{j=1}^{M}L_{ij}(s;\omega,D_s)\{v_j(s)\}\right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)} + \sum_{i=1}^{\chi_p}\left|\sum_{j=1}^{M}B^p_{ij}(\omega)\,\gamma u_j\right|\right\}$$

Pour u_j appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}-\{o\}$, on pose : $v_j(s) = u_j(x_n)$ avec $s = x_n|\xi'|$.

On vérifie que l'on a les relations :

$$D^\ell_s(s^{\alpha_j}v_j(s)) = |\xi'|^{\alpha_j-\ell}\,D^\ell_{x_n}(x_n^{\alpha_j}u_j(x_n)) \text{ pour } \ell=o,\dots,t_j+p.$$

$$L_{ij}(s,\omega,D_s)\{v_j(s)\} = |\xi'|^{\alpha_j-s_i-t_j}\,L_{ij}(x_n;\xi',D_{x_n})\{u_j(x_n)\} \text{ avec } \omega=\xi'/|\xi'|$$
pour $i,j=1,\dots,M$.

$$B_{ijq}(\omega) = |\xi'|^{q-\sigma_i-t_j+\alpha_j}\,B_{ijq}(\xi') \text{ pour } i=1,\dots,\chi_p,\ j=1,\dots,M \text{ et}$$
$q=-\alpha_j,\dots,t_j+p-\alpha_j-1$

$$\gamma_q\ v_j = |\xi'|^{-q}\,\gamma_q\,u_j \quad \text{pour } q=-\alpha_j,\dots,t_j+p-\alpha_j-1.$$

Par suite, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}-\{o\}$ et u appartenant à $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+))^M$ on ait :

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{t_j+p} |\xi'|^{\alpha_j-\ell+\frac{1}{2}} \|D^{\ell}_{x_n}(x_n^{\alpha_j} u_j(x_n))\|_{L^2(R_+)} \leq$$

$$C\left\{ \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{p-s_i} |\xi'|^{-\ell+\frac{1}{2}} \|\sum_{j=1}^{M} |\xi'|^{\alpha_j-s_i-t_j} D^{\ell}_{x_n} L_{ij}(x_n;\omega,D_{x_n})\{u_j(x_n)\}\|_{L^2(R_+)} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \left|\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i-t_j+\alpha_j} B_{ijq}(\xi')\gamma_q u_j\right| \right\}$$

Cette relation est aussi valable évidemment si l'on remplace $u_j(x_n)$ par $|\xi'|^{-\alpha_j+t_j+p-\frac{1}{2}} u_j(x_n)$. Ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{t_j+p} |\xi'|^{t_j+p-\ell} \|D^{\ell}_{x_n}(x_n^{\alpha_j} u_j(x_n))\|_{L^2(R_+)} \leq$$

$$C\left\{ \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{p-s_i} |\xi'|^{-s_i-\ell+p} \|\sum_{j=1}^{M} D^{\ell}_{x_n} L_{ij}(x_n;\omega,D_{x_n})\{u_j(x_n)\}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \left|\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i+p-\frac{1}{2}} B_{ijq}(\xi')\gamma_q u_j\right| \right\}$$

Ainsi, pour tout u appartenant à $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}))^M$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}-\{o\}$ on a :

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{t_j+p} |\xi'|^{t_j+p-\ell} \|D^{\ell}_{x_n}(x_n^{\alpha_j} \hat{u}_j(\xi',x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$C\left\{ \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=o}^{p-s_i} |\xi'|^{-s_i-\ell+p} \|\sum_{j=1}^{M} D^{\ell}_{x_n} L_{ij}(x_n;\omega,D_{x_n})\{\hat{u}_j(\xi',x_n)\}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \left|\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i+p-\frac{1}{2}} B_{ijq}(\xi')\gamma_q \hat{u}_j(\xi',.)\right| \right\}$$

On intègre par rapport à ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}$; ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{|\alpha|+\ell=t_j+p} \|D^{\alpha}_{x'} D^{\ell}_{x_n}(x_n^{\alpha_j} u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\left\{ \sum_{i=1}^{M} \sum_{|\alpha|+\ell=p-s_i} \|\sum_{j=1}^{M} D^{\alpha}_{x'} D^{\ell}_{x_n} L_{ij} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\chi_p} \|\sum_{j=1}^{M} B_{ij}\, \gamma u_j\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\} \quad (\text{car } -\sigma_i+p-\frac{1}{2} \geq 0)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \right. .$$

On en déduit le théorème II.1. et la remarque II.1.

II.14. Démonstration du théorème II.2.

On suppose $\chi_p > 0$. L'espace $\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$ étant canoniquement isomorphe au sous-espace des distributions de $\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}_p^*$ comme un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'$.

Soit (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. On va donner l'expression de $\mathcal{P}_p^*(f,g)$ au sens de $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^M$. Pour cela, on note L_{ij}^* l'opérateur adjoint formel de L_{ij} dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, B_{ijq}^* l'adjoint formel de B_{ijq} dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$, $\delta(x_n)$ la distribution de Dirac en la variable x_n, concentrée à l'origine et enfin $Y(x_n)$ la fonction de Heaviside en la variable x_n (i.e. $Y(x_n) = 1$ pour $x_n > 0$, $Y(x_n) = 0$ pour $x_n \leq 0$).

Soit φ appartenant à $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^M$. Par définition de $\mathcal{P}_p^*(f,g)$, on a :

$$< \mathcal{P}_p^*(f,g), \overline{\varphi}_{|\mathbb{R}^n_+} >_{\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} =$$

$$= < (f,g), \overline{\mathcal{P}_p \varphi_{|\mathbb{R}^n_+}} >_{\left[\prod_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\right] \times \left[\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\right]}$$

$$= \sum_{i=1}^{M} < f_i \, , \, \sum_{j=1}^{M} \overline{L_{ij} \; \varphi_j} \; >_{\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} < g_i \, , \, \sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} \overline{B_{ijq} \; \gamma_q u_j} >_{H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} < L^*_{ij} \; j_{p-s_i} f_i \, , \, \overline{\varphi_j} >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} <$$

$$< B^*_{ijq} \; g_i \otimes x_n^{-q-1} \; Y(x_n) \, , \, \overline{\varphi_j} >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{j=1}^{M} \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} < B^*_{ijq} g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n) \, , \, \overline{\varphi_j} >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

d'où l'on en déduit l'expression de $\mathcal{P}^*_p(f,g)$ dans $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^M$.

Les hypothèses $H_o(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p\,;\mathbb{R}^n_+)$ impliquent que l'opérateur adjoint $\mathcal{P}^*_p(\omega)$ de l'opérateur $\mathcal{P}_p(\omega)$ est un isomorphisme de $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)\right]' \times \mathbb{C}^{\chi_p}$ sur $\prod_{j=1}^{M} \left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}_+)\right]'$. Pour (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)\right]' \times \mathbb{C}^{\chi_p}$, $\mathcal{P}^{\times}_p(\omega)\,(f,g)$ considéré comme élément de $\prod_{j=1}^{M} \left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R})\right]'$ a pour composante d'ordre j

$$(\mathcal{P}^*_p(\omega)(f,g))_j = \sum_{i=1}^{M} L^*_{ij}(x_n;\omega,D_{x_n})\{j_{p-s_i} f_i\} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1} (-1)^{-q-1}$$

$$B^*_{ijq}(\omega) \; g_i \; x_n^{-q-1} \; Y(x_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} \; B^*_{ijq}(\omega) \; g_i \; \delta^{(q)} \; (x_n).$$

où j_{p-s_i} désigne ici l'isomorphisme canonique de $\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)\right]'$ sur $H_o^{-p+s_i}(\mathbb{R})$.

La compacité de la sphère unité S_{n-2} implique l'existence d'une constante $c > o$ telle que pour tout w appartenant à S_{n-2} et pour tout (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)\right]' \times \mathbb{C}^{\chi_p}$, on ait :

$$(\ast)\quad \sum_{i=1}^{M} \|f_i\|_{[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)]'} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |g_i| \leq C \Big\{ \sum_{j=1}^{M} \Big\| \sum_{i=1}^{M} L^{*}_{ij}(s;\omega,D_s)\ \{j_{p-s_i}\ f_i\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1}\ B^{*}_{ijq}(\omega)\ g_i\ s^{-q-1}\ Y(s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q}\ B^{*}_{ijq}(\omega)\ g_i\ \delta^{(q)}(s) \Big\|_{[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)]'}$$

Soit maintenant (f,g) appartenant à $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+))^M \times (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^{\chi_p}$ et soit la distribution T_j composante d'ordre j de $\mathcal{S}^{*}_p(f,g)$:

$$T_j = \sum_{i=1}^{M} L^{*}_{ij}(j_{p-s_i} f_i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1}\ B^{*}_{ijq}\ g_i \otimes x_n^{-q-1}\ Y(x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q}\ B^{*}_{ijq}\ g_i \otimes \delta^{(q)}\ (x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} L^{*}_{ij}(j_{p-s_i} f_i) + \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \Big(\sum_{i=1}^{M} B^{*}_{ijq} g_i \Big) \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) +$$

$$+ \sum_{q=o}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} \Big(\sum_{i=1}^{\chi_p} B^{*}_{ijq}\ g_i \Big) \otimes \delta^{(q)}_{(x_n)}$$

(on remarquera que dans ce cas $j_{p-s_i}\ f_i$ n'est autre que $\tilde{f}_i$, prolongement par 0 pour $x_n < 0$ de f_i ; et ainsi $j_{p-s_i}\ f_i = \tilde{f}_i$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, la distribution en x_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{T}_j(\xi',x_n) = \sum_{i=1}^{M} L^{*}_{ij}(x_n\,;\,\xi',D_{x_n})(\widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi',x_n)) + \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\chi_p} B^{*}_{ijq}(\xi')\ \hat{g}_i(\xi')\ x_n^{-q-1}\ Y(x_n) + \sum_{q=o}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q}$$

$$\sum_{i=1}^{\chi_p} B^{*}_{ijq}\ (\xi')\ \hat{g}_i(\xi')\ \delta^{(q)}\ (x_n).$$

appartient à $\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'$. On désigne par $H_{\xi'}$ l'homothétie : $H_{\xi'} : x_n \longrightarrow s = x_n|\xi'|$ pour ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$. On note $H_{\xi'}\hat{T}_j(\xi',.)$ la distribution en s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$< H_{\xi'}\hat{T}_j(\xi',.),\alpha(s) >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = < \hat{T}_j(\xi',.),\alpha(x_n|\xi'|)>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

pour toute fonction α de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$H_{\xi'}\hat{T}_j(\xi',.) = \sum_{i=1}^{M} |\xi'|^{s_i+t_j-\alpha_j-1} L_{ij}^{*}(s;\omega,D_s)\{\widehat{j_{p-s_i}f_i}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})\} +$$

$$+ \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \sum_{i=1}^{\chi_p} |\xi'|^{\sigma_i+t_j-\alpha_j} B_{ijq}^{*}(\omega)\hat{g}_i(\xi')s^{-q-1}Y(s)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q}|\xi'|^{\sigma_i+t_j-\alpha_j} B_{ijq}^{*}(\omega)\,\hat{g}_i(\xi')\,\delta^{(q)}(s),$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On applique l'inégalité $(*)$ à $((|\xi'|^{s_i-1}\widehat{j_{p-s_i}f_i}(\xi',\frac{s}{|\xi'|}))_{i=1,\dots,M};$ $(|\xi'|^{\sigma_i}\hat{g}_i(\xi'))_{i=1,\dots,\chi_p})$; ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{M} |\xi'|^{s_i-1} \|\widehat{j_{p-s_i}f_i}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |\xi'|^{\sigma_i} |\hat{g}_i(\xi')| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{M} |\xi'|^{\alpha_j-t_j} \|H_{\xi'}\hat{T}_j(\xi',.)\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'}$$

On élève au carré, on multiplie les deux membres par $|\xi'|^{-2p+1}$ et on intègre par rapport à ξ' dans $|\xi'| \geq 1$

$$\int_{|\xi'|\geq 1} \sum_{i=1}^{M} |\xi'|^{2s_i-2p-1} \|\widehat{j_{p-s_i}f_i}(\xi'\,\frac{s}{|\xi'|})\|^2_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} d\xi' +$$

$$+ \int_{|\xi'|\geq 1} \sum_{i=1}^{\chi_p} |\xi'|^{2\sigma_i-2p+1} |\hat{g}_i(\xi')|^2 d\xi$$

$$\leq C \int_{|\xi'|\geq 1} \sum_{j=1}^{M} |\xi'|^{2\alpha_j-2t_j-2p+1} \|H_{\xi'}\hat{T}_j(\xi',.)\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'} d\xi'$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{M} \|T_j\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} \qquad \text{(cf. lemme 1.1. chap. II, [3])}$$

$$= C \left\| \mathcal{P}_p^{*}(f,g) \right\|_{\prod\limits_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

D'autre part :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{2s_i-2p-1} \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i}\left(\xi',\frac{s}{|\xi'|}\right)\right\|^2_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} d\xi'$$

$$\geq \int_{|\xi'|\geq 1}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_i-p} \left|\mathcal{F} j_{p-s_i} f(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{2\sigma_i-2p+1} \left|\hat{g}_i(\xi')\right|^2 d\xi' \geq \int_{|\xi'|\geq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_i-p+\frac{1}{2}} \left|\hat{g}_i(\xi')\right|^2 d\xi'$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{|\xi'|\geq 1}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_i-p} \left|\mathcal{F} j_{p-s_i} f(\xi)\right|^2 d\xi \;+$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'|\geq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_i-p+\frac{1}{2}} \left|\hat{g}_i(\xi')\right|^2 d\xi' \leq C \left\|\mathcal{P}_p^{*}(f,g)\right\|_{\prod\limits_{j=1}^{M}\left[W_j^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

Il reste donc à majorer les intégrales pour $|\xi'|\leq 1$. Tout d'abord, il est facile de vérifier que

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_i-p+\frac{1}{2}} \left|\hat{g}_i(\xi')\right|^2 d\xi' \leq 2 \left\|g_i\right\|^2_{H^{\sigma_i-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Pour majorer $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \int_{|\xi'|\leq 1}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_i-p} \left|\mathcal{F} j_{p-s_i} f(\xi)\right|^2 d\xi$, on introduit l'opérateur $\mathcal{P}_p(\omega_o)$ pour un certain ω_o appartenant à S_{n-2}. On applique l'inégalité (*) à la famille $\left(\left(\widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi',.)\right)_{i=1,\dots,M}\right.$; $\left.(\hat{g}_i(\xi'))_{i=1,\dots,M}\right)$ et pour $\omega = \omega_o$, ce qui donne :

$$(**)\quad \sum_{i=1}^{M} \|\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)}\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |\hat{g}_i(\xi')| \leq$$

$$C \,\| \mathcal{P}_p^*(\omega_o)\ ((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)})_{i=1,\dots,M}\ ;\ (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1,\dots,\chi_p})\|_{\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'}$$

Or : $\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_i-p}\, |\mathcal{F}\, j_{p-s_i} f_i(\xi)|^2\, d\xi_n \leq \|\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)}\|^2_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})}$

et pour $|\xi'| \leq 1$:

$$\|(\mathcal{P}_p^*(\xi') - \mathcal{P}_p^*(\omega_o))\ ((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)})_{i=1,\dots,M}\ ;\ (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1,\dots,\chi_p})\|_{\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{i=1}^{M} \|\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)}\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |\hat{g}_i(\xi')| \right\}$$

On élève au carré, on intègre par rapport à ξ' dans $|\xi'| \leq 1$, les deux membres de $(**)$

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{|\xi'|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_i-p}\, |\mathcal{F}_{j_{p-s_i}} f_i(\xi)|^2\, d\xi \leq$$

$$C \left\{ \int_{|\xi'|\leq 1} \|\mathcal{P}_p^*(\xi')\ ((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)})_{i=1,\dots,M}\ ;\ (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1,\dots,\chi_p})\|^2_{\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})\right]'} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{M} \int_{|\xi'|\leq 1} \|\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi',.)}\|^2_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'|\leq 1} |\hat{g}_i(\xi')|^2\, d\xi' \right\}$$

d'où l'on déduit (cf. lemme 1.2, chapitre II, [3]).

$$\leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p^*(f\ ;\ g)\|_{\prod_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}$$

ce qui termine la démonstration du théorème II.2.

II.2. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ pour le cas des coefficients variables.

II.2.1. Notations et hypothèses.

Pour $i,j=1,\dots,M$, soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})$ définis sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L_{ij}\,u(x) \equiv L_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x\,;D_{x'},D_{x_n})\{x_n^{\alpha_j-h}\,u(x)\}$$

où

(i) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leq o$ et $t_j \geq o$ (on peut se ramener à ce cas).

(ii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$.

(iii) $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x\,;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre au plus s_i+t_j-h (ou identique à 0 si s_i+t_j-h est $< o$) :

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x\,;D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+\ell\leq s_i+t_j-h} p_{ij,\ell,\alpha}^{s_i+t_j-h}(x)\,D_{x'}^{\alpha}\,D_{x_n}^{\ell}\,.$$

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1,\dots,M}$; cet opérateur induit pour tout entier $p\geq o$, une application linéaire continue de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)$.

A cet opérateur L, on associe l'opérateur matriciel $L^o \equiv (L_{ij}^o)_{i,j=1,\dots,M}$ où $L_{ij}^o \equiv L_{ij}^o(x\,;x_n\,;D_{x'},D_{x_n})$ est défini par :

$$L_{ij}^o(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x;D_{x'},x_n)\,\{x_n^{\alpha_j-h}\,u(x)\}$$

où
$$P_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x\,;D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+\ell=s_i+t_j-h} p_{ij,\ell,\alpha}^{s_i+t_j-h}(x)\,D_{x'}^{\alpha}\,D_{x_n}^{\ell}\,.$$

L'opérateur $L^o(o,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur du type étudié au paragraphe II.1. Les conditions $H_o(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$ et $H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$ associés s'écrivent :

<u>$H_o(\mathbb{R}^n_+)$</u> : pour tout (ξ',ρ) appartenant à $\mathbb{R}^n-\{o\}$, le polynôme $\det(P_{ij,s_i+t_j}^{s_i+t_j}(o;\xi',\rho))$ est non nul et le nombre $m_+(\xi')$ de zéros à partie imaginaire $>o$ du polynôme $\det(P_{ij,s_i+t_j}^{s_i+t_j}(o\,;\xi',\rho))$ en ρ est constant et égal à m_+ .

$\underline{H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)}$: le polynôme $\phi^o(\rho) = \text{dét}\,(\phi^o_{ij}(\rho - t_j + \alpha_j))$ où $\phi^o_{ij}(\rho)$

$$= \sum_{h=o}^{\inf(s_i+t_j,\alpha_j)} p_{ij,s_i+t_j-h,o}^{s_i+t_j-h}(o)\; i^{\alpha_j-h}\;\; \rho(\rho-1)\;\ldots\;(\rho-\alpha_j+h+1)$$ n'a pas de

zéro ρ sur la droite $\text{Re}\,\rho = -p-\frac{1}{2}$.

On désigne par r_p le nombre de zéros du polynôme $\phi^o(\rho)$ tel que $\text{Re}\,\rho > -p-\frac{1}{2}$ et on pose :

$\underline{H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)}$: le nombre $\chi_p = m_+ - r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque χ_p est > 0, pour $i=1,\ldots,\chi_p$, $j=1,\ldots,M$ soient les opérateurs $B^p_{ij} \equiv B^p_{ij}(x',D_{x'})$ définis par :

$$B^p_{ij}\,\gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}\,(x',\,D_{x'})\;\gamma_q u\;,$$

où $B_{ijq}(x';D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre inférieur ou égal à $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$, si $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$ est < 0, $B_{ijq}(x';D_{x'})$ est l'opérateur identiquement nul , σ_i étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_i \leq p-1$.

On note $B_p\gamma$ l'opérateur matriciel $(B^p_{ij}\;\gamma)_{\substack{i=1,\ldots,\chi_p\\ j=1,\ldots,M}}$: cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+) \text{ dans } \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

A cet opérateur $B_p\gamma$ on associe l'opérateur matriciel $B^o_p\gamma \equiv B^o_p(x',D_{x'})\gamma \equiv (B^{po}_{ij}(x',D_{x'})\gamma)_{\substack{i=1,\ldots,\chi_p\\ j=1,\ldots,M}}$ où $B^{po}_{ij}(x',D')\gamma$ est défini par :

$$B^{po}_{ij}(x'\,;D_{x'})\;\gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}_{ijq}\,(x',\,D_{x'})\;\gamma_q u\;,$$

$B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}_{ijq}(x';\,D_{x'})$ étant la somme des termes d'ordre exactement $\sigma_i+t_j-\alpha_j-q$ dans l'opérateur $B_{ijq}(x';D_{x'})$. On pose enfin :

$H_3(p\,;\mathbb{R}^n_+)$: pour tout ω appartenant à S_{n-2} , le problème aux limites :

$$\begin{cases} L^o(o\,;x_n\,;\,\omega,\,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = 0 \\ B^o_p(o,\omega)\;\gamma v = o \qquad ,\ \text{si } \chi_p > 0 \end{cases}$$

ou

$$\{L^o(o,x_n\,;\omega,\,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = o,\ \text{si } \chi_p = 0$$

n'admet que la solution $v = o$ dans $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}_+)$.

II.2.2. Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq o$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p\, u = \begin{cases} (Lu\ ,\ B_p\ \gamma u) & \text{si } \chi_p \quad 0 \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0\ . \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p=0$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}^*_p$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$ dans $\prod_{i=1}^{M} \left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$ si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = 0$).

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.3.

Soit un entier $p \geq o$. On suppose que les conditions $H_o(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p\,;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p\,;\mathbb{R}^n_+)$ sont réalisées. Alors, pour tout entier $q \geq o$ tel que le polynôme $\phi^o(\rho)$ n'ait pas de zéro ρ dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \text{Re}\,\rho \leq -p-\frac{1}{2}$, il existe deux constantes $\varepsilon_q > 0$ et $C_q > 0$ telles que : si u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$, si le support de u est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon ε_q et si $\mathcal{P}_p u$ appartient à $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}^n_+)$) alors :

(i) u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}^n_+)$

(ii) $$\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

(resp. $$\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

Remarque II.2. Lorsque q=o, le terme $\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ figurant dans le terme complémentaire $\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ des estimations précédentes peut être remplacé par $\|(1+x_n)^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $\alpha_j < t_j + p$ et par $\|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $\alpha_j \geq t_j + p$.

Théorème II.4.

Soit un entier $p \geq o$. On suppose que les conditions $H_0(\mathbb{R}^n_+)$, $H_1(p ;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p ;\mathbb{R}^n_+)$ et $H_3(p ;\mathbb{R}^n_+)$ sont réalisées. Alors, il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout (f,g) (resp. f) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'$) et à support contenu dans la boule de centre 0 et de rayon ε, on ait :

$$\|(f,g)\|_{\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{\prod_{j=1}^{M} \left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \|f\|_{\prod\limits_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}^{*}_{p} f\|_{\prod\limits_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)\right]'} + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}\right)$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

II.2.3. Démonstration du théorème II.3.

On suppose $\chi_p > 0$. On note $B(o,\varepsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ε.

On démontre tout d'abord l'estimation a priori donnée dans le théorème 2.1, (ii) dans le cas où q=0. Pour cela, on applique le théorème 1.1. au couple d'opérateurs $(L^{o}(0,x_n ; D_{x'}, , D_{x_n}), B^{o}_{p}(0 ; D_{x_M})\gamma)$: il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ on ait :

$$\sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{M} \left\| \sum_{j=1}^{M} L^{o}_{ij}(0,x_n ; D_{x'}, , D_{x_n}) \{u_j(x)\}\right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{\chi_p} \left\| \sum_{j=1}^{M} B^{o}_{ij}(0 ; D_{x'}) \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

(cf. la démonstration du théorème II.1).

Les coefficients des opérateurs L_{ij} et B_{ijq} étant de classe $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, il existe une fonction $\alpha(\varepsilon) > 0$ tendant vers 0 avec ε, telle que pour tout u appartenant à $\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_p+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dont le support est contenu dans $B(0,\varepsilon)$, on ait :

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M} \left\| \sum_{j=1}^{M} (L^{o}_{ij}(x,x_n ; D_{x'} ; D_{x'}, , D_{x_n}) - L^{o}_{ij}(o,x_n ; D_{x_n})) \{u_j(x)\}\right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\qquad\qquad \leq \alpha(\varepsilon) \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C(\varepsilon) \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\sum_{i=1}^{\chi_p} \left\| \sum_{j=1}^{M} (B^{o}_{ij}(x' ; D_{x'}) - B^{o}_{ij}(o ; D_{x'})) \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&\qquad\qquad \leq \alpha(\varepsilon) \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C(\varepsilon) \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)}
\end{aligned}\right.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients des opérateurs L_{ij} et B_{ijq} impliquent l'existence d'une constante $\alpha > o$ telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ on ait :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M} \left\| \sum_{j=1}^{M} (L^o_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n}) - L_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n}))\{u_j(x)\}\right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \qquad\qquad \leq \alpha \|u\|_{\prod_{i=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \sum_{i=1}^{\chi_p} \left\| \sum_{j=1}^{M} (B^o_{ij}(x',D_{x'}) - B_{ij}(x';D_{x'}))\gamma u\right\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} . \end{cases}$$

Des inégalités précédentes, on déduit le théorème II.3 (ii) lorsque q=o. La remarque II.2 se démontre en notant que pour tout $\beta > o$, il existe $C_\beta > 0$ telle que, pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$, on ait :

$$\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C_\beta \|(1+x_n^{\alpha_j})u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{lorsque } \alpha_j < t_j + p - 1$$

$$\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C_\beta \|x_n^{\alpha_j}\, u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{lorsque } \alpha_j \geq t_j + p - 1$$

On démontre maintenant le théorème II.3 ((i),(ii)) dans le cas où $q \geq 1$. Cette démonstration sera faite par récurrence sur q. Soit tout d'abord u appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ tel que son support soit contenu dans $B(o,\varepsilon)$ avec $o < \varepsilon < \varepsilon_o$ et tel que $\mathcal{P}_p u$ appartienne à $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On suppose de plus que le polynôme $\phi^o(\rho)$ n'a pas de zéro ρ dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq -p-\frac{1}{2}$.

On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R}-\{o\}$ et i compris entre 1 et n-1, on pose :

$$\tau_{ih}\, v(x) = v(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n)$$

$$\rho_{ih}\, v(x) = \frac{1}{h}(\tau_{ij}\, v(x) - v(x)).$$

Si h satisfait à $o < |h| < \frac{1}{2}(\varepsilon_o - \varepsilon)$, les supports de $\tau_{ih} v$ et $\rho_{ih} v$ sont contenus dans $B(o,\varepsilon')$ avec $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon_o - \varepsilon)$ dès que le support de v est contenu dans $B(o,\varepsilon)$. On a :

$$L_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\{\rho_{ih}\, u_j(x)\} = \rho_{ih}\,(L_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\{u_j(x)\}) + \sum_{h=o}^{\alpha_j}\ \sum_{\ell=o}^{s_i+t_j-h}\ \sum_{|\alpha|=o}^{s_i+t_j-h-\ell} \rho_{ih}\,(p_{ij,\ell,\alpha}^{s_i+t_j-h}(x))\, D_{x'}^{\alpha}\, D_{x_n}^{\ell}\, \{\tau_{ih}(x_n^{\alpha_j-h}\, u_j(x))\}\,.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de l'opérateur L impliquent l'existence d'une constante $\alpha > o$, indépendante de u et de h telle que :

$$\Big\|\sum_{j=1}^{M} L_{ij}(\rho_{ih}\, u_j)\Big\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} \le \alpha \left\{\Big\|\rho_{ih} \sum_{j=1}^{M} L_{ij}\, u_j\Big\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)}\right\}$$

et de même

$$\Big\|\sum_{j=1}^{M} B_{ij}\gamma(\rho_{ih} u_j)\Big\|_{H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le \alpha \left\{\Big\|\rho_{ih} \sum_{j=1}^{M} B_{ij}\,\gamma\, u_j\Big\|_{H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)}\right\}$$

Les estimations obtenues pour q=o et complétées par la remarque II.2 appliquées à $\rho_{ih}\, u$ (pourvu que $0 < \varepsilon' < \varepsilon_o$) donnent :

$$\|\rho_{ih} u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \le C_o \left\{ \|\mathcal{P}_p(\rho_{ih} u)\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{M} \|(1+x_n^{\alpha_j})\rho_{ih} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\right\}$$

(lorsque $\alpha_j \ge t_j + p$, le terme $\|(1+x_n^{\alpha_j})\rho_{ih} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ pouvant être remplacé par $\|x_n^{\alpha_j}\, \rho_{ih}\, u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$).

D'autre part, il existe une constante β, indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $0 < |h| < 1$) telle que

$$\Big\|\rho_{ih} \sum_{j=1}^{M} L_{ij} u_j\Big\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)} \le \beta\, \Big\|\sum_{j=1}^{M} L_{ij}\, u_j\Big\|_{H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\Big\|\rho_{ih} \sum_{j=1}^{M} B_{ij}\, \gamma u_j\Big\|_{H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le \beta\, \Big\|\sum_{j=1}^{M} B_{ij}\, \gamma\, u_j\Big\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\,.$$

Enfin, il existe une constante δ, indépendante de u et de h telle que :

$$\|(1+x_n^{\alpha_j})\ \rho_{ih}\ u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \delta \|u_j\|_{W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{lorsque } \alpha_j < t_j + p$$

$$\|x_n^{\alpha_j}\ \rho_{ih}\ u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \delta \|x_n^{\alpha_j}\ u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{lorsque } \alpha_j \geq t_j + p .$$

En regroupant tous les résultats précédents, on déduit que $\rho_{ih}\ u$ demeure dans un borné de $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ lorsque h varie de sorte que $0 < |h| < \frac{1}{2}(\varepsilon_o - \varepsilon)$. Il en résulte que $D_{x_i}\ u_j$ appartient à $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$ avec la majoration :

$$\|D_{x_i} u\|_{\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

pour $i=1,\dots,n-1$.

Pour montrer que u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p+1}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$, il reste à établir que D_{x_n} u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela, on remarque que :

$$\sum_{j=1}^{M} \Big(\sum_{h=o}^{\min(s_i+t_j,\alpha_j)} p^{s_i+t_j-h}_{ij,s_i+t_j-h,o}(x)\ D_{x_n}^{s_i+t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h}\ u_j(x)\} = \sum_{j=1}^{M} L_{ij}\ u_j(x) -$$

$$- \sum_{j=1}^{M} \sum_{h=o}^{\min(s_i+t_j,\alpha_j)} \sum_{\ell=o}^{s_i+t_j,\alpha_j-h-1} \sum_{|\alpha|o}^{s_i+t_j-h-1} p^{s_i+t_j-h}_{ij,\ell,\alpha}(x)\ D^{\alpha}_{x'} D^{\ell}_{x_n} \{x_n^{\alpha_j-h}\ u_j(x)\}$$

appartient à $H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $i=1,\dots,M$. On écrira le premier membre sous la forme $\sum_{j=1}^{M} \big(\sum_{h=o}^{\infty} p^{s_i+t_j-h}_{ij,s_i+t_j-h,o}(x)\ D_{x_n}^{s_i+t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h}\ u_j(x)\}\big)$, les coefficients $p^{s_i+t_j-h}_{ij,s_i+t_j-h,o}$ étant nuls à partir d'un certain rang. On dérive par rapport à $D_{x_n}^{-s_i}$ d'où l'on en déduit que :

$\sum\limits_{j=1}^{M} \left(\sum\limits_{h=o}^{\infty} p_{ij,s_i+t_j-h,o}^{s_i+t_j-h}(x)\, D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h}\, u_j(x)\}\right)$ appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$ pour $i=1,\ldots,M$. Or, le déterminant dét $(p_{ij,s_i+t_j,o}^{s_i+t_j}(o))$ est non nul, d'après l'hypothèse $H_o(\mathbb{R}_+^n)$, donc la matrice $(p_{ij,s_i+t_j,o}^{s_i+t_j}(x))$ est inversible dans $B(o,\varepsilon)$ pourvu que ε soit suffisamment petit. Notant $P_h(x)$ la matrice des de coefficients $p_{ij,s_i+t_j-h,o}^{s_i+t_j-h}(x)$ pour $i,j=1,\ldots,M$ et $D_{x_n}^{t-h}\{x_n^{\alpha-h}\, u(x)\}$ le vecteur colonne de composantes $D_{x_n}^{t_j-h}\{x_n^{\alpha_j-h}\, u_j(x)\}$ pour $j=1,\ldots,M$, on en déduit que :

$$\sum_{h=o}^{\infty} P_o(o)\, P_o^{-1}(x)\, P_h(x)\, (D_{x_n}^{t-h}\{x_n^{\alpha-h}\, u(x)\}) \text{ appartient à } (H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n))^M$$

soit en isolant le premier terme

$$P_o(o)\,(D_{x_n}^{t}\{x_n^{\alpha} u(x)\}) + \sum_{h=1}^{\infty} R_h(x)\,(D_{x_n}^{t-h}\{x_n^{\alpha-h}\, u(x)\}) \text{ appartient à } (H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n))^M$$

On pose :

$$R_h(x) = R_h(x',o) + x_n\, S_h(x)$$

où $S_h(x)$ est une matrice à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $B(o,\varepsilon)$. On introduit l'opérateur $\mathscr{L} \equiv (\mathscr{L}_{ij}(x',x_n\,;D_{x_n}))$ où les $\mathscr{L}_{ij}(x',x_n\,;D_{x_n})$ sont des opérateurs différentiels en x_n, dépendant du paramètre x' et définis par :

$$\mathscr{L}_{ij}(x',x_n\,;D_{x_n})\,\{v(x)\} = p_{ij,s_i+t_j,o}^{s_i+t_j}(o)\; D_{x_n}^{t_j}\{x_n^{\alpha_j}\, v(x)\} + \sum_{h=1}^{\infty} r_h^{ij}(x',o)\, D_{x_n}^{t_j-h}\{x_n^{\alpha_j-h}\, v(x)\}\,.$$

Soit $\phi(x';\rho) = \text{dét}\,(\phi_{ij}(x';\rho-t_j+\alpha_j)$ où $\phi_{ij}(x',\rho) = p_{ij,s_i+t_j,o}^{s_i+t_j}(o)\; i^{\alpha_j}\rho(\rho-1)\ldots$

$$(\rho-\alpha_j+1) + \sum_{h=1}^{\infty} r_h^{ij}(x',o)\; i^{\alpha_j-h}\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-\alpha_j+h+1).$$

Comme pour $h \geq 1$, $p_{ij,s_i+t_j-h,o}^{s_i+t_j-h}(o) = r_h^{ij}(o)$ le polynôme $\phi_{ij}(o;\rho-t_j+\alpha_j)$ coïncide avec le polynôme $\phi_{ij}^{o}(\rho)$. Par suite, dès que (x',o) appartient à

$B(o,\varepsilon)$ avec ε assez petit, le polynôme $\phi(x',\rho)$ n'admet pas de zéro dans la bande $-p-\frac{3}{2} \leq \mathrm{Re}\ \rho \leq -p-\frac{1}{2}$ et le nombre de zéros tels que $\mathrm{Re}\ \rho > -\frac{1}{2}$ est égal à r_p.

Comme $\mathcal{L}u$ appartient à $(H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+))^M$, on déduit de l'étude faite pour les opérateurs à une variable que pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, $u(x',.)$ appartient à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$; et il existe une constante $C>0$ telle que pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$, on a :

$$\|v\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\left\{\|\mathcal{L}(o,x_n;D_{x_n})v\|_{\left[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)\right]^M} + \|v\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}$$

D'après la continuité des coefficients de l'opérateur $\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})$ il existe une constante $\varepsilon > o$ et une constante $C > 0$, telle que pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$ et tout (x',o) appartenant à $B(o,\varepsilon)$ on ait :

$$\|v\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\left\{\|\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})v\|_{\left[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)\right]^M} + \|v\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}$$

On applique cette inégalité à $u(x',.)$ pourvu que le support de u soit contenu dans $B(o,\varepsilon)$

$$\|u(x',.)\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\left\{\|\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\{v(x',x_n)\}\|_{\left[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)\right]^M} + \|v(x',.)\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}$$

Soit :

$$\sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\max(o,\alpha_j-t_j-p-1)} u_j(x',x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^{M} \|x_n^{\alpha_j} u_j(x',x_n)\|_{H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C\left\{\|\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\{v(x',x_n)\}\|_{\left[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)\right]^M} + \sum_{j=1}^{M}\|x_n^{\max(o,\alpha_j-t_j-p)} u_j(x',x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^{M}\|x_n^{\alpha_j} u_j(x',x_n)\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}$$

On intègre par rapport à x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\sum_{j=1}^{M} \| x_n^{\max(o,\alpha_j-t_j-p-1)} u_j \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{M} \| x_n^{\alpha_j} u_j \|_{H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}^{n-1}))}$$

$$\leq C \left\{ \| \mathcal{L} v \|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)]^M} + \sum_{j=1}^{M} \| x_n^{\max(o,\alpha_j-t_j-p)} u_j \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M} \| x_n^{\alpha_j} u_j \|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \right\} .$$

Ainsi $x_n^{\max(o,\alpha_j-t_j-p-1)} u_j$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et $x_n^{\alpha_j} u_j$ appartient à $H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Compte-tenu du fait que $D_{x_i} u_j$ appartient à $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $i=1,\dots,n-1$, on en déduit que u_j appartient à $W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}^n_+)$. De plus, on a la majoration :

$$\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \| \mathcal{P}_p u \|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

Ainsi, on a démontré le théorème II.3 ((i), (ii)) lorsque q=1. Pour $q \geq 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

II.2.4. Démonstration du théorème II.4.

On suppose $\chi_p > 0$. Comme dans la démonstration du théorème 1.2, on peut écrire l'expression de $\mathcal{P}_p^*(f,g)$ dans $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^M$ pour tout (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On applique le théorème II.2 au couple d'opérateurs $(L^o(o,x_n ; D_{x'}, D_{x_n}) ; B_p^o(o,D_{x'})\gamma)$: il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ on ait :

$$\|(f,g)\|_{\prod\limits_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\mathbb{R}^n_+)\right]' \times \prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{j=1}^{M} \Big\| \sum_{i=1}^{M} L^{o*}_{ij}(o,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\{j_{p-s_i}\, f_i\} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1}\, B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}_{ijq}(o,D_{x'})\, g_i \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{\max(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q}\, B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}_{ijq}\, g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n)\Big\|_{\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n_+)\right]'}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i}\, f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\sum\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}$$

La continuité des opérateurs L et B_p et les lemmes 1.4, 1.5 et 1.6, chap. II, [3] prouvent l'existence d'une fonction $\alpha(\varepsilon)$ tendant vers 0 avec ε et d'une fonction $\beta(\varepsilon) > 0$ telles que pour tout (f,g) appartenant à $\prod\limits_{i=1}^{M} H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ et à support contenu dans $B(o,\varepsilon)$ on ait :

$$\sum_{j=1}^{M} \Big\| \sum_{i=1}^{M} (L^{o*}_{ij}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n}) - L^{o*}_{ij}(o,x_n\,;D_{x'},D_{x_n}))\{f_i\}\Big\|_{\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

$$\leq \alpha(\varepsilon)\|f\|_{\prod\limits_{i=1}^{M} H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n)} + \beta(\varepsilon)\, \|f\|_{\prod\limits_{i=1}^{M} H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} \Big\| \sum_{i=1}^{\chi_p} (B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}_{ijq}(x',D_{x'}) - B^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}_{ijq}(o,D_{x'}))$$

$$g_i \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n)\Big\|_{\left[W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

$$\leq \alpha(\varepsilon)\, \|g\|_{\prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\varepsilon)\, \|g\|_{\prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=o}^{\max(o,t_j+p-\alpha_j-1)} \Big\| \sum_{i=1}^{\chi_p} \left(B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}(x',D_{x'}) - B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}(o,D_{x'})\right) g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n)\Big\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

$$\leq \alpha(\varepsilon) \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\varepsilon) \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{M} \Big\| \sum_{i=1}^{M} \left(L_{ij}^{\sigma*}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n}) - L_{ij}^{*}(x,x_n\,;D_{x'},D_{x_n})\right)\{f_i\}\Big\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'}$$

$$\leq C \|f\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1)} \Big\| \sum_{i=1}^{\chi_p} \left(B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}(x',D_{x'}) - B_{ijq}^{*}(x',D_{x'})\right) g_i \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n)\Big\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} \leq C \|g\|_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=o}^{\max(o,t_j+p-\alpha_j-1)} \Big\| \sum_{i=1}^{\chi_p} \left(B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}(x',D_{x'}) - B_{ijq}^{*}(x',D_{x'})\right) g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n)\Big\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} \leq C \|g\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Le théorème II.4 se déduit de ces inégalités.

II.3 ESTIMATIONS A PRIORI DANS L'OUVERT

II.3.1 : Notations et hypothèses

Soit un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \quad \varphi(x) > o\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \varphi(x) = o\} \\ \text{grad} \quad \varphi(x) \neq o \quad \text{pour} \quad x \quad \text{appartenant à } \Gamma \end{cases}$$

Pour $i,j = 1,\dots,M$ soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x;D_x)$ définis sur Ω par :

$$L_{ij}\ u(x) \equiv L_{ij}(x;D_x)\ \{u_j(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x;D_x)\ \{\ \varphi(x)^{\alpha_j-h}\ u(x)\}$$

où (i) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leqslant o$ et $t_j \geqslant o$ (on peut se ramener à ce cas)

(ii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$

(iii) $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$ d'ordre inférieur ou égal à s_i+t_j-h (ou identique à 0 si $s_i+t_j-h < o$)

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x;D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant s_i+t_j-h} P_{ij,\alpha}^{s_i+t_j-h}(x)\ D_x^\alpha$$

On note $P_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x;D_x) = \displaystyle\sum_{|\alpha|=s_i+t_j-h} P_{ij,\alpha}^{s_i+t_j-h}(x)\ D_x^\alpha$

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1,\dots,M}$; cet opérateur induit, pour tout entier $p \geqslant o$, une application linéaire et continue de $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)$ où $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev avec poids

$$\{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\Omega)\ ; \quad \varphi^{\alpha_j}\ u \in H^{t_j+p}(\Omega)\}$$

muni de la norme canonique (pour les propriétés classiques de ces espaces, on renvoie à [3]).

On introduit les conditions :

$\underline{H_o(\Omega)}$: Pour tout x appartenant à Γ et pour tout (ξ,ρ) appartenant à $(T_x \times \mathbb{R})\setminus\{o\}$ où T_x est l'espace cotangent en x à Γ, le polynôme

$$\text{dét}\,(P^{s_i+t_j}_{ij,s_i+t_j}(x;\xi+\rho\ \text{grad}\ \varphi(x)))$$

est non nul et pour tout ξ appartenant à T_x, le nombre $m_+(x;\xi)$ de zéros à partie imaginaire > o du polynôme

$$\text{dét}\,(P^{s_i+t_j}_{ij,s_i+t_j}(x;\xi+\rho\ \text{grad}\ \varphi(x)))$$

en ρ est constant et égal à m_+.

$\underline{H_1(p;\Omega)}$: Pour tout x appartenant à Γ, le polynôme $\phi(x;\rho) = \text{dét}(\phi_{ij}(x;\rho-t_j+\alpha_j))$

où $\phi_{ij}(x;\rho) = \sum_{h=o}^{\min(s_i+t_j,\alpha_j)} P^{s_i+t_j-h}_{ij,s_i+t_j-h}(x;\text{grad}\ \varphi(x))\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-\alpha_j+h+1)$

n'a pas de zéro ρ sur la droite $\text{Re}\rho = -p-\frac{1}{2}$.

$\underline{H_2(p;\Omega)}$: Pour tout x appartenant à Γ, le nombre $r_p(x)$ de zéros du polynôme $\phi(x;\tau)$ tels que $\text{Re}\tau > -p-\frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p et le nombre $\chi_p = m_+-r_p$ est $\geqslant$ o.

Etant donné un élément u de $W^{t_j+p}_{\alpha_j}(\Omega)$, on lui associe t_j+p traces généralisées définies pour x appartenant à Γ par :

$$\gamma_q u(x) = \begin{cases} D^q_t u(\psi^{-1}(x,t))\big|_{t=o} \text{ pour } q=o,\dots,t_j+p-\alpha_j-1 \text{ si } o \leqslant \alpha_j < t_j+p \\ (-1)^{-q-1}\displaystyle\int_o^{+\infty} t^{-q-1}\,\alpha(t)u(\psi^{-1}(x,t))dt \text{ pour } q=-\alpha_j,\dots,\min(-1,t_j+p-\alpha_j-1) \\ \qquad \text{si } 1 \leqslant \alpha_j \end{cases}$$

où α est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ égale à 1 au voisinage de 0 et à support suffisamment petit et ψ est l'isomorphisme de $\{x \in \overline{\Omega}\ ;\ d(x;\Gamma) < \delta\}$ sur $\Gamma \times [o,\delta[$ défini par $\psi(x) = (x_\Gamma, d(x,\Gamma))$, $d(x,\Gamma)$ désignant la distance de x à Γ, δ étant suffisamment petit et x_Γ étant la projection de x sur Γ.

On note $\gamma u = (\gamma_{-\alpha_j} u,\dots,\gamma_{t_j+p-\alpha_j-1}u)$; l'application $\gamma : u \longrightarrow \gamma u$ est linéaire, continue et surjective de $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ sur $\prod_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} H^{t_j+p-\alpha_j-q-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On définit maintenant les opérateurs frontières. Lorsque χ_p est > o pour $i = 1,\ldots,\chi_p$ et $j = 1,\ldots,M$ soient les opérateurs $B_{ij}^p \equiv B_{ij}^p(x;D_\Gamma)$ définis par :

$$B_{ij}^p(x;D_\Gamma)\ \gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(x;D_\Gamma)\ \gamma_q u$$

où $B_{ijq}(x;D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients indéfiniment dérivables sur Γ d'ordre inférieur ou égal à $\sigma_i+t_j-\alpha_j-q$ si $\sigma_i+t_j-\alpha_j-q$ est < o, $B_{ijq}(x';D_\Gamma)$ est l'opérateur identiquement nul, σ_i étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_i \leqslant p-1$.

On note $B_p\gamma$ l'opérateur matriciel $(B_{ij}^p\ \gamma)_{\substack{i=1,\ldots,\chi_p \\ j=1,\ldots,M}}$;

cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) \quad \text{dans} \quad \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On désigne par $B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}(x;D_\Gamma)$ la partie homogène d'ordre $\sigma_i+t_j-\alpha_j-q$ de B_{ijq} $(x : D_\Gamma)$. On pose enfin :

<u>$H_3(p;\Omega)$</u> : Pour tout x appartenant à Γ et pour tout ξ appartenant à T_x, le problème aux limites :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{M} \sum_{h=o}^{\min(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x;\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)\ \{t^{\alpha_j-h}\ u_j(t)\}=o, \quad i=1,\ldots,M \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{M} \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}(x;\xi)\ \gamma_q u_j = 0, \quad i=1,\ldots,\chi_p, \quad \text{si } \chi_p > o \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{ \sum_{j=1}^{M} \sum_{h=o}^{\min(s_i+t_j,\alpha_j)} P_{ij,s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x;\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)\ \{t^{\alpha_j-h}\ u_j(t)\} = o, \quad i=1,\ldots,M \right.$$

n'admet que la solution v=o dans $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$.

<u>Remarque II.3</u> : Les conditions précédentes sont invariantes par difféomorphisme.

II.3.2 : Enoncé des résultats

Pour tout entier $p \geq o$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+1}(\Omega)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu,\ B_p\,\gamma u) & \text{si } \chi_p > o \\ Lu & \text{si } \chi_p = o \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de

$$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) \quad \text{dans} \quad \prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

(resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)$) si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$). On désigne par $[H^{p-s_i}(\Omega)]'$ (resp. $[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)]'$) l'espace dual de $H^{p-s_i}(\Omega)$ (resp. $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de

$$\prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (\text{resp. } \prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\Omega)]') \text{ dans } \prod_{j=1}^{M} [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)]'$$

si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$). On désigne enfin par j_{p-s_i} l'isomorphisme canonique de $[H^{p-s_i}(\Omega)]'$ sur $H_o^{-p+s_i}(\Omega)$ espace des distributions de $H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$.

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.5 : Soit un entier $p \geq o$. On suppose que les conditions $H_o(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées. Alors pour tout entier q tel que le polynôme $\phi(x;\rho)$ n'ait pas de zéro dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq -p-\frac{1}{2}$ pour tout x appartenant à Γ, il existe une constante $C_q > o$ telle que :

si u appartient à $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ et si $\mathcal{P}_p u$ appartient à $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\Omega)$) alors :

(i) u appartient à $\prod_{i=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)$

(ii) $$\|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)} \leq C_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\Omega)} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)} \leq C_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod\limits_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\Omega)} + \|u\|_{\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\Omega)} \right\}\right)$$

si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$)

Théorème II.6 : Soit un entier $p \geqslant o$. On suppose que les conditions $H_o(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées. Alors il existe une constante $C > o$ telle que pour tout (f,g) (resp. f) appartenant à

$$\prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\Omega)\right]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+s_i+\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \left(\text{resp. } \prod_{i=1}^{M} \left[H^{p-s_i}(\Omega)\right]'\right) \text{ on ait :}$$

$$\|(f,g)\|_{\prod\limits_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\Omega)\right]' \times \prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+s_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C \left\{ \|\mathcal{P}_p^{*}(f,g)\|_{\prod\limits_{j=1}^{M}\left[W_{s_j}^{t_j+p}(\Omega)\right]'} + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod\limits_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+s_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \|f\|_{\prod\limits_{i=1}^{M}\left[H^{p-s_i}(\Omega)\right]'} \leqslant C \left\{ \|\mathcal{P}_p^{*} f\|_{\prod\limits_{j=1}^{M}\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)\right]'} + \sum_{i=1}^{M} \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}\right)$$

si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$).

II.3.3 : Démonstration du théorème et du théorème II.6

Par "cartes locales" et "partition de l'unité" on se ramène par un raisonnement classique au théorème II.3 et aux estimations a priori pour les systèmes d'opérateurs elliptiques. On adapte facilement les techniques utilisées (pour $M = 1$) dans [3].

II.4. Existence des solutions dans les espaces $\prod\limits_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$

On utilise les notations du II.3. Soit un entier $p > o$; on se propose d'étudier maintenant le problème aux limites :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ B_p \, \gamma u = g \text{ sur } \Gamma, \quad \text{si } \chi_p > o \end{cases}$$

ou $\{Lu = f$ dans Ω , si $\chi_p = o$

du point de vue de l'existence des solutions dans les espaces $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+q}(\Omega)$

où q est un entier $\geq$ p.

Le but essentiel de cette étude est de montrer que sous les hypothèses de II.3, l'opérateur $\mathcal{P}_p$ est un opérateur à indice de

$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)$) si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$). Moyennant une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur $\mathcal{P}_p$, on montrera que c'est aussi un opérateur à indice de

$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q+s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p+q-s_i}(\Omega)$)

si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = o$), q étant un entier ≥ 1. Enfin, on examinera les conditions de compatibilité du problème en utilisant un problème aux limites adjoint.

Plus précisément, on a :

<u>Théorème II.7</u> : Avec les notations de II.3, on suppose que les conditions $H_o(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées et que pour tout x appartenant à Γ le polynôme $\phi(x;\rho)$ n'a pas de zéro dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\rho \leq -p-\frac{1}{2}$, q étant un entier $\geq o$. Alors pour tout entier r tel que $o \leq r \leq q$ l'opérateur $\mathcal{P}_p$ opérant de

$\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+r}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^{M} H^{p+r-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+r-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p+r-s_i}(\Omega)$)

possède les propriétés suivantes :

(i) C'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de r

(ii) Son noyau est égal à $\left\{ u \in \prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega) \; ; \; \mathcal{P}_p u = o \right\}$

(iii) Son image est composée des éléments (f,g) (resp. f) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i+r}(\Omega) \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p+r-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^{M} H^{p+r-s_i}(\Omega)$) tels que :

$$\langle f,\bar{v}\rangle_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)\times\prod_{i=1}^{M}[H^{p-s_i}(\Omega)]'} + \langle g,\bar{\varphi}\rangle_{\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times\prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

$$\left(\text{resp. } \langle f,\bar{v}\rangle_{\prod_{i=1}^{M} H^{p-s_i}(\Omega)\times\prod_{i=1}^{M}[H^{p-s_i}(\Omega)]'} = 0\right)$$

pour tout (v,φ) (resp. v) appartenant à $\prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $\left(\text{resp. } \prod_{i=1}^{M} [H^{p-s_i}(\Omega)]'\right)$ vérifiant $\mathcal{P}_p^*(v,\varphi) = o$ (resp. $\mathcal{P}_p^* v = o$) si $\chi_p > o$ (resp $\chi_p = o$) ; $\mathcal{P}_p^*$ désignant l'opérateur adjoint de $\mathcal{P}_p$ considéré pour $r = o$.

Démonstration : On déduit le théorème II.7 du théorème II.5 et du théorème II.6 de façon classique.

On en déduit en particulier :

Corollaire II.1 : Avec les notations de II.3, on suppose que les conditions $H_o(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées et que pour tout x appartenant à Γ, le polynôme $\phi(x;\rho)$ n'a pas de zéro dans le demi espace $-p - \frac{1}{2} \geq \mathrm{Re}\,\rho$. Alors le noyau de l'opérateur $\mathcal{P}_p$ dans $\prod_{j=1}^{M} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ est égal à l'espace $\{u \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^M \;;\; \mathcal{P}_p u = o\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON - DOUGLIS et NIRENBERG : "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition II - C.P.A.M. - Vol. XVII, 35-92 (1964).

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Tome 51 - p. 429-463 (1972).

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, p. 55-140, (1973).

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Opérateurs à indice". Publications des séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, tome II (1973).

[5] P. BOLLEY, J. CAMUS - B. HELFFER : "Hypoellipticité partielle d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". C.R.A.S. Paris, 11 mars 1974, Série A - 775.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Régularité de certains espaces de distributions". Astérisque n° 2 et n° 3, 1973.

[7] D.G. DE FIGUEIREDO : "The coerciveness problem for forms over vector valued functions". C.P.A.M. - Vol. XVI, 1963 - p. 63-94.

[8] J. NECAS : "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques". Masson - Paris 1967.
"Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives". Sem. Math. Sup. 1965, Univ. Montréal, 1966.