PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN MERRIEN

Idéaux de l'anneau des séries formelles à coefficients réels et variétés associées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1
« Séminaires d'analyse », , exp. nº 6, p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___1_A5_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

IDEAUX DE L'ANNEAU DES SERIES FORMELLES A COEFFICIENTS REELS ET VARIETES ASSOCIEES.

par

Jean MERRIEN

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier certaines propriétés des idéaux de l'anneau $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ en utilisant des "relèvements" différentiables des séries formelles.

Si X est un fermé de $\mathbb{R}^n$, φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et f sa série de Taylor à l'origine, on dit que f est nulle sur X si $|\varphi(x)|$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x||$ quand $x \in X$ tend vers zéro. On associe ainsi à tout idéal I de $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ l'ensemble $\mathcal{V}(I)$ des germes en 0 des fermés de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels s'annulent tous les éléments de I. C'est la "variété formelle" de l'idéal I.

Réciproquement, à un ensemble $\mathcal{V}$ de germes en 0 de fermés de $\mathbb{R}^n$ on associe l'idéal $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ des séries formelles nulles sur les éléments de $\mathcal{V}$.

Le 1er chapitre est consacré aux définitions et lemmes élémentaires concernant ces variétés formelles.

Dans le 2ème chapitre, on démontre le résultat principal selon lequel, si $I = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$, alors I est l'intersection des noyaux des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ dans $\mathbb{R}[[t]]$ qui annulent I. Cela revient à étudier une variété en utilisant les courbes tracées sur cette variété. On en déduit, par exemple, qu'un idéal est elliptique (c'est-à-dire de variété réduite à $\{0\}$) si, et seulement si, il n'est annulé que par l'homomorphisme nul.

Le chapitre III apporte des précisions aux résultats du chapitre II. En particulier le théorème 1 de ce chapitre permet d'obtenir une courbe tracée sur une variété et approchant, d'une certaine manière, une suite de points donnée.

Le chapitre IV contient quelques applications géométriques des résultats précédents. On y étudie l'ensemble des zéros d'un idéal de fonctions différentiables dans le cas d'une singularité isolée à l'origine.

Une version abrégée de cet article (ne contenant pas le chapitre III et seulement la moitié du chapitre IV) a été publiée au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1971).

I - VARIETES FORMELLES ET LEMMES PRELIMINAIRES.

On note $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_n$ l'algèbre $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$, $T : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_n$ l'application qui à une fonction fait correspondre sa série de Taylor à l'origine. On sait que cette application est surjective. On désigne par $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{F}_n$ et par $\underline{m}$ l'idéal de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions nulles à l'origine.

1 - Rappels de résultats connus.

Le résultat suivant est classique (cf. B. MALGRANGE [1] où le cas analytique est traité. Le cas formel se traite de manière identique).

On rappelle que, si A est un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$, un polynôme $P \in A[t]$ est distingué si P est de la forme : $P(t) = t^p + \sum_{i=1}^{p} a_i t^{p-i}$ où $a_i \in \underline{m}$.

Proposition 1.

Soit $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* $\mathcal{F}_n$, *de hauteur* k. *Alors il existe* n *formes linéaires indépendantes* y_i, $1 \leq i \leq n$, *telles que :*

a) *l'application canonique :* $\mathbb{R}[[y_{k+1},\dots,y_n]] \longrightarrow \mathcal{F}_n/\mathfrak{p}$ *est injective et fait de* $\mathcal{F}_n/\mathfrak{p}$ *un* $\mathbb{R}[[y_{k+1},\dots,y_n]]$*-module de type fini*

b) *il existe dans* $\mathfrak{p}$ *des polynômes distingués en* y_i *de degré* r_i, $1 \leq i \leq k$, $P_i(y_i;y')$, *où* $y' = (y_{k+1},\dots,y_n)$. *On pose* $P_1(y_1;y') = P$ *et* $r_1 = r$. *Alors, si* $\Delta \neq 0$ *est le discriminant de* P, *il existe, pour tout* $f \in \mathcal{F}_n$, *un polynôme en* y_1, $Q(y_1;y')$, *de degré inférieur à* r, *unique, tel que* $\Delta f - Q \in \mathfrak{p}$. *Les polynômes correspondant aux éléments* y_i, $2 \leq i \leq k$, *seront notés* Q_i

c) *il existe un entier* m *tel que, pour tout* $f \in \mathfrak{p}$, $\Delta^m f$ *appartienne à l'idéal engendré par* P *et les* $\Delta y_i - Q_i$, $2 \leq i \leq k$.

d) *pour tout* $f \notin \mathfrak{p}$, *il existe* $g \in \mathcal{F}_n$ *et* $f' \in \mathbb{R}[[y_{k+1},\dots,y_n]]$, *non nul, tel que* $f g - f' \in \mathfrak{p}$.

Proposition 2. (Théorème de Puiseux, cf. R. WALKER [6]).

Soit $P(t,u) = u^r + a_1(t)\,u^{r-1} + \dots + a_r(t)$, *où* $a_i(t)$ *est un élément de* $\mathbb{C}[[t^{r!}]]$, *de terme constant nul. Alors il existe* $u(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, *de terme constant nul, tel que* $P(t,u(t)) = 0$. $P(t,u)$ *se factorise complètement dans* $\mathbb{C}[[t]]\,[u]$ *et, si les coefficients* a_i *sont analytiques, toutes les solutions* $u(t)$ *sont analytiques.*

Soit γ un homomorphisme (unitaire) de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ dans $\mathbb{R}[[t]]$. En posant $\gamma(x_i) = \zeta_i(t)$ on a, pour tout $f \in \mathcal{F}_n$, $\gamma(f) = f(\zeta_1(t),\dots,\zeta_n(t))$. On fait ainsi correspondre à un homomorphisme γ un élément $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ de $\underline{n}^n$. Cette correspondance est une bijection et on notera $\gamma = \zeta^*$.

Avec les hypothèses et notations de la proposition 1 (en remplaçant toutefois y_i par x_i) on a alors :

Proposition 3.

Soit γ' *un homomorphisme de* $\mathbb{R}$*-algèbre de* $\mathbb{R}[[x_{k+1},\dots,x_n]]$ *dans* $\mathbb{R}[[t^{r!}]]$, *avec* $\gamma'(\Delta) \neq 0$, *et* $\zeta_i(t) = \gamma'(x_i)$, $k+1 \leq i \leq n$. *Si l'équation* $P(x_1\,;\zeta'(t)) = 0$ *admet une solution* $\zeta_1(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ *il existe un homomorphisme de* $\mathbb{R}$*-algèbre* γ, *unique, induisant* γ' *sur* $\mathbb{R}[[x_{k+1},\dots,x_n]]$, *tel que* $\gamma(\mathfrak{p}) = 0$ *et* $\gamma(x_1) = \zeta_1(t)$.

La démonstration de cette proposition est faite par J.Cl. TOUGERON [4] (appendice) dans le cas complexe.

2 - Ellipticité et nullité d'une série formelle sur un germe de fermé.

Soient $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $C \geq 0$. On note $B(x,C) = \{y\,;\,\|y-x\| \leq C\}$, la norme étant la norme euclidienne. Soient X un fermé de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}_n$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ telle que $T\varphi = f$.

Définition 1.

On dit que f est elliptique sur X s'il existe un nombre $\alpha > 0$ et un voisinage Ω de 0 tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap X, \quad |\varphi(x)| \geq ||x||^{\alpha}$$

Définition 2.

On dit que f est nulle sur X si, pour tout $\alpha > 0$, il existe un voisinage Ω de 0 tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap X, \quad |\varphi(x)| \leq ||x||^{\alpha}$$

On vérifie immédiatement que ces propriétés ne dépendent effectivement que de f et non de φ. D'autre part, elles ne dépendent que du germe en 0 du fermé X, ce qui permet de définir la notion de série formelle elliptique (resp. nulle) sur un germe à l'origine.

Remarques. a) On voit que : $f = 0 \Longleftrightarrow$ f est nulle sur le germe de $\mathbb{R}^n$

$f \in \underline{n} \Longleftrightarrow$ f est nulle sur le germe de $\{0\}$

b) Si f est elliptique sur le germe de $\mathbb{R}^n$ on dit que f est elliptique.

c) Si f n'est pas elliptique sur X, il existe Y, $0 \subsetneq Y \subset X$, tel que f soit nulle sur Y.

d) Si $f \in \underline{n}$ n'est pas nul sur X, il existe Y, $0 \subsetneq Y \subset X$, tel que f soit elliptique sur Y.

Lemme 1.

Soient $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *une suite de points dans* $\mathbb{R}^n$, *telle que* $\lim_{p \to \infty} x^p = 0$, *et* $f \in \mathcal{F}_n$, *tels que* f *soit elliptique sur* $X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$. *Alors il existe un nombre* $\rho > 0$, *tel que* f *soit elliptique sur* $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B(x^p, ||x^p||^{\rho})$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T\varphi = f$.

Il existe par hypothèse un nombre $\alpha > 0$ tel que pour p assez grand $|\varphi(x^p)| \geq ||x^p||^\alpha$. D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $M > 0$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M||x-y||$, d'où $|\varphi(y)| \geq |\varphi(x)| - M||x-y||$, pour tout couple de points voisins de 0. Il suffit alors de prendre $\rho > \alpha$.

Lemme 2.

Soient $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *une suite de points, telle que* $x^p \neq 0$ *pour tout* p *et* $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$, $f \in \mathcal{F}_n$ *et* ρ *un nombre* > 0. *Si* f *est nulle sur* $\bigcup_p B(x^p, ||x^p||^\rho)$, f *est nulle.*

Démonstration. Posons $B_p = B(x^p, ||x^p||^\rho)$, $B'_p = B(x^p, \frac{1}{2}||x^p||^\rho)$.

Il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que toute dérivée partielle première $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est nulle sur $\bigcup_p B'_p$. En effet, par récurrence, $\frac{\partial^{|\omega|} f}{\partial x^\omega}$ sera nulle sur $\bigcup_p B(x^p, \frac{1}{2^{|\omega|}} ||x^p||^\rho)$ et f sera nulle.

Soient $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T\varphi = f$, et $\beta > 0$.

Il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$|\varphi(x') - \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \leq M||x-x'||^2 \tag{1}$$

pour tout couple (x,x') de points assez voisins de 0.

Fixons $i \in [1,n]$ et soit $\sigma > \rho$. Si p est assez grand, pour tout $x \in B'_p$ il existe $x' \in B_p$ tel que : $x_j = x'_j$ si $j \neq i$ et $|x_i - x'_i| = ||x||^\sigma$.

Pour deux tels points on déduit de (1) :

$$|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \quad |x'_i - x_i| \leq M||x-x'||^2 + |\varphi(x')| + |\varphi(x)| \tag{2}$$

Soit alors $\alpha > \sigma$. Par hypothèse, pour p assez grand, $|\varphi(x)| \leq ||x||^\alpha$ pour tout $x \in B_p$. On déduit alors de (2) :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right| \leq M||x||^\sigma + \frac{||x'||^\alpha + ||x||^\alpha}{||x||^\sigma}$$

et puisque $||x'|| \leq 2||x||$ on a pour p assez grand :

$$\forall i \quad \forall x \in B'_p \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right| \leq M||x||^\sigma + (2^\alpha + 1) \quad ||x||^{\alpha-\sigma} \tag{3}$$

Le nombre β étant fixé, si on a choisi α et σ tels que $\alpha - \sigma > \beta$ et $\alpha > \beta$, il existe p_0 tel que :

$$\forall i \in [1,n] \quad , \quad \forall p \geq p_0 \quad , \quad \forall x \in B'_p : \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right| \leq ||x||^\beta \quad .$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est bien nul sur $\bigcup_p B'_p$ pour tout $i \in [1,n]$.

<u>Lemme 3</u>.

Soit $P(x';x_n)$ *un polynôme distingué en* x_n*, à coefficients séries formelles en* $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$*. On suppose que* P *n'a pas de facteur multiple et donc que son discriminant* $\Delta(x')$ *est non nul. Soit d'autre part* $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* $\mathbb{R}^n$*, telle que* $x'^p = (x_1^p,\dots,x_{n-1}^p) \neq 0$ *pour tout* p*,* $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$ *et que* P *soit elliptique sur* $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$*. Il existe alors, pour tout* p*, une boule* B_p *de centre* x^p *telle que :*

a) P *est elliptique sur* $\bigcup_p B_p$

b) *il existe* $y^p \in B_p$*, tel que* $y'^p = (y_1^p,\dots,y_{n-1}^p) \neq 0$ *et* Δ *est elliptique sur* $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{y'^p\}$.

Démonstration. L'existence des boules B_p, qu'on peut prendre de rayon $||x^p||^\rho$, $\rho > 1$, vérifiant a) résulte du lemme 1.

La projection de B_p sur l'hyperplan $x_n = 0$ contient $B'_p = B(x'^p||x'^p||^\rho)$. Il suffit de montrer qu'il existe $y'^p \in B'_p$ tel que Δ soit elliptique sur $\bigcup_p \{y'^p\}$. Pour cela soit $\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que $T\,\delta = \Delta$, et prenons $y'^p \in B'_p$ tel que $|\delta(y'^p)| = \sup_{y' \in B'_p} |\delta(y')|$. Si Δ n'était pas elliptique sur $\bigcup_p \{y'^p\}$, on pourrait extraire de la suite $(y'^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(y'^p)_{p \in \mathbb{N}_1}$ telle que Δ soit nulle sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}_1} \{y'^p\}$. Puisque pour p assez grand, et pour tout $y' \in B'_p$, $||y'^p|| \leq 2||y'||$, Δ serait nul sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}_1} B'_p$. D'après le lemme 2 ceci impliquerait $\Delta = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3 - Variétés formelles.

Dans ce paragraphe on désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble des germes en 0 des fermés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.

Pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$ on pose :

$$\mathcal{V}(I) = \{X \in \mathcal{G} \;;\; \forall f \in I,\ f \text{ est nulle sur } X\}\ .$$

L'ensemble $\mathcal{V}(I)$ est appelé la variété formelle de l'idéal I.

Définition 2.

Pour toute partie $\mathcal{W}$ de $\mathcal{G}$ on pose :

$$\mathcal{I}(\mathcal{W}) = \{f \in \mathcal{F}_n \;;\; \forall X \in \mathcal{W},\ f \text{ est nulle sur } X\}$$

$\mathcal{I}(\mathcal{W})$ sera l'idéal de l'ensemble de germes $\mathcal{W}$. En particulier, si $\mathcal{V}$ est une variété formelle, $\mathcal{I}(\mathcal{V})$ sera appelé l'idéal de la variété $\mathcal{V}$.

Propriétés.

1) $I_1 \subset I_2 \Longrightarrow \mathcal{V}(I_1) \supset \mathcal{V}(I_2)$

2) $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \Longrightarrow \mathcal{J}(\mathcal{W}_1) \supset \mathcal{J}(\mathcal{W}_2)$

3) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) \supset I$ et $\mathcal{V}(\mathcal{J}(\mathcal{W})) \supset \mathcal{W}$

4) $\mathcal{V}(\mathcal{J}(\mathcal{V}(I))) = \mathcal{V}(I)$ et $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{J}(\mathcal{W}))) = \mathcal{J}(\mathcal{W})$

5) $\mathcal{V}(I_1 + I_2) = \mathcal{V}(I_1) \cap \mathcal{V}(I_2)$

6) $\mathcal{V}(\bar{I}) = \mathcal{V}(I)$ où $\bar{I}$ est la racine de l'idéal I ($\bar{I} = \{f \in \mathcal{F}_n \; ; \; \exists p \in \mathbb{N}, \; f^p \in I\}$).

Notations.

Si $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont deux parties de $\mathcal{G}$ on pose :

$$\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2 = \{X \in \mathcal{G} \; ; \; X = X_1 \cup X_2 \text{ avec } X_i \in \mathcal{W}_i\}.$$

Avec cette notation on a la propriété :

7) $\mathcal{V}(I_1 \cap I_2) = \mathcal{V}(I_1 \; I_2) = \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$ et $\mathcal{J}(\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2) = \mathcal{J}(\mathcal{W}_1) \cap \mathcal{J}(\mathcal{W}_2)$.

La dernière égalité étant évidente, démontrons les premières.
Il est d'abord immédiat que : $\mathcal{V}(I_1 \; I_2) \supset \mathcal{V}(I_1 \cap I_2) \supset \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$.
D'autre part, soit X un fermé dont le germe en 0 appartient à $\mathcal{V}(I_1 \; I_2)$.
Soient f_i, $1 \leq i \leq p$, (resp. g_j, $1 \leq j \leq q$) un système de générateurs de I_1 (resp. I_2) et φ_i (resp. Ψ_j) tel que $T \varphi_i = f_i$ (resp. $T \Psi_j = g_j$).

Si on pose $X_1 = \{x \in X \; ; \; \sup_i |\varphi_i(x)| \leq \sup_j |\Psi_j(x)|\}$

$X_2 = \{x \in X \; ; \; \sup_i |\varphi_i(x)| \geq \sup_j |\Psi_j(x)|\}$

on a $X = X_1 \cup X_2$ et $X_i \in \mathcal{V}(I_i)$, d'où $\mathcal{V}(I_1 \; I_2) \subset \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$.

Définition 3.

Une variété formelle $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$ est irréductible si $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$ implique $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1)$ ou $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_2)$.

On a alors les propriétés suivantes :

8) $\mathcal{V}(I)$ est irréductible $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$ est premier

9) Soit I l'idéal d'une variété (i.e. $I = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$ et en particulier $I = \bar{I}$), et $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ sa décomposition en idéaux premiers.

Alors $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_1) \vee \ldots \vee \mathcal{V}(\mathfrak{p}_r)$ et $\mathfrak{p}_i = \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{p}_i))$.

En particulier toute variété formelle admet une décomposition en variétés irréductibles : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{V}_r$, et cette décomposition est unique sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{V}_i \not\subset \mathcal{V}_j$ pour tout $i \neq j$.

Définition 4.

Un idéal propre I de $\mathcal{F}_n$ est elliptique si $\mathcal{V}(I) = \{0\}$.

Avec cette définition on a :

10) Les propriétés suivantes sont équivalentes

a) I est elliptique

b) I contient un élément elliptique

c) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) = \underline{n}$

4 - Propriétés d'annulation de fonctions différentiables admettant une série de Taylor donnée.

Lemme 4.

Soit $f \in \mathcal{F}_n$, *nulle sur* $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$ *où* $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathbb{R}^n$ *convergeant vers* 0. *Alors il existe* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *et une sous-suite* $(x^p)_{p \in \mathbb{N}_1}$ *de la suite donnée, tels que* $\varphi(x^p) = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}_1$ et $T\varphi = f$.

Démonstration. Soit $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ telle que $T\,\Psi = f$. On peut extraire de la suite donnée une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ telles que les boules $B(x^p, \frac{||x^p||}{2})$, $p\in\mathbb{N}_1$, soient deux à deux disjointes. Puisque $\Psi(x^p)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x^p||$ on sait construire une suite de fonctions ε_p, $p\in\mathbb{N}_1$, telles que $\varepsilon_p(x^p) = \Psi(x^p)$, $\varepsilon_p = 0$ en dehors de $B(x^p, \frac{||x^p||}{2})$ et que $\sum_{p\in\mathbb{N}_1} \varepsilon_p$ converge vers une fonction ε de classe C^∞ plate à l'origine (i.e. $\varepsilon \in \underline{m}^\infty$). Il suffit alors de prendre $\varphi = \Psi - \varepsilon$.

Lemme 5. (cf. B. MALGRANGE [1] chapitre IV).

Soit $a_1,\dots,a_r,z$ *des nombres complexes tels que :*

$$z^r + \sum_{i=1}^{r} a_i\, z^{r-i} = 0.$$

Alors $|z| \le 2 \sup_i |a_i|^{\frac{1}{i}}$.

Lemme 6.

Soit $P(x';x_n) = x_n^r + \sum_{i=1}^{r} a_i(x')\, x_n^{r-i}$ *un polynôme distingué en* x_n *à coefficients dans* $\mathcal{F}_{n-1}$, *nul sur* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$ *où* $x^p = (x'^p, x_n^p)$ *converge vers* 0 . *Alors :*

a) *Il existe* $\rho > 0$ *tel que pour* p *assez grand* $||x^p|| \le ||x'^p||^\rho$

b) *Il existe* $\alpha_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, $T\,\alpha_i = a_i$, *tels que*

$\varphi(x';x_n) = x_n^r + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x')\, x_n^{r-i}$ *s'annule en les points d'une sous-suite de la suite donnée.*

Démonstration. Soit $\alpha_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que $T\,\alpha_i = a_i$ et $\varphi(x';x_n) = x_n^r + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x')\, x_n^{r-i}$. Posons $\varphi(x'^p;x_n^p) = \beta^p$. Alors, d'après le lemme 5 : $|x_n^p| \le 2 \sup\left(|\alpha_1(x'^p)|,\dots,|\alpha_r(x'^p) - \beta^p|^{\frac{1}{r}}\right)$

Puisque $\alpha_i(0) = 0$ et que β_p tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x^p||$, il existe ρ_1 tel que, pour tout σ et tout p assez grand, $|x_n^p| \leq ||x'^p||^{\rho_1} + ||x||^\sigma$. Le a) du lemme s'en déduit immédiatement.

Pour obtenir le b) on extrait une sous-suite de la suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, telle que, dans l'hyperplan d'équation $x_n = 0$, les boules $B(x'^p, \frac{||x'^p||}{2})$, $p\in\mathbb{N}_1$, soient deux à deux disjointes. Ceci est possible si la suite (x^p) n'est pas identiquement nulle. De la même manière que dans le lemme 4 on construit $\varepsilon(x')$, plat en 0, tel que $\varepsilon(x'^p) = \varphi(x'^p;x_n^p)$ pour $p\in\mathbb{N}_1$. Cette construction est possible d'après le a) du lemme. Il suffit alors de remplacer dans φ la fonction $\alpha_r(x')$ par $\alpha_r(x') - \varepsilon(x')$ pour obtenir le b).

Proposition 4.

Soit $\varphi(t,u) = u^r + a_1(t)\, u^{r-1} + \ldots + a_r(t)$, *où* $a_i(t)$ *est une fonction de classe* C^∞*, paire, nulle à l'origine. On suppose que* $f = T\varphi$ *est sans facteur multiple, donc que son discriminant* $\Delta(t)$ *est non nul, et que* $T a_i \in \mathbb{R}[[t^{r!}]]$. *Si pour* $t \neq 0$ *l'équation* $\varphi(t,u) = 0$ *admet* p *racines réelles, il existe* p *fonctions de classe* C^∞, $u_i(t)$, $t\in[1,p]$, *de séries formelles distinctes, telles que* $\varphi(t,u_i(t)) = 0$. *L'équation* $f(t,u) = 0$ *admet alors* p *solutions distinctes dans* $\mathbb{R}[[t]]$.

Démonstration. Appelons $\mathcal{H}(f)$ (resp. $\mathcal{H}(\varphi)$) l'idéal de $\mathcal{F}_2$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$) engendré par $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial u}$ (resp. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$). D'après TOUGERON [4], appendice, $f\in\overline{\mathcal{H}(f)}$, racine de $\mathcal{H}(f)$. Comme Δ est combinaison de f et $\frac{\partial f}{\partial u}$ on en déduit que $\Delta\in\overline{\mathcal{H}(f)}$. Donc il existe dans $\mathcal{H}(f)$ un élément non nul indépendant de u. Il en résulte que cet idéal est un idéal de définition de $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire contient une puissance de l'idéal maximal. Donc $\mathcal{H}(\varphi)$ contient une puissance de l'idéal $\underline{m}$ des fonctions nulles en 0.

Soient k et ℓ deux entiers. On pose $b_i = T^k a_i$ (polynôme de Taylor d'ordre k), $\varphi'(t,u) = u^r + b_1 u^{r-1} + \ldots + b_r$ et $f' = T\varphi'$. Les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}[t^{r!}]$, nuls en 0. D'après ce qui précède on voit que, pour ℓ fixé, on peut trouver k tel que $\varphi' - \varphi \in \underline{m}^{\ell}\, \mathcal{H}(\varphi)^2$. D'après TOUGERON [4] proposition 2, chapitre II, il existe alors $\alpha(t,u)$ et $\beta(t,u)$ éléments de $\underline{m}^{\ell}\, \mathcal{H}(\varphi)$ tels que :

$$\varphi(t,u) = \varphi'(t + \alpha(t,u), u + \beta(t,u)).$$

Si k a été choisi assez grand le discriminant Δ' de f' est non nul. L'équation $\varphi'(t,u) = 0$ a alors, pour $t \neq 0$, q racines réelles distinctes, où q est indépendant de t. D'après la proposition 2 il existe q fonctions analytiques réelles distinctes $\nu_i(t)$, au voisinage de 0, telles que : $\nu_i(0) = 0$ et $\varphi'(t,u) = 0$ est équivalent à $u = \nu_i(t)$ pour un certain i.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe q fonctions $\mu_i(t)$, de classe C^∞, au voisinage de 0, avec $\mu_i(0) = 0$ et $T\mu_i$ deux à deux distincts, telles que $u + \beta(t,u) = \nu_i(t + \alpha(t,u))$ est équivalent à $u = \mu_i(t)$.

On a alors p = q et les solutions de $\varphi(t,u) = 0$ sont les fonctions $\mu_i(t)$.

En effet :
$$\begin{aligned} \varphi(t,u) = 0 &\iff \varphi'(t + \alpha(t,u), u + \beta(t,u)) = 0 \\ &\iff u + \beta(t,u) = \nu_i(t + \alpha(t,u)) \text{ pour un certain } i \in [1,q] \\ &\iff \exists\, i \in [1,q],\ u = \mu_i(t). \end{aligned}$$

II - COURBES FORMELLES ET IDEAUX.

1 - Ellipticité d'une série formelle sur un connexe contenant une suite donnée.

Dans ce paragraphe, si $x = (x_1,\dots,x_n)$, on note x' l'élément $(x_1,\dots,x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ identifiée à l'élément $(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.

Soient $f \in \mathfrak{F}_n$ *et* $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $x^p \neq 0$ *pour tout* p *et* $\lim\limits_{p\to\infty} x^p = 0$. *On suppose* f *elliptique sur* $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$. *Alors il existe :*

a) *Un fermé* F *de* $\mathbb{R}^n$, *contenant une sous-suite de la suite* x^p, *tel que* $F - \{0\}$ *soit connexe et que* f *soit elliptique sur* F.

b) *Une fonction* $\xi(t) = (\xi_i(t))_{1\leq i\leq n}$, *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *de classe* C^∞ *paire et nulle en* 0, *telle que* $\xi(t)\in F$ *pour* t *voisin de* 0 *et que* $\zeta = T\,\xi$ *soit non nul.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 1$ le résultat est évident. Nous passons de $n-1$ à n en utilisant le lemme 3 du chapitre I.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées tel que f soit régulier en x_n, c'est-à-dire $f(0,\dots,0,x_n) \neq 0$, et tel que pour une sous-suite convenable $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de la suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ on ait $x'^p \neq 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}_1$. Par le théorème de préparation formel ([1]) il existe un polynôme distingué $P(x';x_n)$, de degré m, ne différant de f que par un facteur inversible. On peut supposer que f, et donc P, n'a pas de facteur multiple. Le discriminant Δ de P est donc non nul.

Par le lemme 3 du chapitre I dont on reprend les notations, on détermine une suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, $y^p\in B_p$, telle que Δ soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y'^p\}$. L'hypothèse de récurrence, appliquée à Δ et à $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, implique qu'il existe dans $\mathbb{R}^{n-1}$, identifié à l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$, un fermé F' avec $F' - \{0\}$ connexe, contenant une sous-suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$ de la suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, et une fonction $\xi'(t) = (\xi_i(t))$, $i\in[1,n-1]$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, de classe C^∞, paire, nulle et non plate en 0, telle que $\xi'(t)\in F'$ pour t assez petit.

Soit $\chi(x';x_n)$ un polynôme distingué à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, tel que $T\chi = P$. Si δ est le discriminant de χ, on a $T\delta = \Delta$. Puisque δ est elliptique sur F', l'équation $\chi(x';x_n)$, n'a, pour $x'\in F' - \{0\}$, que des racines simples, et le nombre de ces racines qui sont réelles est un entier ℓ indépendant de x' ($\ell = 0$ s'il n'y a pas de racines réelles).

Soient $r_1(x') < r_2(x') < \dots < r_\ell(x')$ ces racines réelles, et $\rho_1(x'),\dots,\rho_{m-\ell}(x')$ les racines complexes. On pose $r_o(x') = -\infty$, $r_{\ell+1}(x') = +\infty$.

Pour $0 \leq i \leq \ell$ on pose $A_i = \{x = (x',x_n)\ ;\ x'\in F' - \{0\},\ r_i(x') < x_n < r_{i+1}(x')\}$. Il existe $k\in[0,\ell]$ et une sous-suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_3}$ de la suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$, tels que : $\forall p\in\mathbb{N}_3$, $y^p\in A_k$.

Nous allons terminer la démonstration de la proposition 4 dans l'hypothèse $k \neq 0$ et $k \neq \ell$. Ces deux cas se traiteraient de manière analogue. D'après le lemme 5, les racines du polynôme distingué χ vérifient :

$$|r_i(x')| \leq H_1||x'||^{\frac{1}{m}} \qquad (1)$$
$$|\rho_j(x')| \leq H_1||x'||^{\frac{1}{m}}$$

où H_1 est une constante positive.

Cette inégalité montre en particulier que les racines $r_i(x')$ et $\rho_j(x')$ sont bornées quand x' est voisin de zéro.

Il en résulte, puisque δ est le produit des carrés des différences des racines de χ , qu'il existe une constante $K_1 > 0$ et un voisinage Ω_1' de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que :

$$\forall x' \in \Omega_1' \cap F' \quad \forall (i_1,i_2) \; \forall (j_1,j_2) \quad \begin{aligned} |r_{i_1}(x')-r_{i_2}(x')| &\geq K_1|\delta(x')|^{\frac{1}{2}} \\ |\rho_{j_1}(x')-\rho_{j_2}(x')| &\geq K_1|\delta(x')|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2}$$

D'après l'ellipticité de δ sur F', il existe alors $\alpha_1 > 0$ et un voisinage Ω_2' tels que :

$$\forall x' \in \Omega_2' \cap F' \quad \forall (i_1,i_2) \; \forall (j_1,j_2) \quad \begin{aligned} |r_{i_1}(x')-r_{i_2}(x')| &\geq ||x'||^{\alpha_1} \\ |\rho_{j_1}(x')-\rho_{j_2}(x')| &\geq ||x'||^{\alpha_1} \end{aligned} \tag{3}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $H_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \quad \forall y \qquad |\chi(x) - \chi(y)| \leq H_2||x - y|| \tag{4}$$

L'ellipticité de χ sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}_3} \{y^p\}$ entraîne qu'il existe $\alpha_2 > 0$ et p_o tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}_3 , \quad p \geq p_o \quad |\chi(y^p)| \geq ||y^p||^{\alpha_2} \tag{5}$$

On déduit de (4) et (5) :

$\forall i \in [1,\ell], \qquad \forall p \in \mathbb{N}_3 \ , \ p \geq p_0$:

$$||y'^{p}||^{\alpha_2} \leq ||y^{p}||^{\alpha_2} \leq |\chi(y^{p})| = |\chi(y^{p}) - \chi(y'^{p}, r_i(y'^{p}))| \tag{6}$$

$$\leq H_2 \, |y^{p}_{n} - r_i(y'^{p})| \qquad .$$

Pour tout nombre réel a, tout $x' \in F'$ et toute racine $\rho_j(x')$ on a : $|a - \rho_j(x')| \geq \frac{1}{2} |\rho_j(x') - \overline{\rho_j(x')}|$.

Donc, d'après (3) : $\forall x' \in \Omega'_2 \cap F', \quad \forall j \in [1, m-\ell], \ |a - \rho_j(x')| \geq \frac{1}{2} ||x'||^{\alpha_1}$.

Puisque, pour tout $x' \in F'$ et tout $x_n \in \mathbb{R}$, on a

$\chi(x', x_n) = \prod_{i=1}^{\ell} (x_n - r_i(x')) \prod_{j=1}^{m-\ell} (x_n - \rho_j(x'))$, on obtient :

$$\forall x' \in \Omega'_2 \cap F' \ , \ \forall x_n \in \mathbb{R} \qquad |\chi(x', x_n)| \geq (\operatorname{Min}_i |x_n - r_i(x')|)^{\ell} \left(\tfrac{1}{2} ||x'||^{\alpha_1}\right)^{m-\ell} \tag{7}$$

Choisissons maintenant un nombre $\beta > \operatorname{Sup}(\alpha_1, \alpha_2)$, et soit $\Omega'_3 = \{x' \in \Omega'_2 \ , \ ||x'||^{\beta} \leq \frac{1}{2} ||x'||^{\alpha_1}\}$.

C'est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On définit un fermé F_1 dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$F_1 = \{0\} \cup \{x = (x', x_n) \ ; \ x' \in \Omega'_3 \cap (F' - \{0\}),$$

$$||x'||^{\beta} \leq \operatorname{Inf}(x_n - r_k(x'), \ r_{k+1}(x') - x_n)\}.$$

C'est un fermé connexe d'après (3). Nous allons voir que P, et donc f, est elliptique sur F_1, et que $y^{p} \in F_1$ pour $p \in \mathbb{N}_3$ assez grand :

Le premier résultat provient de (7) et de (1) car :

$$\forall x = (x',x_n) \in F_1, \ |\chi(x)| \geq (||x'||^{\beta})^{\ell} \quad \frac{1}{2^{m-\ell}} \quad ||x'||^{\alpha_1(m-\ell)}$$

$$\text{et} \qquad |x_n| \leq \operatorname{Min}(|r_k(x')|, \ |r_{k+1}(x')|) \leq H_1||x'||^{\frac{1}{m}} \ .$$

Le second provient de (6), puisque $\beta > \alpha_2$.

On définit maintenant F par $F = F_1 \cup (\bigcup_{p \in \mathbb{N}_3} B_p)$. Il est immédiat que $F - \{0\}$ est connexe et vérifie le a) de la proposition 4.

Montrons qu'on a aussi le b) : par hypothèse de récurrence, il existe une fonction ξ' de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, non plate en 0, paire et telle que $\xi'(t) \in F'$ pour t assez petit.

Considérons l'équation $\chi(\xi'(t),x_n) = 0$. Le discriminant de $\chi(\xi'(t),x_n)$ est $\delta(\xi'(t))$. D'après l'ellipticité de δ sur F', et puisque $\xi'(t) \in F'$ et est non plate en 0, la fonction $\delta(\xi'(t))$ est non plate en 0. Il en résulte que $T\ \chi(\xi'(t),x_n)$, de discriminant $T\ \delta(\xi'(t))$, est sans facteur multiple. En remplaçant t par $t^{m!}$ on peut supposer satisfaites les conditions de la proposition 4 du chapitre I. Il résulte alors de cette proposition qu'il existe deux fonctions de classe C^{∞}, $\mu(t)$ et $\nu(t)$, telles que : $r_k(\xi'(t)) = \mu(t)$ et $r_{k+1}(\xi'(t)) = \nu(t)$.

Prenons λ, $0 < \lambda < 1$, et définissons $\xi(t) = (\xi'(t), \lambda\ \mu(t) + (1-\lambda)\ \nu(t))$.

Pour un tel ξ on a :

$$\min(\xi_n(t) - r_k(\xi'(t)), \ r_{k+1}(\xi'(t)) - \xi_n(t)) = \min(\lambda,\ 1-\lambda)\ (\nu(t) - \mu(t))$$

$$\geq ||\xi'(t))||^{\alpha_1} \ \min(\lambda,\ 1-\lambda) \text{ d'après (3).}$$

Donc pour t assez petit, $\xi(t) \in F_1 \subset F$. D'autre part $T\ \xi \neq 0$.

2 - Variétés formelles et courbes formelles.

Nous reprenons les notations du chapitre I, paragraphes 1 et 3. Pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$ on désigne par $\Gamma(I)$ l'ensemble des homomorphismes unitaires de $\mathbb{R}$-algèbre γ de $\mathcal{F}_n$ dans $\mathbb{R}[[t]]$ tels que $\gamma(I) = 0$. On peut considérer les éléments de $\Gamma(I)$ comme les "courbes" tracées sur $\mathcal{V}(I)$.

Théorème 1.

Soit I *un idéal de* $\mathcal{F}_n$ *tel que* $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

Alors $I = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(I)} \operatorname{Ker} \gamma$.

Démonstration. On peut supposer que I est premier. En effet on a : $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers des composantes irréductibles de $\mathcal{V}(I)$ (propriété 9, chapitre I, § 3). Supposons le théorème démontré pour les idéaux premiers et soit $f \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma(I)} \operatorname{Ker} \gamma$. Alors $f \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma(\mathfrak{p}_i)} \operatorname{Ker} \gamma$, pour tout i, et donc $f \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i$.

Supposons donc $I = \mathfrak{p}$, idéal premier de hauteur k, et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées satisfaisant aux conditions de la proposition 1 chapitre I. Soit $f \notin \mathfrak{p}$. Nous allons construire un homomorphisme $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{p})$ tel que $\gamma(f) \neq 0$.

D'après la proposition 1, chapitre I, dont on reprend les notations avec le changement de y_i en x_i, il existe $f' \in \mathbb{R}[[x_{k+1}, \ldots, x_n]]$, $f' \neq 0$, et $g \in \mathcal{F}_n$, tels que $f\,g - f' \in \mathfrak{p}$.

Puisque $f' \notin \mathfrak{p}$ et $\Delta \notin \mathfrak{p}$, $\Delta\, f' \notin \mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p}$ étant l'idéal d'une variété formelle, il existe X, dont le germe appartient à $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$, et sur lequel $\Delta\, f'$ n'est pas nul. Par suite, il existe dans X une suite $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$, $x^p \neq 0$, pour tout p, convergeant vers 0, telle que $\Delta\, f'$ soit elliptique sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$.

Si $x = (x_1,\dots,x_n)$ on note $x' = (x_{k+1},\dots,x_n)$. Puisque $P(x_1;x')$ est nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$ on déduit du lemme 6, chapitre I, qu'il existe un polynôme distingué en x_1, $\varphi(x_1;x')$, de classe C^∞, qui s'annule en les points d'une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ et tel que $T\varphi = P$.

On applique alors la proposition 1, dans $\mathbb{R}^{n-k}$, à $\Delta(x')\, f(x')$ et à la suite $(x'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ ($x'^p \neq 0$ d'après le lemme 5 chapitre I). Il existe donc un fermé F dans $\mathbb{R}^{n-k}$, paramétré par $(x_{k+1},\dots,x_n)$, avec $F - \{0\}$ connexe, qui contient une sous-suite $(x'^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$ de la suite $(x'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ et tel que $\Delta\, f'$, et a fortiori Δ et f', soient elliptiques sur F. On sait aussi qu'il existe $\xi'(t) = (\xi_i(t))_{k+1\leq i\leq n}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, de classe C^∞, non plate et nulle en 0, telle que $\xi'(t)\in F$ pour t assez petit. Puisque le discriminant de φ, dont la série de Taylor en 0 est Δ, est elliptique sur F et que l'équation $\varphi(x_1;x'^p) = 0$ a des racines réelles pour $p\in\mathbb{N}_2$, l'équation $\varphi(x_1;x') = 0$ a des racines réelles pour tout $x'\in F - \{0\}$ assez voisin de zéro.

En particulier, l'équation $\varphi(x_1;\xi'(t)) = 0$ a des solutions réelles pour t assez petit, et, en remplaçant si nécessaire t par $t^{r!}$, r = degré de φ, on peut supposer que l'équation $\varphi(x_1;\xi'(t)) = 0$ satisfait aux hypothèses de la proposition 4, chapitre I. D'après cette proposition si on pose $\zeta' = T\,\xi'$, il existe $\zeta_1(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ tel que $P(\zeta_1(t);\zeta'(t)) = 0$.

Par la proposition 3 du chapitre I on sait alors qu'il existe un homomorphisme $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{p})$ tel que $\gamma(x_1) = \zeta_1$ et $\gamma(x_i) = \zeta_i$ pour $k+1 \leq i \leq n$. Puisque $\xi'(t)\in F$ et que $\Delta\, f'$ est elliptique sur F, $\gamma'(\Delta\, f') \neq 0$. donc $\gamma(f') = \gamma'(f') \neq 0$. Puisque $f\,g - f'\in\mathfrak{p}$ et que $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{p})$ on a donc $\gamma(f\,g) \neq 0$ et $\gamma(f) \neq 0$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.

Corollaire 1.

Pour tout idéal I *de* $\mathfrak{F}_n$, *on a* $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(I)} \operatorname{Ker} \gamma$.

D'après le théorème 1 il suffit de démontrer que $\Gamma(I) = \Gamma(\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)))$. Soient pour cela $\gamma \in \Gamma(I)$ et $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$. Soient d'autre part ζ tel que $\gamma = \zeta^*$ et ξ tel que $T\,\xi = \zeta$. Si $X = \operatorname{Im} \xi$, le germe de X à l'origine appartient à $\mathcal{V}(I)$. Il en résulte immédiatement que $\gamma(f) = 0$, ce qui montre que $\Gamma(I) \subset \Gamma(\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)))$. L'autre inclusion est évidente.

On note 0 l'homomorphisme associé à $\zeta = 0$. Avec cette notation on a :

Corollaire 2.

Un idéal est elliptique si et seulement si $\Gamma(I) = \{0\}$.

En effet, on a vu, au paragraphe 3 , chapitre I, que I est elliptique si et seulement si $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) = \underline{n}$ et il suffit d'appliquer le corollaire 1.

III - COURBE FORMELLE APPROCHANT UNE SUITE DONNEE.

Dans tout ce chapitre on appellera système de coordonnées adapté à un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{F}_n$, de hauteur k, un système de n formes linéaires de $\mathcal{F}_n$ satisfaisant aux conditions de la proposition 1 chapitre I.
On conservera toujours les notations de cette proposition (au changement de y_i en x_i près). En particulier P, Δ, P_i, Q_i désigneront toujours les mêmes éléments.

Si f_i, $1 \leq i \leq s$, sont des éléments de $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$), on note $(f_1,\ldots,f_s)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) par les f_i.

Pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$ resp. ($\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) et tout entier k, on note $J_k(I)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) par I et tous les jacobiens $\dfrac{D(f_{i_1},\ldots,f_{i_k})}{D(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})}$ où $f_{i_1},\ldots,f_{i_k} \in I$.

De même pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) et tout entier k on note $\sigma_k(I)$ l'idéal engendré par les éléments h tels qu'il existe $g_1,\ldots,g_k$ dans I avec $h\, I \subset (g_1,\ldots,g_k)$.

Dans tout ce chapitre, si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note x' l'élément $(x_{k+1},\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^{n-k}$, identifié à l'élément $(0,\ldots,0,x_{k+1},\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1 - Choix d'un système de coordonnées et déformation d'une suite de points.

Lemme 1.

Soient I *un idéal de* $\mathcal{F}_n$, f_i, $1 \leq i \leq k$, g_j, $1 \leq j \leq k$, *des éléments de* I *et* $h \in \mathcal{F}_n$. *On suppose que* $h\, I \subset (f_1,\ldots,f_k)$ *et que* h *et* $\dfrac{D(g_1,\ldots,g_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}$ *sont elliptiques sur un fermé* X *dont le germe en* 0 *appartient* à $\mathcal{V}(I)$. *Alors* $\dfrac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$ *est elliptique sur* X.

Démonstration. Il suffit de calculer le jacobien $\dfrac{D(hg_1,\dots,hg_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}$.

En dérivant d'abord les produits $h\ g_i$ on obtient :

$$\frac{D(hg_1,\dots,hg_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)} - h^k\ \frac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_1,\dots,x_k)} \in I \qquad (1)$$

En utilisant le fait que $h\ g_i \in (f_1,\dots,f_k)$ on trouve un élément $h_1 \in \mathcal{F}_n$

tel que : $$\frac{D(hg_1,\dots,hg_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)} - h_1\ \frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)} \in I \qquad (2)$$

De (1) on déduit que $\dfrac{D(hg_1,\dots,hg_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}$ est elliptique sur X et

de (2) on déduit que $\dfrac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$ l'est aussi.

Lemme 2.

Soient $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de hauteur* k *de* $\mathcal{F}_n$ *et* $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$ *une suite d'éléments non nuls de* $\mathbb{R}^n$*, convergeant vers* 0 *et dont le germe à l'origine appartient à* $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) - \mathcal{V}(J_k(\mathfrak{p}))$.

Il existe alors une sous-suite X_1 *de* X*, un système de coordonnées* $(x_1,\dots,x_n)$ *adapté à* $\mathfrak{p}$*,* $h \in \mathcal{F}_n$ *et* $f_i \in \mathfrak{p}$*,* $1 \leq i \leq k$*, tels que :*

a) h *et* $\dfrac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$ *soient elliptiques sur* X_1.

b) $h\ \mathfrak{p} \subset (f_1,\dots,f_k)$

On peut supposer en outre que la projection x' *de tout point* $x \in X_1$ *sur la variété définie par* $x_i = 0$*,* $1 \leq i \leq k$*, est différente de* 0.

<u>Démonstration</u>. On sait (TOUGERON [4]) que $\overline{J_k(\mathfrak{p})} \subset \overline{\sigma_k(\mathfrak{p})}$. Il résulte donc de l'hypothèse qu'il existe $h \in \sigma_k(\mathfrak{p})$ et X_1, $0 \subsetneq X_1 \subset X$, tels que h soit elliptique sur X_1. Puisque h est somme d'éléments transportant $\mathfrak{p}$ dans un idéal engendré par k éléments de $\mathfrak{p}$, on peut supposer, en diminuant X_1, qu'il existe $f_1,\dots,f_k$ dans $\mathfrak{p}$ tels que $h\,\mathfrak{p} \subset (f_1,\dots,f_k)$. De l'hypothèse résulte aussi qu'il existe $g_1,\dots,g_k$ dans $\mathfrak{p}$, $i_1,\dots,i_k$ dans $[1,n]$ et X_2, $0 \subsetneq X_2 \subset X_1$, tels que $\dfrac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ soit elliptique sur X_2.

D'après le lemme 1, $\dfrac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ est alors elliptique sur X_2.

Soient φ_i, $1 \leq i \leq k$, des éléments de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tels que $T\varphi_i = f_i$. On peut, en modifiant l'ordre des x_i, trouver X_3, $0 \subsetneq X_3 \subset X_2$, tels que

$$\left|\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}(x)\right| = \sup_{(i_1,\dots,i_k)} \left|\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}(x)\right| \quad \text{pour tout } x \in X_3 .$$

Soit alors $(y_1,\dots,y_n)$ un système de formes linéaires indépendantes :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j\, y_j \quad , \; a_i^j \in \mathbb{R} .$$

On a : $$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(y_1,\dots\dots,y_k)} = \sum_{i_1<i_2\dots<i_k} \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}\,\frac{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}{D(y_1,\dots\dots,y_k)} .$$

Si on a choisi $a_i^i = 1$ pour tout i, on peut trouver ε tel que pour ε tout repère y_i défini par des coefficients a_i^j satisfaisant à $|a_i^j| < \varepsilon$ pour $i \neq j$, le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\dots\varphi_k)}{D(y_1,\dots,y_k)}$ soit elliptique sur X_3.

Comme l'ensemble des systèmes de coordonnées adaptés à $\mathfrak{p}$ est partout dense dans l'espace des repères, on peut, dans le voisinage d'ordre ε du repère $(x_1,\dots,x_n)$ défini ci-dessus, trouver un repère $(y_1,\dots,y_n)$ adapté à $\mathfrak{p}$ satisfaisant aux conditions a) et b) du lemme 2.

La dernière assertion de ce lemme est évidente.

Lemme 3.

Soit $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$ *une suite de points de* $\mathbb{R}^n - \{0\}$, *convergeant vers* 0, *telle que* $x'^p = (x^p_{k+1},\dots,x^p_n) \neq 0$ *pour tout* p. *Soient d'autre part des éléments* f_i *de* $\mathcal{F}_n$, $1 \leq i \leq k$, *et un élément* f' *non nul de* $\mathbb{R}[[x_{k+1},\dots,x_n]]$. *On suppose que* $\dfrac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$ *est elliptique sur* X *et que le germe de* X *en* 0 *appartient à* $\mathcal{V}(f_1,\dots,f_k)$. *Alors il existe une sous-suite* $X_1 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{x^p\}$ *de* X *telle que, pour tout* $\rho > 0$, *on ait la propriété suivante :*

Il existe une suite $y^p \in B(x^p, ||x^p||^\rho)$, *avec* $y'^p \neq 0$, *telle que* f' *soit elliptique sur* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y'^p\}$ *et que* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y^p\} \in \mathcal{V}(f_1,\dots,f_k)$.

Démonstration. Par le lemme 4 du chapitre I, on prend une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de la suite donnée, et des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, telles que $T\varphi_i = f_i$ et $\varphi_i(x^p) = 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}_1$.

Nous allons utiliser le lemme des fonctions implicites (TOUGERON - MERRIEN [5] chapitre 2) dont on garde les notations, en prenant pour application Θ :

$$\Theta(x_1,\dots,x_n) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x),x_{k+1},\dots,x_n).$$

Avec les notations de ce lemme on a : $\delta = \dfrac{D(\Theta_1,\dots,\Theta_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$.

D'après l'hypothèse il existe donc α tel que, pour $p \in \mathbb{N}_1$ assez grand,

$$|\delta(x^p)| \geq ||x^p||^{\alpha} \qquad (1)$$

Posons $a = x^p$, $a' = x'^p$ identifié à $(0,\dots,0,x^p_{k+1},\dots,x^p_n)$.

D'après le lemme cité il existe des constantes positives, C et C'', telles que, pour tout $\rho_a \leq |\delta(a)|$, Θ induise une bijection de $\mathcal{V}_a = \Theta^{-1}(B_a) \cap B(a, C\rho_a)$ sur $B_a = B(\Theta(a), C''|\delta(a)|\rho_a)$.

Pour tout $\rho > 0$ donné, il existe $\sigma > 0$, indépendant de a, et $\rho_a \leq |\delta(a)|$ tels que :

$$C''|\delta(a)|\rho_a \geq ||a'||^{\sigma} \quad \text{et } C\rho_a \leq ||a||^{\rho} \qquad (2)$$

En effet, si $\delta(0) = 0$, on prend pour ρ_a une puissance convenable de $|\delta(a)|$ et on utilise l'inégalité (1). Si $\delta(0) \neq 0$ on prend pour ρ_a une puissance de $||a||$.

Puisque $\varphi_i(a) = 0$, $\Theta(a) = a'$ et, d'après (2), pour tout $y' = (y_{k+1},\dots,y_n) \in B(a',||a'||^{\sigma}) \subset B(a',C''|\delta(a)|\rho_a)$, il existe $y = (y_1,\dots,y_k,y') \in B(a,C\rho_a) \subset B(a,||a||^{\rho})$ tel que $\varphi_i(y) = 0$.

D'après le lemme 2, chapitre I, f', qui est non nul, ne peut être nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} B(x'^p,||x'^p||^{\sigma})$, et donc il existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$, et pour tout $p \in \mathbb{N}_2$ un élément $y'^p \in B(x'^p,||x'^p||^{\sigma})$ tels que f' soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_2} \{y'^p\}$.

Il existe alors $y^p \in B(x^p,||x^p||^{\rho})$, $p \in \mathbb{N}_2$, tel que $\varphi_i(y^p) = 0$ et se projetant en y'^p sur le sous-espace défini par $x_i = 0$, $1 \leq i \leq k$. Les fonctions φ_i étant nulles aux points y^p, $p \in \mathbb{N}_2$, les éléments f_i sont nuls sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_2} \{y^p\}$.

2 - Ensemble de zéros pour Δ elliptique.

Lemme 4.

Soient $\mathfrak{p}$ *un idéal premier, de hauteur* k, *de* $\mathcal{F}_n$, *et* $(x_1,\dots,x_n)$ *un système de coordonnées adapté à* $\mathfrak{p}$. *Soient* $\varphi(x_1;x')$ (resp. $\varphi_i(x_i,x')$, $2 \leq i \leq k$) *des polynômes distingués à coefficients dans* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$ *tels que* $T\varphi = P$ (resp. $T\varphi_i = P_i$), $\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$ *tel que* $T\delta = \Delta$, *et* $\Psi_i(x_1;x')$, $2 \leq i \leq k$, *des polynômes en* x_1 *tels que* $T\Psi_i = Q_i$. *Soient encore un fermé* $F' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ *identifié au sous-espace de* $\mathbb{R}^n$ *défini par* $x_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, *et* $\xi' \in (\check{\mathcal{E}}(\mathbb{R}))^{n-k}$.

On suppose que $F' - \{0\}$ *est connexe, que* Δ *est elliptique sur* F', *que* $\xi'(0) = 0$, $T\xi' \neq 0$ *et que* $\xi'(t) \in F'$ *pour* t *assez petit. On note* $\omega_\ell(x')$, $1 \leq \ell \leq s$, *les racines réelles du polynôme* $\varphi(x_1;x')$ *quand* $x' \in F' - \{0\}$.

Si $s > 0$ *on pose :*

$$F_\ell = \{0\} \cup \{x = (\omega_\ell(x'), \frac{\Psi_2(\omega_\ell(x'),x')}{\delta(x')}, \dots\dots, \frac{\Psi_k(\omega_\ell(x'),x')}{\delta(x')}, x'), x' \in F' - \{0\}\}.$$

Alors a) *Il existe* $\rho > 0$ *et* $C > 0$ *tels que, pour tout* $x \in F_\ell - \{0\}$, $||x|| \leq C||x'||^\rho$; F_ℓ *est un fermé,* $F_\ell - \{0\}$ *est connexe, et le germe de* F_ℓ *en* 0 *appartient à* $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

b) *Pour tout* $\ell \in [1,s]$, *il existe* $\xi \in (\check{\mathcal{E}}(\mathbb{R}))^n$, *avec* $(\xi_{k+1},\dots,\xi_n) = \xi'$, $\xi(0) = 0$, $\xi(t) \in F_\ell$ *pour* t *assez petit et* $(T\xi)^* \in \Gamma(\mathfrak{p})$.

Démonstration. On montre facilement (voir par exemple NARASHIMAN [3] pour le cas analogue des idéaux de fonctions analytiques) que dans l'anneau $\mathbb{R}[[x_{k+1},\dots,x_n]]\ [x_1,x_i]$, $2 \leq i \leq k$, on a l'identité :

$$\Delta^{r_i} P_i \equiv 0 \qquad \text{Mod } (P, \Delta x_i - Q_i)$$ (on rappelle que r_i = degré P_i).

Il en résulte que $\delta^{r_i}(x')\,\varphi_i(x_i;x')$ est égal, modulo$(\varphi, \delta\, x_i - \Psi_i)$ à une fonction $\sum_{j=0}^{s_i} \alpha_{i,j}\,(x_1;x')\,x_i^j$, où $\alpha_{i,j}$ est un polynôme en x_1 plat à l'origine. Donc, si $x' \in F' - \{0\}$:

$$\delta^{r_i}(x')\,\varphi_i\left(\frac{\Psi_i(\omega_\ell(x');x')}{\delta(x')};x'\right) = \sum_{j=0}^{s_i} \alpha_{i,j}\,(\omega_\ell(x');x')\,\left(\frac{\Psi_i(\omega_\ell(x');x')}{\delta(x')}\right)^j .$$

Puisque $\omega_\ell(x')$ est racine du polynôme distingué $\varphi(x_1;x')$, il existe, d'après le lemme 5 chapitre I, deux nombres $\rho_1 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que $|\omega_\ell(x')| \leq C_1 ||x'||^{\rho_1}$ (1) .

Puisque Ψ_i et $\alpha_{i,j}$ sont polynomiaux en x_1, que $\Delta(x')$ est elliptique sur F', et que $\alpha_{i,j}$ est plat à l'origine, la quantité

$$\chi(x') = \frac{1}{(\delta(x'))^{r_i}} \sum_{j=0}^{s_i} \alpha_{ij}\,(\omega_\ell(x');x')\,\left(\frac{\Psi_i(\omega_\ell(x');x')}{\delta(x')}\right)^j$$

tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x'||$, quand $x' \in F' - \{0\}$.

On a $\varphi_i\left(\frac{\Psi_i(\omega_\ell(x');x')}{\delta(x')};x'\right) = \chi(x')$, et $\varphi_i(x_i;x')$ est un polynôme distingué. En utilisant de nouveau le lemme 5 du chapitre I on voit qu'il existe $\rho_2 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que : $\left|\frac{\Psi_i(\omega_\ell(x');x')}{\delta(x')}\right| \leq C_2\,||x'||^{\rho_2}$ (2) .

L'existence de $\rho > 0$ et $C > 0$ tels que $||x|| \leq C||x'||^{\rho}$ pour $x \in F_\ell$ résulte de (1) et (2).

Il est alors évident que F_ℓ est fermé et $F_\ell - \{0\}$ connexe.

D'autre part le germe en 0 de F_ℓ appartient à $\mathcal{V}(P, \Delta\, x_2 - Q_2, \ldots, \Delta\, x_k - Q_k)$. D'après la proposition 1 du chapitre I, $\Delta^m \mathfrak{p} \subset (P, \Delta\, x_2 - Q_2, \ldots, \Delta\, x_k - Q_k)$. Puisque Δ est elliptique sur F', et donc sur F_ℓ d'après $||x|| \leq C||x'||^{\rho}$, il en résulte bien que le germe en 0 de F_ℓ appartient à $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Montrons maintenant le b). Le polynôme φ est de degré r, donc, en remplaçant t par $t^{r!}$, on peut supposer que les conditions de la proposition 4 du chapitre I sont satisfaites. Il existe alors, d'après cette proposition, s fonctions de classes C^∞, $\xi_1^\ell(t)$, $1 \leq \ell \leq s$, telles que $\varphi(\xi_1^\ell(t);\xi'(t)) = 0$. Si on pose $\xi_i^\ell(t) = \dfrac{\Psi_i(\xi_1^\ell(t);\xi'(t))}{\delta(\xi'(t))}$, $2 \leq i \leq k$, on déduit du a) que ξ_i^ℓ est de classe C^∞. L'application ξ^ℓ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\xi^\ell(t) = (\xi_1^\ell(t),\dots,\xi_k^\ell(t),\xi'(t))$ satisfait alors au b) du lemme.

Lemme 5.

On reprend les hypothèses du lemme 4. Soit, de plus, une suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, *avec* $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$ *et* $x'^p \in F' - \{0\}$, *telle que* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\} \in \mathcal{V}(\mathfrak{P})$.

Alors a) *L'élément* φ *du lemme 4 peut être choisi de manière que* $\varphi(x^p) = 0$ *pour une sous-suite* $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ *de la suite donnée.*

b) $s > 0$ *et il existe* $\ell \in [1,s]$ *tel que* $d(x^p,F_\ell)$ *tende vers* 0 *plus vite que toute puissance de* $||x^p||$, *quand* $p\in\mathbb{N}_1$ *tend vers l'infini.*

Démonstration. Le a) résulte du lemme 6 du chapitre I, puisque $P\in\mathfrak{P}$ est nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$. On en déduit que s est positif. Du même lemme, appliqué aux polynômes P_i nuls sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$ on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour $p\in\mathbb{N}_1$ assez grand :

$$||x^p|| \leq ||x'^p||^\alpha \qquad (1)$$

Si maintenant on choisit $\ell\in[1,s]$ et une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$ tels que $\omega_\ell(x'^p) = x_1^p$ pour $p\in\mathbb{N}_2$, et si on pose

$$y^p = (\omega_\ell(x'^p), \frac{\Psi_2(\omega_\ell(x'^p),x'^p)}{\delta(x'^p)}, \dots\dots, \frac{\Psi_k(\omega_\ell(x'^p);x'^p)}{\delta(x'^p)}, x'^p),$$

alors $y^p\in F_\ell$ et :

$$d(x^p,F_\ell) \leq ||x^p-y^p|| \leq \sum_{i=2}^{k} \left| x_i^p - \frac{\Psi_i(\omega_\ell(x'^p);x'^p)}{\delta(x'^p)} \right| \qquad (2).$$

Or $\Delta x_i - Q_i \in \mathcal{P}$ est nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$. Puisque Δ est elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x'^p\}$ on voit donc que $\left| x_i^p - \frac{\Psi_i(\omega_\ell(x'^p);x'^p)}{\delta(x'^p)} \right|$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x'^p||$. Des inégalités (1) et (2) on déduit alors que $d(x^p, F_\ell)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x^p||$ quand $p\in\mathbb{N}_2$ tend vers l'infini.

3 - Le théorème principal.

Soit I un idéal de $\mathcal{F}_n$, $f\in \underline{n}$ idéal maximal de $\mathcal{F}_n$ et $X\in\mathcal{V}(I) - \mathcal{V}(f)$. Puisque $f \notin \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$ il résulte du corollaire 1 du théorème 1 chapitre II qu'il existe $\gamma\in\Gamma(I) - \Gamma(f)$. Le théorème suivant précise ce résultat en déterminant une "courbe" γ "proche" de X.

Théorème 1.

Soient I *un idéal de* $\mathcal{F}_n$, $f\in\mathcal{F}_n$ *et* $X\in\mathcal{V}(I) - \mathcal{V}(f)$. *Il existe alors* $\xi\in(\mathcal{E}(\mathbb{R}))^n$, *un fermé* $F\subset\mathbb{R}^n$, *avec* $F - \{0\}$ *connexe, et une suite* (x^p) *de points de* $(F - \{0\})\cap X$ *convergeant vers* 0, *tels que :*

a) f *est elliptique sur* F

b) $\xi(t)\in F$ *pour* t *assez petit*

c) $T\,\xi \neq 0$ *et* $(T\,\xi)^*\in\Gamma(I)$.

Démonstration. Nous procédons en quatre étapes :

1°) On peut supposer que I est l'idéal premier, de hauteur k, d'une variété irréductible, $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\} \notin \mathcal{V}(J_k(I))$, et que $f\in\underline{n}$ est elliptique sur X.

En effet, on peut tout d'abord supposer que $I = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$ et que f est elliptique sur X. Nous montrons ensuite, par récurrence sur la cohauteur de l'idéal I, qu'il existe X_1, $0 \subsetneq X_1 \subset X$, et $\mathfrak{P}$ idéal premier de hauteur k d'une variété irréductible, $\mathfrak{P} \supset I$ et $X_1 \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}) - \mathcal{V}(J_k(\mathfrak{P}))$.

Soit, pour cela, la décomposition de I en les idéaux premiers des composantes irréductibles de $\mathcal{V}(I)$ (chapitre I paragraphe 3) :

$I = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_r$.

Alors $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ où $X_i \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}_i)$. Il existe un indice i_0 tel que $X_{i_0} \supsetneq \{0\}$, car $X \supsetneq \{0\}$. Posons $ht(\mathfrak{P}_{i_0}) = k_0$.

Deux cas peuvent se présenter :

a) $X_{i_0} \notin \mathcal{V}(J_{k_0}(\mathfrak{P}_{i_0}))$. Ceci se produit en particulier si coht I = 1 car dans ce cas $J_{k_0}(\mathfrak{P}_{i_0}) \supsetneq \mathfrak{P}_{i_0}$ est un idéal de définition de $\mathcal{F}_n$ et donc de variété réduite à $\{0\}$.

Dans ce cas on prend $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{i_0}$.

b) $X_{i_0} \in \mathcal{V}(J_{k_0}(\mathfrak{P}_{i_0}))$. Alors, puisque $coht(J_{k_0}(\mathfrak{P}_{i_0})) < coht\ \mathfrak{P}_{i_0} \leq coht\ I$, on applique l'hypothèse de récurrence à $J_{k_0}(\mathfrak{P}_{i_0})$ et X_{i_0}.

On supposera dans la suite de la démonstration que $I = \mathfrak{P}$, $ht\ \mathfrak{P} = k$, $\mathfrak{P}$ idéal premier, f elliptique sur $X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$ et $X \notin \mathcal{V}(J_k(\mathfrak{P}))$.

2°) Il existe un système de coordonnées adapté à $\mathfrak{P}$, $(x_1,\dots,x_n)$, une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de X et un nombre ρ tels que :

i) f est elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} B(x^p, ||x^p||^\rho)$

ii) il existe une suite $y^p \in B(x^p, ||x^p||^\rho)$ telle que

$Y = \bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y^p\} \in \mathcal{V}(\mathfrak{P})$, $y'^p \neq 0$, et que Δ f' soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y'^p\}$, où f' désigne un élément non nul de $\mathbb{R}[[x_{k+1},\dots,x_n]]$ appartenant à l'idéal engendré par $\mathfrak{P}$ et f (élément qui existe d'après la proposition 1 chapitre I).

En effet, on applique le lemme 2 pour trouver un système de coordonnées adapté à $\mathfrak{p}$ et des éléments $h \in \mathcal{F}_n$, $f_i \in \mathfrak{p}$ tels que $h\mathfrak{p} \subset (f_1,\dots,f_k)$ et que h et $\frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}$ soient elliptiques sur une première sous-suite X_1 de X. D'après le lemme 1 chapitre I il existe $\rho > 0$ telle que f et h soient elliptiques sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} B(x^p, 2||x^p||^\rho)$. On applique alors le lemme 3 avec ce nombre ρ, cette suite X_1 et en remplaçant f' par $\Delta f'$.

On obtient ainsi une seconde sous-suite X_2 et une suite $Y = (y^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$, qui vérifient les propriétés i) et ii), car il reste seulement à vérifier que $Y \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Or ceci résulte de $h\,\mathfrak{p} \subset (f_1,\dots,f_k)$ et de ce que h est elliptique sur Y.

3°) D'après la proposition 1 chapitre II, appliquée dans $\mathbb{R}^{n-k}$ à $\Delta f'$ et à la suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, il existe un fermé $F' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ tel que $F' - \{0\}$ soit connexe, $y'^p \in F'$ pour $p \in \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1$ et que $\Delta f'$ soit elliptique sur F'.

Nous appliquons maintenant les lemmes 4 et 5 à la suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$: avec les notations de ces lemmes, on peut trouver φ et $\mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2$, tels que $\varphi(y^p) = 0$ pour $p \in \mathbb{N}_3$, et $\ell \in [1,s]$ tels que $d(y^p, F_\ell)$ décroisse plus vite que toute puissance de $||y^p||$.

Alors f est elliptique sur F_ℓ : sinon il existerait un fermé $Z \subset F_\ell$, $Z \supsetneq \{0\}$, avec $Z \in \mathcal{V}(f)$. Il en résulterait, puisque $Z \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$, que $Z \in \mathcal{V}(f')$. Or, d'après le a) du lemme 4, ceci impliquerait que Z', projection de Z sur $\mathbb{R}^{n-k}$, identifié à la variété des zéros de x_i, $i \in [1,k]$, appartiendrait à $\mathcal{V}(f')$. Or ceci est impossible puisque $Z' \subset F'$ et que f' est elliptique sur F'.

D'après le lemme 5, $B(x^p, 2||x^p||^\rho) \cap F_\ell \neq \emptyset$ pour $p \in \mathbb{N}_3$.

Il en résulte que, en posant $F = F_\ell \cup (\bigcup_{p \in \mathbb{N}_3} B(x^p, 2||x^p||^\rho))$, on définit un fermé, tel que $F - \{0\}$ soit connexe et sur lequel f est elliptique. Cela démontre le a).

4°) En utilisant toujours la proposition 1 chapitre II, on peut supposer que le fermé F' du 3e contient l'image d'une fonction $\xi' \in (\mathcal{C}(\mathbb{R}))^{n-k}$, telle que $T\,\xi' \neq 0$. Alors, d'après le c) du lemme 4, il existe $\xi \in (\mathcal{C}(\mathbb{R}))^n$ tel que $T\,\xi \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\xi \subset F_\ell$ et $(T\,\xi)^* \in \Gamma(\mathfrak{p})$. Ceci termine la démonstration du théorème puisque $F_\ell \subset F$.

IV - APPLICATIONS GEOMETRIQUES.

Soient $\mathfrak{J}$ un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et k un entier positif. On a défini au chapitre III les idéaux $J_k(\mathfrak{J})$ et $\sigma_k(\mathfrak{J})$.

Nous considérons la situation suivante : il existe dans $J_k(\mathfrak{J}) \cap \sigma_k(\mathfrak{J})$ un élément elliptique. Cela implique que, si $I = T\mathfrak{J}$, $J_k(I) \cap \sigma_k(I)$ est un idéal elliptique. Dans cette situation nous voulons étudier le germe à l'origine de l'ensemble V des zéros de l'idéal $\mathfrak{J}$.

1 - Un lemme algébrique.

Si I est un idéal de $\mathcal{F}_n$ et k un entier positif on désigne par $O_k(I)$ l'idéal engendré par I et tous les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_{k+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{i_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{i_{k+1}}} \\ x_{i_1} & \cdots\cdots & x_{i_{k+1}} \end{vmatrix} \qquad \text{où } f_1,\dots,f_k \in I.$$

On a $O_k(I) \subset J_k(I)$ et l'inclusion est stricte en général. Mais "géométriquement" ces idéaux sont égaux :

Proposition 1.

Soit I *un idéal propre de* $\mathcal{F}_n$ *et* k *un entier positif.*

Alors : si $J_k(I) \neq \mathcal{F}_n$, $\mathcal{V}(J_k(I)) = \mathcal{V}(O_k(I))$

si $J_k(I) = \mathcal{F}_n$ *,* $O_k(I)$ *est elliptique.*

En particulier, si $J_k(I) = \mathcal{F}_n$ *ou est elliptique,* $O_k(I)$ *est elliptique.*

Démonstration. Dans le cas où $J_k(I) \neq \mathcal{J}_n$ il suffit, d'après le corollaire 1 du théorème 1, chapitre II, de montrer que $\Gamma(O_k(I)) \subset \Gamma(J_k(I))$. Dans le cas où $J_k(I) = \mathcal{J}_n$, d'après le corollaire 2 du même théorème, il suffit de montrer que $\Gamma(O_k(I)) = \{0\}$.

Dans les 2 cas, soit $\gamma = \zeta^*$ un homomorphisme annulant $O_k(I)$. On suppose $\gamma \notin \Gamma(J_k(I))$. Nous allons voir que cela implique $\zeta = 0$. Dans le premier cas on aura donc une contradiction et $\Gamma(O_k(I)) \subset \Gamma(J_k(I))$. Dans le second on aura bien $\Gamma(O_k(I)) = \{0\}$ puisque $J_k(I)$ n'est annulé par aucun homomorphisme γ.

Posons $A = \mathbb{R}[[t]]$ et désignons par $D_\zeta f_i$, $1 \leq i \leq k$, l'élément $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t))\right)_{1 \leq j \leq n}$ du module libre A^n. L'hypothèse $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t))\right|_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq k}} \neq 0$ implique que les éléments $D_\zeta f_i$, $1 \leq i \leq k$, sont indépendants.

Puisque γ annule $O_k(I)$ tous les déterminants d'ordre k+1 extraits de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\zeta(t)) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\zeta(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\zeta(t)) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\zeta(t)) \\ \zeta_1(t) & \cdots\cdots\cdots & \zeta_n(t) \end{pmatrix}$$

sont nuls, ce qui signifie que les éléments $D_\zeta f_1, \ldots, D_\zeta f_n, \zeta$ sont liés dans A^n. Il existe donc $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq k$, dans A tels que

$$\lambda_o(t)\,\zeta(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\, D_\zeta f_i = 0 \text{ et } \lambda_o(t) \neq 0 \qquad (1)$$

Mais, puisque $\gamma \in \Gamma(I)$, $f_i(\zeta(t)) = 0$ pour $i \in [1,k]$, d'où par dérivation :

$$\forall i \in [1,k] \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t)) \frac{d\zeta_j}{dt} = 0 \qquad (2)$$

De (1) on déduit : $\forall j \in [1,n] \quad \lambda_o(t)\, \zeta_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t)) = 0.$

En multipliant cette égalité par $\frac{d\zeta_j}{dt}$ et en sommant sur $j \in [1,n]$ les égalités ainsi obtenues on a :

$$\lambda_o(t) \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(t) \frac{d\zeta_j}{dt} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t)) \frac{d\zeta_j}{dt} = 0.$$

D'après (2) on a donc : $\lambda_o(t) \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(t) \frac{d\zeta_j}{dt} = 0.$

Puisque $\lambda_o(t) \neq 0$ et que A est intègre on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{d\zeta_j}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 \right) = 0.$$

Donc $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2$ doit être réduit à son terme constant, et donc $\zeta = 0$ puisque $\zeta \in \underline{n}^n$.

2 - Connexité de V.

Nous reprenons les hypothèses énoncées au début de ce chapitre. On voit alors que, pour $x \in V - \{0\}$ assez voisin de l'origine, l'ensemble V est, au voisinage de x, une variété de classe C^∞, de codimension k, définie par l'annulation de k éléments φ_i de $\mathfrak{J}$.

De plus, pour toute suite $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ de points de V convergeant vers 0, il existe une sous-suite $(x^p)_{p \in \mathbb{N}_1}$ et des éléments $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_i \in \mathfrak{J}$, $1 \leq i \leq k$,, tels que $\Psi \mathfrak{J} \subset (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ et que Ψ et

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}\left(\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}\right)^2 \text{ soient elliptiques sur } \bigcup_{p\in\mathbb{N}_1}\{x^p\}$$

(la démonstration est celle du lemme 1 chapitre III).

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que $0 \in V$.

Proposition 2.

Avec les hypothèses précédentes, il existe un voisinage Ω *de l'origine tel que, pour tout* $x \in (V-\{0\}) \cap \Omega$, *l'espace normal à* V *en* x, N_x, *ne contienne pas le vecteur* $\overrightarrow{0x}$.

Démonstration. Si on n'avait pas cette propriété, on pourrait trouver une suite de points $x^p \in V-\{0\}$, convergeant vers 0, telle que, pour tout p, $\overrightarrow{0x^p} \in N_{x^p}$. Dans ce cas, pour tous $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ de $\mathfrak{J}$, tous les déterminants d'ordre k+1 extraits de la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \\ x_1 & \dots\dots\dots & x_n \end{vmatrix}$$

sont nuls en x^p. Si $I = T\mathfrak{J}$, il en résulte que tout $f \in O_k(I)$ est nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}}\{x^p\} = X$, c'est-à-dire que $X \in \mathcal{V}(O_k(I))$. D'après la proposition 1, il en résulte que $J_k(I) \neq \mathcal{F}_n$ et que $X \in \mathcal{V}(J_k(I))$, ce qui contredit le fait que $J_k(I)$ est elliptique.

Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par B_ε (resp. S_ε) l'ensemble des x tels que $||x|| \leq \varepsilon$ (resp. $||x|| = \varepsilon$).

Proposition 3.

Si ε *est assez petit,* $V \cap B_\varepsilon$ *est connexe et* $(V-\{0\}) \cap B_\varepsilon$ *n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

Démonstration. Prenons un ε tel que B_ε satisfasse aux conditions de la proposition 2. Montrons d'abord que tout $x \in V \cap B_\varepsilon$ appartient à la composante connexe de 0 dans $V \cap B_\varepsilon$. Sinon il existerait dans la composante connexe C_x de x dans $V \cap B_\varepsilon$ un point y, tel que $||y||$ soit minimum et $\neq 0$ (parce que C_x est compact). En ce point y, V est une variété régulière de codimension k, dont l'espace tangent en y n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{Oy}$. Ceci montre qu'il existe dans C_y, donc dans C_x, un point z tel que $||z|| < ||y||$, d'où contradiction. De la même manière, si S est une sphère de centre 0 et de rayon non nul contenue dans Ω, on montre que, pour tout $x \in (V - \{0\}) \cap B_\varepsilon$, il existe $y \in S \cap V$ tel que x et y soient dans la même composante connexe de $(V - \{0\}) \cap B_\varepsilon$. La transversalité de V à S entraîne que $V \cap S$ est une sous-variété régulière de codimension k de S. Il en résulte que $V \cap S$, qui est compact, n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ce qui montre la deuxième partie de la proposition.

Posons $K_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon$. En utilisant la transversalité de V à S_ε, pour ε assez petit, on montre :

Proposition 4.

Pour ε *assez petit, il existe un homéomorphisme* Θ *de* B_ε *sur elle-même, tel que* $\Theta(0) = 0$ *et qui transforme le cône de sommet* 0 *construit sur* K_ε *en* $V \cap B_\varepsilon$. *De plus* Θ *est un difféomorphisme sur* $B_\varepsilon - \{0\}$.

La démonstration faite par MILNOR ([2] chapitre 2) dans le cas algébrique s'applique sans modification au cas que nous étudions.

3 - Séparation des composantes connexes.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $(V - \{0\}) \cap B_\varepsilon$ n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes, et soient V_1 et V_2 deux telles composantes. On voit immédiatement que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \{0\}$ et on a :

<u>Proposition 5.</u>

Les adhérences $\overline{V}_1$ *et* $\overline{V}_2$ *de deux composantes connexes distinctes de* $(V - \{0\}) \cap B_\varepsilon$ *sont régulièrement séparées.*

Pour la définition de la régulière séparation, voir B. MALGRANGE [1].

<u>Démonstration</u>. Nous raisonnons par l'absurde. Si ces deux fermés n'étaient pas régulièrement séparés, on pourrait trouver une suite x^p de points de V_1 et une suite y^p de points de V_2 telles que $d(x^p, V_2) = ||x^p - y^p||$ tende vers 0 plus vite que toute puissance de $||x^p||$.

On peut supposer qu'il existe $\varphi_i \in \mathfrak{J}$, $1 \leq i \leq k$, et $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ avec $\Psi \mathfrak{J} \subset (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ et tels que Ψ et $\sum\limits_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}\right)^2$ soient elliptiques sur $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$ et $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} \{y^p\}$.

On peut aussi supposer, par un changement de coordonnées, que la direction de l'espace normal N_{x^p} à V en x^p, engendré par les vecteurs $D\,\varphi_i(x^p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^p)\right)_{1 \leq j \leq n}$ tend vers la direction du sous-espace E défini par $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$.

Il en résulte alors que, pour $(i_1, \ldots, i_k) \neq (1, 2, \ldots, k)$ le rapport $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}(x^p) \Big/ \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}(x^p)$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini. En particulier $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$ est elliptique sur $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$.

Soit Θ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Theta(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Alors $\delta(x) = \dfrac{D(\Theta_1,\ldots,\Theta_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} = \dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_1,\ldots\ldots,x_k)}$ et il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour $p \geq p_o$, $|\delta(x^p)| \geq ||x^p||^\alpha$.

On applique le lemme des fonctions implicites (TOUGERON - MERRIEN [5] chapitre 2). Avec les notations de ce lemme, on choisit ρ_{x^p} de manière que Ψ ne s'annule pas sur $B(x^p, C\,\rho_{x^p})$ et que
$||x^p-y^p|| \leq \inf(C\,\rho_{x^p}, C''|\delta(x^p)|\rho_{x^p})$.

D'après le lemme cité, Θ induit un difféomorphisme de
$\Theta^{-1}(B(\Theta(x^p), C''|\delta(x^p)|\,\rho_{x^p}) \cap B(x^p, C\,\rho_{x^p})$ sur $B(\Theta(x^p), C''|\delta(x^p)|\rho_{x^p})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ désignons par $x' = (0,\ldots 0, x_{k+1},\ldots,x_n)$ la projection de x sur le sous-espace F défini par $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Alors pour tout $y' \in F \cap B(x'^p, C''|\delta(x^p)|\rho_{x^p})$ il existe y unique appartenant à $B(x^p, C\,\rho_{x^p})$ se projetant sur F en y' et tel que $\varphi_i(y) = 0$, $1 \leq i \leq k$. Quand y' décrit $B(x'^p, C''|\delta(x^p)|\rho_{x^p}) \cap F$, l'ensemble de ces points y décrit un ensemble connexe, contenu dans V_1 puisque $\Psi \mathfrak{J} \subset (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ et que Ψ ne s'annule pas sur $B(x^p, C\,\rho_{x^p})$.

En particulier, il existe $z^p \in V_1 \cap B(x^p, C\,\rho_{x^p})$ se projetant sur F en y'^p, car $||x'^p-y'^p|| \leq ||x^p-y^p|| \leq C''|\delta(x^p)|\rho_{x^p}$.

Ceci est en contradiction avec le fait que $y^p \in B(x^p, C\,\rho_{x^p})$, que $\varphi_i(y^p) = 0$ et que y^p se projette en y'^p sur F.

4 - L'angle de l'espace tangent T_x et du vecteur $\overrightarrow{Ox}$ tend vers 0.

Dans ce paragraphe nous étudions l'angle formé par l'espace tangent à V, T_x, en un point x de $V - \{0\}$ et le vecteur $\overrightarrow{Ox}$.

Nous rappelons d'abord quelques notions d'algèbre extérieure :
Soit E un espace euclidien de dimension n. On prolonge de manière usuelle

le produit scalaire (,) sur E à ΛE. Par cette identification de ΛE et de ΛE^*, on peut définir sur E le produit intérieur droit, L, qui est tel que : $(z \mathbin{L} z', z'') = (z, z' \wedge z'')$ pour tous z, z' et z" de ΛE.

Soient $z_1,\dots,z_k$ des éléments indépendants de E, et $x \in E$, non nul. On a : $(z_1 \wedge \dots \wedge z_k) \mathbin{L} x = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (z_i,x)\, z_1 \wedge \dots \wedge \check{z}_i \wedge \dots \wedge z_k$.

Si on désigne par N le sous-espace engendré par les vecteurs z_i, par $\gamma(x,N)$ (resp. $\sigma(x,N)$) le cosinus (resp. le sinus) de l'angle de x et de N on a :

$$\gamma(x,N) = \frac{\|(z_1 \wedge\dots\wedge z_k) \mathbin{L} x\|}{\|z_1 \wedge\dots\wedge z_k\|\ \|x\|} \quad \text{et} \quad \sigma(x,N) = \frac{\|z_1 \wedge\dots\wedge z_k \wedge x\|}{\|z_1 \wedge\dots\wedge z_k\|\ \|x\|}$$

Proposition 6.

Si $J_k(\mathfrak{J}) \cap \sigma_k(\mathfrak{J})$ *contient un élément elliptique, l'angle de* $\overrightarrow{Ox}$ *et de l'espace tangent* T_x *en* x *à* V *tend vers* 0 *quand* $x \in V - \{0\}$ *tend vers* 0.

Démonstration. Supposons que cette propriété ne soit pas vraie. Il existerait alors une suite (x^p) de points de $V - \{0\}$ convergeant vers 0, et un nombre $\alpha > 0$ tels que $\sigma^2(x,T_x) \geq \alpha$.

Par hypothèse, on peut supposer qu'il existe k fonctions φ_i appartenant à $\mathfrak{J}$ et $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\Psi \mathfrak{J} \subset (\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ et que Ψ et

$$\sum_{i_1<\dots<i_k} \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})} \text{ soient elliptiques sur } \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}.$$

Notons $D\varphi_i(x)$ le vecteur de composantes $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$, $j \in [1,n]$.

On a :

$$\gamma^2(x^p,N_{x^p}) = \sigma^2(x^p,T_{x^p}) = \frac{\|(D\varphi_1(x^p) \wedge\dots\wedge D\varphi_k(x^p)) \mathbin{L} x^p\|^2}{\|D\varphi_1(x^p) \wedge\dots\wedge D\varphi_k(x^p)\|^2\ \|x\|^2} \geq \alpha .$$

Posons $\varphi(x) = ||(D\ \varphi_1(x) \wedge \ldots \wedge D\ \varphi_k(x))\ L\ x||^2$

$$\Psi(x) = ||D\ \varphi_1(x) \wedge\ldots\wedge D\ \varphi_k(x)||^2\ \ ||x||^2$$

φ et Ψ appartiennent à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et Ψ est elliptique sur $U\{x^p\}$.

Soit β, $0 < \beta < \alpha$:

$$\varphi(x^p) - \beta\ \Psi(x^p) \geq (\alpha-\beta)\ \Psi(x^p).$$

Si on pose $f = T(\varphi - \beta\ \Psi)$, $I = T\mathcal{J}$, $X = U\{x^p\}$, on a donc : $X \in \mathcal{V}(I) - \mathcal{V}(f)$. D'après le théorème 1 du chapitre III, il existe $F \subset \mathbb{R}^n$, avec $F - \{0\}$ connexe, et $\xi \in (\mathcal{E}(\mathbb{R}))^n$, tels que $x^p \in F$ pour une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de la suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, que f soit elliptique sur F, que $\xi(t) \in F$ pour t assez petit, que $T\ \xi \neq 0$ et $(T\ \xi)^* \in \Gamma(I)$. Puisque la fonction $\varphi - \beta\ \Psi$ est positive en tout point x^p et elliptique sur F, elle est positive en tout point de $F - \{0\}$.

En particulier $\dfrac{\varphi(\xi(t))}{\Psi(\xi(t))} > \beta$. Cela signifie que :

$\gamma^2(\xi(t), N(t)) > \beta$ où $N(t)$ désigne le sous-espace engendré par les vecteurs $D\ \varphi_i(\xi(t))$.

Nous allons voir que cela conduit à une contradiction.

Pour cela nous utilisons la remarque suivante :

Soit $\xi \in (\mathcal{E}(\mathbb{R}))^n$, $\xi(0) = 0$ et $T\ \xi \neq 0$. Alors l'angle des vecteurs $\xi(t)$ et $\xi'(t) = \frac{d\xi}{dt}$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

En effet $\sigma^2(\xi(t),\xi'(t)) = \dfrac{\sum\limits_{i<j} (\xi_i(t)\xi_j'(t) - \xi_j(t)\xi_i'(t))^2}{(\sum\limits_i \xi_i^2(t))\ (\sum\limits_i \xi_i'^2(t))}$

Or, si on pose $\zeta_i = T\,\xi_i$, et si q est la plus petite des valuations des $\zeta_i(t)$, on remarque que le dénominateur de cette fraction est un infiniment petit d'ordre 4q - 2 par rapport à t, alors que le numérateur est d'ordre strictement supérieur à 4q - 2.

Puisque $(T\,\xi)^* \in \Gamma(I)$ et $T\,\varphi_i \in I$, les fonctions $\varphi_i(\xi(t))$ sont plates en 0 et aussi les fonctions $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\xi(t))\,\xi_j'(t)$.

Il en résulte que :

$$\gamma(\xi'(t),N(t)) = \frac{||(D\varphi_1(\xi(t)) \wedge \ldots \wedge D\varphi_k(\xi(t)))\ \llcorner\ \xi'(t)||}{||D\varphi_1(\xi(t)) \wedge \ldots \wedge D\varphi_k(\xi(t))||\ \ ||\xi'(t)||}$$

tend vers 0 quand t tend vers 0.

Donc : $\gamma^2(\xi(t), N(t)) > \beta > 0$

$$\lim_{t\to 0} \sigma(\xi(t), \xi'(t)) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \gamma(\xi'(t), N(t)) = 0$$

et on obtient une contradiction.

B I B L I O G R A P H I E

[1] B. MALGRANGE — Ideals of differentiable functions, Bombay Tata Institute. Oxford University Press (1966).

[2] J. MILNOR — Singular points of complex hypersurfaces. Princeton University Press (1968).

[3] R. NARASHIMAN — Introduction to the theory of analytic spaces. Lectures notes in mathematics. Springer Verlag (1966).

[4] J. Cl. TOUGERON — Idéaux de fonctions différentiables I. Annales de l'Institut Fourier. Grenoble XVIII, 1, (1968).

[5] J. Cl. TOUGERON et J. MERRIEN — Idéaux de fonctions différentiables II. Annales de l'Institut Fourier (1970).

[6] R. WALKER — Algebraic curves, Princeton University Press (1950).