J. C. TOUGERON

Solutions C^∞ d'un système d'équations analytiques et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1
« Séminaires d'analyse », , exp. n° 3, p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___1_A3_0>

SOLUTIONS C^∞ D'UN SYSTEME D'EQUATIONS ANALYTIQUES ET APPLICATIONS

par

J.C. TOUGERON

Dans cet article, nous démontrons que toute solution formelle $\overline{y}(x)$ d'un système d'équations analytiques réelles $f(x,y) = o$, se relève en une solution C^∞, homotope à une solution analytique aussi proche que l'on veut de $\overline{y}(x)$ pour la topologie de Krull. Ce résultat précise (dans le cas analytique réel) un théorème de M. Artin [1] ; la démonstration suit assez fidèlement celle d'Artin ; toutefois, certaines différences (on applique une fois de plus le théorème des fonctions implicites) nous ont obligé à reprendre la démonstration (§ 1). Les trois derniers paragraphes sont consacrés à des applications de ce théorème, essentiellement à résoudre le problème suivant : soit $R[[x]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients réels en $x = (x_1,\dots,x_n)$ et soit $\overline{I}$ un idéal de $R[[x]]$: peut-on relever $\overline{I}$ en un idéal de $\mathcal{E}(x)$ (anneau des germes de fonctions numériques C^∞ à l'origine de R^n) ayant de "bonnes propriétés", par exemple des propriétés analogues à celles d'un idéal engendré par des germes de fonctions analytiques ?

Ainsi, on peut démontrer (cf. § 4 ; la démonstration est esquissée ; une démonstration détaillée sera donnée ultérieurement) qu'il existe un idéal I, "fermé" de type fini dans $\mathcal{E}(x)$, tel que $\hat{I} = \overline{I}$. Lorsque l'idéal $\overline{I}$ vérifie certaines conditions : en gros, la variété formelle réelle $V(\overline{I})$ (resp. la variété formelle complexe $V(\overline{I} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$) admet une singularité isolée à l'origine, nous démontrons

(§ 2) que l'idéal $\overline{I}$ se relève en un idéal I tel que V(I) soit C^{ν} -difféomorphe pour tout ν fini (resp. C^{∞} difféomorphe) à un germe d'ensemble analytique. On généralise ainsi des résultats bien connus lorsque V(I) est une intersection complète [6]. Enfin, dans le paragraphe 3, nous démontrons des résultats utilisés à la fois dans les paragraphes 2 et 4, par exemple le suivant : soit B une algèbre analytique et soit $\overline{A} = \hat{B}/\overline{I}$ une algèbre formelle réduite et équidimensionnelle (resp. normale, resp. intègre) de dimension n-k ; alors, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, il existe I idéal de B , tel que $A = B/I$ soit réduite et équidimensionnelle (resp. normale, resp. intègre) de dimension n-k, avec : $A/\underline{m}^{\nu+1} \simeq \overline{A}/\overline{\underline{m}}^{\nu+1}$ ($\underline{m}$: idéal maximal de A ; $\overline{\underline{m}}$: idéal maximal de $\overline{A}$).

1. SOLUTIONS FORMELLES ET C^∞ D'UN SYSTEME D'EQUATIONS ANALYTIQUES.

Posons $x = (x_1,\dots,x_n)$; $y = (y_1,\dots,y_p)$ et soient $\mathbb{R}\{x ; y\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients réels en les variables x,y ; $\mathbb{R}\{x\}$ (resp. $\mathbb{R}[[x]]$; resp. $\mathcal{E}(x)$) l'anneau des séries convergentes à coefficients réels en la variable x (resp. l'anneau des séries formelles à coefficients réels en la variable x ; resp. l'anneau des germes de fonctions réelles et C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n$). Si $\varphi(x) \in \mathcal{E}(x)^p$, désignons par $\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R}[[x]]^p$, sa série de Taylor à l'origine ; si ψ, $\psi' \in \mathbb{R}[[x]]^p$ et $\nu \in \mathbb{N}$, nous écrirons $\psi \overset{\nu}{\simeq} \psi'$ lorsque $\psi - \psi'$ est ν-plate à l'origine. Enfin, soit $\mathcal{E}_I$ l'anneau des germes en $\{o\} \times I$ ($I = [o,1]$) des applications C^∞ de $\mathbb{R}^n \times I$ dans $\mathbb{R}$; si $y(x,t) \in \mathcal{E}_I^p$, on note $y_t(x) \in \mathcal{E}(x)^p$ le germe d'application C^∞ : $x \rightsquigarrow y(x,t)$.

<u>Définition 1.1.</u>

Soit $f(x,y) = (f_1(x,y),\dots, f_q(x,y)) \in \mathbb{R}\{x ; y\}^q$ telle que $f(o,o) = o$ et soient $y(x)$, $y'(x) \in \mathcal{E}(x)^p$ telles que $y(o) = y'(o) = o$ et $f(x,y(x)) = f(x,y'(x)) = o$. Si $\nu \in \mathbb{N}$, les deux solutions C^∞ $y(x)$, $y'(x)$ du système $f(x,y) = o$ seront dites ν-<u>homotopes</u> s'il existe $y(x,t) \in \mathcal{E}_I^p$ telle que :

$$\forall\ t \in I,\ \hat{y}_t(x) \overset{\nu}{\simeq} \hat{y}(x) \qquad (1.1.1)$$

$$f(x,y(x,t)) = o \qquad (1.1.2)$$

$$y_o(x) = y(x) \text{ et } y_1(x) = y'(x) \qquad (1.1.3)$$

Le théorème suivant précise un résultat de M. ARTIN [1] sur les solutions formelles d'un système d'équations analytiques :

<u>Théorème 1.2.</u>

Soit $f(x,y) = (f_1(x,y),\dots, f_q(x,y)) \in \mathbb{R}\{x;y\}^q$ *telle que* $f(o,o) = o$, *et soit* $\overline{y}(x) \in \mathbb{R}[[x]]^p$ *telle que* $\overline{y}(o) = o$ *et* $f(x,\overline{y}(x)) = o$. *Alors, il existe* $y(x) \in \mathcal{E}(x)^p$, *solution* C^∞ *du système* $f(x,y) = o$ *vérifiant* $\hat{y}(x) = \overline{y}(x)$, *et pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, *une solution analytique* $Y^\nu(x) \in \mathbb{R}\{x\}^p$, ν-*homotope à* $y(x)$.

Ainsi, toute solution formelle d'un système analytique se relève en une solution C^∞, ν-homotope pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ à une solution analytique. La démonstration du théorème 1.2 suit pas à pas celle du théorème d'Artin. Nous procédons par récurrence sur $n = \dim \mathbb{R}\{x\}$. Si $n = 0$, le résultat est trivial. Soit $n \geq 1$: nous supposons le théorème démontré lorsque $\dim \mathbb{R}\{x\} \leq n-1$, et nous le démontrons lorsque $\dim \mathbb{R}\{x\} = n$.

Lemme 1.3.

Soient $\Delta(x,y) \in \mathbb{R}\{x\,;y\}$; $\overline{y}(x) \in \mathbb{R}[[x]]^p$ *tels que* $\overline{y}(0) = 0$; $\Delta(0,0) = 0$; $f(x,\overline{y}(x)) = 0$; $\Delta(x,\overline{y}(x)) \neq 0$. *Il existe* $w(x) \in \mathcal{E}(x)^p$ *telle que* $\hat{w}(x) = \overline{y}(x)$ *et pour tout* $\nu' \in \mathbb{N}$, $w(x,t) \in \mathcal{E}_I^p$ *telle que :*

$$\forall\, t \in I,\ \hat{w}_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} \overline{y}(x) \qquad (1.3.1)$$

$\forall i = 1,\dots,q$, *il existe* $\xi_i(x,t) \in \mathcal{E}_I$ *telle que :*

$$f_i(x,w(x,t)) = \xi_i(x,t).\ \Delta(x,w(x,t))^2 \qquad (1.3.2)$$

$$w_0(x) = w(x) \quad \textit{et} \quad w_1(x) \ \textit{est analytique} \qquad (1.3.3)$$

Preuve : Après un éventuel changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\Delta(x,\overline{y}(x))^2$ est régulière d'ordre s en x_n. D'après le théorème de préparation formel, en posant $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ et $\overline{y}(x) = (\overline{y}_1(x),\dots,\overline{y}_p(x))$:

$$\overline{y}_j(x) = \overline{q}_j(x).\ \Delta(x,\overline{y}(x))^2 + \overline{z}_j(x) \qquad (1.3.4)$$

où $\overline{z}_j(x) = \sum_{k=1}^{s} x_n^{s-k}\ (\overline{y}_{j,k}(x') + y^0_{j,k})$; $\overline{q}_j(x) \in \mathbb{R}[[x]]$; $\overline{y}_{j,k}(x') \in \mathbb{R}[[x']]$ et $\overline{y}_{j,k}(0) = 0$; $y^0_{j,k} \in \mathbb{R}$. En outre, $\overline{z}_j(0) = 0$, i.e. $y^0_{j,s} = 0$.

Posons : $\overline{z}(x) = (\overline{z}_1(x),\dots,\overline{z}_p(x))$; visiblement, $\Delta(x,\overline{y}(x)) - \Delta(x,\overline{z}(x))$ appartient à l'idéal engendré dans $\mathbb{R}[[x]]$ par les $\overline{y}_j(x) - \overline{z}_j(x)$, et donc d'après (1.3.4), $\Delta(x,\overline{y}(x))$ et $\Delta(x,\overline{z}(x))$ engendrent le même idéal dans $\mathbb{R}[[x]]$; en outre, $\Delta(x,\overline{z}(x))^2$ est régulière d'ordre s en x_n. Introduisons des variables auxiliaires $y_{j,k}$ et posons :

$$z_j = \sum_{k=1}^{s} x_n^{s-k}\ (y_{j,k} + y^0_{j,k})$$

et $z = (z_1,\dots,z_p)$.

Si x' et les $y_{j,k}$ sont nuls : $\Delta(x,z) = \Delta(x,\bar{z}(x))$. Il en résulte que $\Delta(x,z)$ est régulière d'ordre s en x_n. D'après le théorème de préparation analytique : $f_i(x,z) = P_i(x\,;\{y_{j,k}\}).\ \Delta(x,z)^2 + \sum_{\ell=1}^{s} x_n^{s-\ell}\ .\ g_{i,\ell}\,(x'\,;\{y_{j,k}\})$ où

$$P_i \in \mathbb{R}\{x\,;\{y_{j,k}\}\}\ ;\ g_{i,\ell} \in \mathbb{R}\{x'\,;\{y_{j,k}\}\} \tag{1.3.5}$$

Par substitution, on déduit de l'égalité (1.3.5) :

$$f_i(x,\bar{z}(x)) = P_i(x\,;\{\bar{y}_{j,k}(x')\}).\ \Delta(x,\bar{z}(x))^2 + \sum_{\ell=1}^{s} x_n^{s-\ell}\ .\ g_{i,\ell}\,(x'\,;\{\bar{y}_{j,k}(x')\}) \tag{1.3.6}$$

Mais $f_i(x,\bar{z}(x)) = f_i(x,\bar{z}(x)) - f_i(x,\bar{y}(x))$ est divisible par $\Delta(x,\bar{y}(x))^2$, donc par $\Delta(x,\bar{z}(x))^2$, laquelle est régulière d'ordre s en x_n. D'après l'unicité de la division (1.3.6) :

$$g_{i,\ell}\,(x'\,;\{\bar{y}_{j,k}(x')\}) = o \tag{1.3.7}$$

D'après l'hypothèse de récurrence ($\dim \mathbb{R}\{x'\} = n-1$), il existe des $y_{j,k}(x') \in \mathcal{E}(x')$ tels que $\hat{y}_{j,k}(x') = \bar{y}_{j,k}(x')$ et, pour tout $\nu' \in \mathbb{N}$, des germes C^∞ $y_{j,k}(x',t)$ tels que :

$$\forall\ j,\ \forall\ k\ ,\ \forall\ t \in I \qquad \hat{y}_{j,k,t}(x') \overset{\nu'}{\simeq} \bar{y}_{j,k}(x') \tag{1.3.8}$$

$$\forall\ i\ ,\ \forall\ \ell \qquad g_{i,\ell}\,(x'\,;\{y_{j,k}(x',t)\}) = o \tag{1.3.9}$$

$$y_{j,k,o}(x') = y_{j,k}(x') \quad \text{et} \quad y_{j,k,1}(x') \text{ est analytique} \tag{1.3.10}$$

Posons : $z_j(x,t) = \sum_{k=1}^{s} x_n^{s-k}\,(y_{j,k}(x',t) + y_{j,k}^o)$ et $z(x,t) = (z_1(x,t),\ldots$ $\ldots,\ z_p\,(x,t))$. Enfin, soit $q_j(x) \in \mathcal{E}(x)$ telle que $\hat{q}_j(x) = \bar{q}_j(x)$ et soit $Q_j(x)$ le polynôme de Taylor de degré ν' de $q_j(x)$. Considérons le système d'équations implicites en l'inconnue $y = (y_1,\ldots,y_p)$:

$$y_j = ((1-t)\ q_j(x) + t\ Q_j(x)).\ \Delta(x,y)^2 + z_j(x,t),\ j=1,\ldots,p \tag{1.3.11}$$

D'après le théorème des fonctions implicites ordinaire , ce système admet une solution unique $w(x,t) = (w_1(x,t),\ldots,\ w_p(x,t)) \in \mathcal{E}_I^p$, telle que $w(o,t) = o$. Posons $w_o(x) = w(x)$; visiblement, $w(x)$ est indépendant de ν' ; en outre, $\hat{w}(x) = \bar{y}(x)$, car $\hat{w}(x)$ est d'après (1.3.11), l'unique solution nulle à l'origine du système : $y_j = \bar{q}_j(x).\ \Delta(x,y)^2 + \bar{z}_j(x)$ (car $\hat{z}_{j,o}(x) = \bar{z}_j(x)$, d'après

1.3.10 et $\hat{q}_j(x) = \overline{q}_j(x)$) et il suffit de comparer avec (1.3.4). Vérifions que $w(x)$ et $w(x,t)$ vérifient les conditions (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) du lemme.

Vérifions (1.3.1). Ecrivons (1.3.11) sous la forme $y = \mu(x,y,t)$. D'après (1.3.8), le polynôme de Taylor de degré ν' de $\mu_t(x,y)$ à l'origine, est indépendant de t. Il en résulte que les $w_t(x)$ ont même polynôme de Taylor de degré ν', d'où (1.3.1).

Vérifions (1.3.2). D'après (1.3.5) et (1.3.9) :

$$f_i(x,z(x,t)) = P_i(x\,;\{y_{j,k}(x',t)\}).\ \Delta(x,z(x,t))^2$$

$w(x,t)$ étant solution du système (1.3.11), on voit immédiatement que $\Delta(x,w(x,t))$ et $\Delta(x,z(x,t))$ engendrent le même idéal dans $\mathcal{E}_I$; en outre, on vérifie que $f_i(x,w(x,t)) - f_i(x,z(x,t))$ est divisible dans $\mathcal{E}_I$ par $\Delta(x,w(x,t))^2$. Ceci démontre (1.3.2).

Enfin, nous savons déjà que $w_o(x) = w(x)$; en outre, $w_1(x)$ est d'après (1.3.11) solution du système : $y_j = Q_j(x).\ \Delta(x,y)^2 + z_{j,1}(x)$. Ce système est analytique, d'après (1.3.10), et donc $w_1(x)$ est analytique. /

1.4. <u>Preuve de 1.2</u> : On peut supposer (cf. [1], la preuve est exactement la même) $q \leq p$, et si $\delta(x,y) = \dfrac{D(f_1,\dots,f_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}$ que $\delta(x,\overline{y}(x)) \neq o$. Posons $\Delta(x,y) = x_n.\ \delta(x,y)$; alors $\Delta(x,\overline{y}(x)) \neq o$ et $\Delta(o,o) = o$. Appliquons le lemme 1.3 à la solution $\overline{y}(x)$ et à $\Delta(x,y)$. D'après (1.3.1) et (1.3.2), si $\nu' \geq \nu$ est assez grand :

$$\forall\ t \in I\ ,\quad \hat{\xi}_{i,t}(x) \overset{\nu}{\simeq} o \tag{1.4.1}$$

En outre, puisque $\hat{w}_o(x) = \hat{w}(x) = \overline{y}(x)$:

$$\hat{\xi}_{i,o}(x) = o \tag{1.4.2}$$

Puisque $w_1(x)$ est analytique :

$$\xi_{i,1}(x) \text{ est analytique} \tag{1.4.3}$$

Considérons alors le système d'équations implicites :

$$g_i(x,t\,;Y) = f_i(x,Y + w(x,t)) = o\ ,\qquad i = 1,\dots,q\ .$$

D'après (1.3.2) :

$$g_i(x,t\ ;\ o) = f_i(x,w(x,t)) = \xi_i(x,t).\ \left(\frac{D(g_1,\dots,g_q)}{D(Y_1,\dots,Y_q)}(x,t\ ;\ o)\right)^2.$$

D'après le théorème des fonctions implicites [2], (1.4.1), (1.4.2) et (1.4.3), il existe $Y(x,t) \in \mathcal{E}_I^p$ telle que :

$g_i(x,t\ ;\ Y(x,t)) = f_i(x,Y(x,t) + w(x,t)) = o\ ,\quad i=1,\dots,q$

$\forall\ t \in I\ ,\quad \hat{Y}_t(x) \overset{\nu}{\simeq} o$

$\hat{Y}_o(x) = o$ et $Y_o(x)$ est indépendant de ν

$Y_1(x)$ est analytique.

Posons $y(x) = Y_o(x) + w(x)$: $y(x)$ est une solution C^∞ du système $f(x,y) = o$ telle que $\hat{y}(x) = \overline{y}(x)$; en outre, $y(x,t) = Y(x,t) + w(x,t)$ est une ν-homotopie transformant $y(x)$ en une solution analytique $Y^\nu(x) = Y_1(x) + w_1(x)$. /

Corollaire 1.5.

Soient A *et* B *deux* $\mathbb{R}$-*algèbres analytiques ;* $\tilde{A}$ *et* $\tilde{B}$ *les algèbres* C^∞ *associées à* A *et* B *respectivement. Tout morphisme formel de* A *dans* B, *i.e. tout* $\mathbb{R}$-*homomorphisme de* $\hat{A}$ *dans* $\hat{B}$, *se relève en un morphisme* C^∞ *de* $\tilde{A}$ *dans* $\tilde{B}$.

2. ANALYTICITE DES VARIETES FORMELLES A SINGULARITE ISOLEE.

Soit I un idéal de $A = \mathbb{R}\{x\}$, $\mathbb{R}[[x]]$ ou $\mathcal{E}(x)$. Si $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, on note $J_k(I)$ l'idéal engendré dans A par I et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i1},\dots,x_{ik})}$, $\varphi_1,\dots,\varphi_k \in A$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$; on note $\sigma_k(I)$ l'idéal engendré par tous les $\delta \in A$ tels que $\delta.I$ soit contenu dans un sous-idéal de I engendré par k éléments ; enfin, on pose : $\mathcal{R}_k(I) = J_k(I) \cap \sigma_k(I)$.

Définition 2.1.

Un idéal I de $\mathbb{R}\{x\}$ ou $\mathcal{E}(x)$ est <u>elliptique</u>, s'il existe $\varphi \in I$, des constantes $C > o$ et $\alpha > o$, telles que $|\varphi(x)| \geq C|x|^\alpha$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ ($\underset{\sim}{\varphi}$ est un représentant de φ). Un idéal I de $\mathbb{R}[[x]]$ est <u>elliptique</u> s'il existe $\varphi \in \mathcal{E}(x)$ tel que φ soit elliptique (i.e. l'idéal engendré par φ est elliptique) et $\hat{\varphi} \in I$.

2.2. Soit V un germe d'ensemble analytique à l'origine de $\mathbb{R}^n$. On vérifie facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) V est analytique cohérent et $V \setminus \{o\}$ est un germe de variété analytique de codimension k (éventuellement vide).(1)

(ii) Il existe un idéal I de $\mathbb{R}\{x\}$ vérifiant $V(I) = V$, tel que $\mathcal{R}_k(I)$ soit elliptique.

2.3. Soit I un idéal de <u>type fini</u> de $\mathcal{E}(x)$. On démontre (cf. [3], chap. V), l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) L'idéal I est fermé (i.e. I est induit par un idéal fermé de type fini de $\mathcal{E}(U)$, U voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^n$) et $\mathcal{R}_k(\hat{I})$ est elliptique.

(ii) L'idéal $\mathcal{R}_k(I)$ est elliptique.

Visiblement, si l'une des deux conditions précédentes est satisfaite, $V(I) \setminus \{o\}$ est un germe de variété C^∞ de codimension k (éventuellement vide).

Soit $\mathcal{E}_\nu(x)$ l'anneau des germes de fonctions numériques de classe C^ν à l'origine de $\mathbb{R}^n$.

<u>Théorème 2.4.</u>

Soit $\bar{I}$ *un idéal de* $\mathbb{R}[[x]]$ *tel que* $\mathcal{R}_k(\bar{I})$ *soit elliptique. Alors, il existe* I, *idéal fermé (de type fini) de* $\mathcal{E}(x)$ *vérifiant* $\hat{I} = \bar{I}$, *et pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, *un difféomorphisme de classe* C^ν *à l'origine de* $\mathbb{R}^n$ *transformant l'idéal* $I.\mathcal{E}_\nu(x)$ *en un idéal de* $\mathcal{E}_\nu(x)$ *engendré par des germes analytiques (donc, pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, $V(I)$ *est* C^ν*-difféomorphe à un germe d'ensemble analytique vérifiant les conditions 2.2 ; en outre,* I *vérifie les conditions 2.3.)*

---

(1) Il existe des germes d'ensembles analytiques réels, admettant une singularité isolée à l'origine et non cohérents, par exemple le germe des zéros de $x_1^3 - x_3\, x_2^3$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$.

Preuve :

Par hypothèse, il existe une famille $\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_p$ de générateurs de l'idéal $\overline{I}$ et $\overline{\delta}_1,\dots,\overline{\delta}_s \in \mathbb{R}[[x]]$ tels que :

(i) A tout $i=1,\dots,s$, on peut associer une suite :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p ,$$

et des $\overline{\xi}_{ij\ell} \in \mathbb{R}[[x]]$ tels que, pour $j=1,\dots,p$:

$$\overline{\delta}_i \cdot \overline{\varphi}_j = \sum_{\ell=1}^{k} \overline{\xi}_{ij\ell} \cdot \overline{\varphi}_{i_\ell}$$

(ii) L'idéal engendré par les $\overline{\delta}_i$ est elliptique ; de même que l'idéal engendré par les $\overline{\varphi}_j$ et tous les jacobiens : $\dfrac{D(\overline{\varphi}_{\alpha_1},\dots,\overline{\varphi}_{\alpha_k})}{D(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_k})}$.

D'après le théorème 1.2, il existe $\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)$; $\delta_1(x),\dots,\delta_s(x)$ et des $\xi_{ij\ell}(x)$, tous éléments de $\mathcal{E}(x)$, tels que pour tout i et j :

$$\delta_i(x).\ \varphi_j(x) = \sum_{\ell=1}^{k} \xi_{ij\ell}(x)\ .\ \varphi_{i_\ell}(x) \qquad (2.4.1)$$

et $\hat{\varphi}_j(x) = \overline{\varphi}_j$; $\hat{\delta}_i(x) = \overline{\delta}_i$; $\hat{\xi}_{ij\ell}(x) = \overline{\xi}_{ij\ell}$. (2.4.2)

En outre, pour tout $\nu' \in \mathbb{N}$, il existe des $\varphi_j(x,t)$, $\delta_i(x,t)$, $\xi_{ij\ell}(x,t)$ appartenant à $\mathcal{E}_I$ tels que :

$\forall\, t \in I \qquad \hat{\varphi}_{j,t}(x) \overset{\nu'}{\simeq} \hat{\varphi}_j(x)$; $\hat{\delta}_{i,t}(x) \overset{\nu'}{\simeq} \hat{\delta}_i(x)$; $\hat{\xi}_{ij\ell,t}(x) \overset{\nu'}{\simeq} \hat{\xi}_{ij\ell}(x)$ (2.4.3)

Pour tout i et tout j : $\delta_i(x,t).\ \varphi_j(x,t) = \sum_{\ell=1}^{k} \xi_{ij\ell}(x,t).\ \varphi_{i_\ell}(x,t)$ (2.4.4)

$\varphi_{j,o}(x) = \varphi_j(x)$; $\delta_{i,o}(x) = \delta_i(x)$; $\xi_{ij\ell,o}(x) = \xi_{ij\ell}(x)$; en outre, $\varphi_{j,1}(x)$, $\delta_{i,1}(x)$, $\xi_{ij\ell,1}(x)$ sont analytiques. (2.4.5)

Soit I_t l'idéal engendré par les $\varphi_{j,t}(x)$, $1 \leq j \leq p$, dans $\mathcal{E}(x)$. D'après (2.4.1), (2.4.2) et 2.3, l'idéal $I_o = I$ (indépendant de ν') vérifie $\hat{I} = \overline{I}$; en outre, I est fermé de type fini. L'entier ν étant fixé, il suffit de montrer que si ν' est assez grand, il existe un difféomorphisme de classe C^ν qui transforme $I_o.\mathcal{E}_\nu(x)$ en $I_1.\mathcal{E}_\nu(x)$ (I_1 est analytique d'après 2.4.5)).

Posons $\varphi(x,t) = (\varphi_1(x,t),\dots, \varphi_p(x,t))$ et soit $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) : \mathcal{E}_I^n \longrightarrow \mathcal{E}_I^p$ la matrice jacobienne de $\varphi(x,t)$. Le théorème résultera du lemme suivant :

Lemme 2.5.

Si ν' *est assez grand, on a :*

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t).\ u(x,t) + v(x,t).\ \varphi(x,t)$$

où $u(x,t)$, $v(x,t)$ *sont des matrices* $n \times 1$ *et* $p \times p$ *respectivement, à coefficients de classe* C^ν*, vérifiant :* $u(o,t) = o\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x}(o,t) = o\ ;\ v(o,t) = o.$

Preuve :

Posons $\underline{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_k)$, $1 \le \beta_1 < \dots < \beta_k \le n$ et soit $\Delta_{i,\underline{\beta}}(x,t)$ le jacobien $\dfrac{D(\varphi_{i_1}(x,t),\dots,\varphi_{i_k}(x,t))}{D(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_k})}$ (on rappelle que la suite $(i_1,\dots,i_k)$ est associée à i, $1 \le i \le s$). Démontrons tout d'abord que :

$$\delta_i(x,t).\ \Delta_{i,\underline{\beta}}(x,t).\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t).\ u_{i,\underline{\beta}}(x,t) + v_{i,\underline{\beta}}(x,t).\ \varphi(x,t)$$

où $u_{i,\underline{\beta}}$ et $v_{i,\underline{\beta}}$ sont de classe C^∞ et $u_{i,\underline{\beta},t}(x) \overset{\nu'}{\simeq} o\ ;\ v_{i,\underline{\beta},t}(x) \overset{\nu'}{\simeq} o$ (2.5.1)

Pour simplifier, posons $\delta_i = \delta\ ;\ \Delta_{i,\underline{\beta}} = \Delta$; et supposons que $(i_1,\dots,i_k) = (\beta_1,\dots,\beta_k) = (1,\dots,k)$, ce qui n'est pas restrictif.

Posons $\varphi(x,t) = (\varphi^1(x,t),\ \varphi^2(x,t))$, avec $\varphi^1 = (\varphi_1(x,t),\dots,\varphi_k(x,t))$; $\varphi^2 = (\varphi_{k+1}(x,t),\dots,\varphi_p(x,t))$. Puisque Δ est l'un des mineurs d'ordre k de la matrice jacobienne $\frac{\partial\varphi^1}{\partial x}$, d'après (2.4.3) :

$$\Delta(x,t).\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x}(x,t).\ u^1(x,t) \qquad (2.5.2)$$

où $u^1(x,t)$ est C^∞ et, $\forall\ t \in I$, $u^1_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} o$.

D'après (2.4.4), et (2.4.3) :

$$\delta(x,t).\ \varphi^2(x,t) = \xi(x,t).\ \varphi^1(x,t)$$

où $\xi(x,t)$ est une matrice $(p-k) \times k$ à coefficients C^∞ ; puis par dérivation :

$$\delta(x,t).\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(x,t) = \xi(x,t).\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x}(x,t) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x,t).\ \xi^i(x,t) \qquad (2.5.3)$$

$$\delta(x,t) \;.\; \frac{\partial\varphi^2}{\partial t}(x,t) = \xi(x,t) \;.\; \frac{\partial\varphi^1}{\partial t}(x,t) + \eta(x,t).\; \varphi(x,t) \qquad (2.5.4)$$

où $\xi^i(x,t)$, $\eta(x,t)$ sont respectivement des matrices $(p-k) \times n$ et $(p-k) \times p$ à coefficients C^∞, avec $\forall\, t \in I$, $\eta_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} o$.

D'après (2.5.2), (2.5.3) et (2.5.4) :

$$\delta(x,t).\; \Delta(x,t).\; \frac{\partial\varphi^2}{\partial t}(x,t) = \delta(x,t)\, \frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(x,t).\; u^1(x,t) + \eta'(x,t).\; \varphi(x,t)$$

où $\eta'(x,t)$ est une matrice à coefficients C^∞, vérifiant $\forall\, t \in I$, $\eta'_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} o$.
Visiblement, (2.5.1) résulte de l'égalité précédente et de (2.5.2).

Par hypothèse, l'idéal engendré dans $\mathcal{E}(x)$ par $\varphi_1(x),\dots,\ \varphi_p(x)$ et les $\delta_i(x)\;.\;\dfrac{D(\varphi_{\alpha_1}(x),\dots,\varphi_{\alpha_k}(x))}{D(x_{\beta_1},\dots,\ x_{\beta_k})}$, $1 \le i \le s$, $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \le p$, $1 \le \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k \le n$, est elliptique. Puisque $\delta_i(x).I \subset (\varphi_{i_1}(x),\dots,\ \varphi_{i_k}(x))$, on a $\delta_i(x)^2.\ J_k(I) \subset J_k(\varphi_{i_1}(x),\dots,\varphi_{i_k}(x))$ (vérification immédiate). Ainsi l'idéal engendré par $\varphi_1(x),\dots,\ \varphi_p(x)$ et les $\delta_i(x).\ \Delta_{i,\underline{\beta},o}(x)$ est elliptique. Il existe donc $\psi(x)$ appartenant à cet idéal et des constantes $C > o$ et $\alpha > o$ telles que :

$$|\psi(x)| \ge C|x|^\alpha$$

D'après 2.4.3, les $\varphi_{j,t}(x)$ et $\delta_{i,t}(x).\ \Delta_{i,\underline{\beta},t}(x)$ ont un jet d'ordre $\nu'-1$ à l'origine, indépendant de t. Si $\nu'-1 \ge \alpha$, il existe donc $\psi(x,t)$ appartenant à l'idéal engendré dans $\mathcal{E}_I$ par $\varphi_1(x,t),\dots,\varphi_p(x,t)$ et les $\delta_i(x,t).\ \Delta_{i,\underline{\beta}}(x,t)$ $(1 \le i \le s$, $1 \le \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k \le n)$ tel que, si $t \in I$ et $|x|$ est assez petit :

$$|\psi(x,t)| \ge C'\ |x|^\alpha \qquad (2.5.5)$$

D'après (2.5.1) :

$$\psi(x,t).\ -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t).\ u'(x,t) + v'(x,t).\ \varphi(x,t)$$

avec

$$u'_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} o\ ;\ v'_t(x) \overset{\nu'}{\simeq} o. \qquad (2.5.6)$$

Ainsi, pour $x \neq o$:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t).\ \frac{u'(x,t)}{\psi(x,t)} + \frac{v'(x,t)}{\psi(x,t)}\ .\ \varphi(x,t)\ .$$

D'après (2.5.5) et (2.5.6), si ν' est assez grand par rapport à α et ν, les quotients $\frac{u'(x,t)}{\psi(x,t)}$ et $\frac{v'(x,t)}{\psi(x,t)}$ se prolongent en des germes de classe C^{ν} en $\{o\} \times I \subset \mathbb{R}^n \times I$, nuls ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à x, sur $\{o\} \times I$; ceci démontre le lemme. /

Preuve de 2.4 (fin) :

La démonstration est standard (cf. [3],ch. VIII,§3). D'après le théorème classique sur les solutions d'un système d'équations différentielles, il existe $\tau(x,t) = (\tau_1(x,t),\ldots, \tau_n(x,t))$, de classe C^{ν}, tel que :

$$\tau(o,t) = o \ ; \quad \frac{\partial\tau}{\partial x}(o,t) \equiv 1_{\mathbb{R}^n} \quad ; \quad \tau(x,o) = x \quad \text{et :}$$

$$u(\tau(x,t),t) = \frac{\partial\tau}{\partial t}(x,t).$$

D'après le même théorème, il existe $M(x,t)$ matrice $p \times p$ à coefficients de classe C^{ν}, telle que : $M(o,t) \equiv M(x,o) \equiv 1_{\mathbb{R}^p}$, et :

$$v(\tau(x,t),t) = M^{-1}(x,t).\ \frac{\partial M}{\partial t}(x,t).$$

D'après 2.5 et ce qui précède :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M(x,t).\ \varphi(\tau(x,t),t)\right) =$$

$$M(x,t).\ \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau(x,t),t).\ u(\tau(x,t),t) + v(\tau(x,t),t).\ \varphi(\tau(x,t),t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau(x,t),t)\right) = 0.$$

Il en résulte que : $M(x,t).\ \varphi(\tau(x,t),t) = M(x,o).\ \varphi(\tau(x,o),o) = \varphi(x)$;

Visiblement, $x \longmapsto \tau_1(x)$ est un difféomorphisme de classe C^{ν} à l'origine de $\mathbb{R}^n$ qui transforme $I_1.\ \mathcal{E}_{\nu}(x)$ en $I_o.\ \mathcal{E}_{\nu}(x)$, c.q.f.d. /

Une question analogue à celle résolue par le théorème 2.4 est la suivante : soit $\bar{I}$ un idéal de $\mathbb{R}[[x]]$; l'algèbre $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ est-elle isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique ? Ceci est évidemment faux sans hypothèses supplémentaires sur $\bar{I}$. Par exemple, soit $\bar{I}$ l'idéal engendré dans $\mathbb{R}[[x_1,x_2,x_3]]$ par :

$x_3(x_1^2+x_2^2+2\,x_3)\ (x_1^2+x_2^2+x_3)\ \ (x_1^2+x_2^2-(1+x_1)\,x_3)\ \ (x_1^2+x_2^2-\gamma(x_1)\,x_3)$

où γ est une série non convergente telle que $\gamma(o) = 2$; la "variété formelle réelle V(I)" admet une singularité isolée à l'origine et donc le théorème 2.4 lui est applicable ; cependant, $\gamma(x)$ est liée de manière intrinsèque à la "variété formelle complexe $V(I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$" (cf. [2], page 220, l'exemple s'inspire de Whitney [4]). Ainsi $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ ne peut être isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique. En modifiant l'exemple, on peut d'ailleurs supposer que $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ est intègre.

Le théorème suivant est démontré par H. Hironaka [5], dans le cas analytique ; la démonstration se transpose sans difficultés au cas formel :

Théorème 2.6.

Soit $\bar{I}$ *un idéal de* $\mathbb{R}[[x]]$ *tel que* $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ *soit réduite et équidimensionnelle de dimension* $n-k$. *Posons pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, $\bar{I}_\nu = \bar{I} + J_k(\bar{I})^\nu$.(1) *Il existe un entier* $\nu_o \geq 2$ *vérifiant la condition suivante :*

Pour toute algèbre $\mathbb{R}[[x]]/\bar{J}$, *réduite et équidimensionnelle de dimension* $n-k$, *la condition* $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}_{\nu_o} \simeq \mathbb{R}[[x]]/\bar{J}_{\nu_o}$ *implique* $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I} \simeq \mathbb{R}[[x]]/\bar{J}$.

Théorème 2.7.

Avec les hypothèses et notations du théorème 2.6, supposons que $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}_{\nu_o}$ *soit isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique ; alors* $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ *est isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique.*

Preuve : On peut supposer que $\bar{I}_{\nu_o}$ est égal à $\hat{J}$, où J est un idéal de $\mathbb{R}\{x\}$. D'après le théorème d'Artin-Rees, il existe $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{I}_{\nu_o} \cap \hat{m}^{\nu_1} \subset \hat{m}.\bar{I}_{\nu_o}$ (m désigne l'idéal maximal de $\mathbb{R}\{x\}$ et donc $\hat{m}$ est l'idéal maximal de $\mathbb{R}[[x]]$). D'après la proposition 3.4, § 3, il existe un idéal I de $\mathbb{R}\{x\}$ tel que : $I \subset J$; $\mathbb{R}\{x\}/I$ est réduite et équidimensionnelle de dimension $n-k$; $\hat{I} + \hat{m}^{\nu_1+1} = \bar{I} + \hat{m}^{\nu_1+1}$.

Puisque $I \subset \bar{I} + J_k(\bar{I})^{\nu_o}$, on a $J_k(I) \subset J_k(\bar{I})$ et donc : $\hat{I}_{\nu_o} = \hat{I} + \widehat{J_k(I)}^{\nu_o} \subset \bar{I} + J_k(\bar{I})^{\nu_o} = \bar{I}_{\nu_o}$. Visiblement : $\hat{I}_{\nu_o} + \hat{m}^{\nu_1} = I_{\nu_o} + \hat{m}^{\nu_1}$ et donc :

(1) *L'algèbre* $\mathbb{R}[[x]]/\bar{I}$ *étant réduite et équidimensionnelle de dimension* $n-k$, *les idéaux* $J_k(\bar{I})$ *et* $\mathcal{R}_k(\bar{I})$ *ont même racine (voir* [3], *chap. II).*

$$\overline{I}_{\nu_o} \subset \hat{I}_{\nu_o} + (\hat{m}^{\nu_1} \cap \overline{I}_{\nu_o}) \subset \hat{I}_{\nu_o} + \hat{m} \,.\, \overline{I}_{\nu_o}.$$

D'après le lemme de Nakayama : $\overline{I}_{\nu_o} = \hat{I}_{\nu_o}$; d'après le théorème 2.6, les algèbres $\mathbb{R}[[x]]/\hat{I}$ et $\mathbb{R}[[x]]/\overline{I}$ sont isomorphes. /

En particulier, on a le résultat suivant (comparer avec 2.4) :

Corollaire 2.8.

Soit $\overline{I}$ *un idéal de* $\mathbb{R}[[x]]$ *tel que* $\mathcal{R}_k(\overline{I})$ *contienne une puissance de* $\hat{m}$ *; alors* $\mathbb{R}[[x]]/\overline{I}$ *est isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique.*

Preuve. Si $\overline{I}$ contient une puissance de $\hat{m}$, le résultat est trivial ; sinon, $\overline{I} = \overline{I}' \cap \overline{I}''$, où ht $\overline{I}'' \geq n$ et les idéaux premiers associés à $\overline{I}'$ sont de hauteur < n (considérer la décomposition primaire de $\overline{I}$). Visiblement, $\mathcal{R}_k(\overline{I}')$ contient une puissance de $\hat{m}$; il existe donc $\delta \in \mathcal{R}_k(\overline{I}')$, non diviseur de zéro dans $\mathbb{R}[[x]]/\overline{I}'$; d'après le critère 3.6, chap. II, [3], $\mathbb{R}[[x]]/\overline{I}'$ est réduite et équidimensionnelle de dimension n-k, donc isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique, d'après 2.7. Le corollaire 2.8 est alors évident. /

Remarques 2.9 :

(i) Pour appliquer le théorème 2.7, il suffit de connaître un idéal J de $\mathbb{R}\{x\}$ tel que $\overline{I} \subset \hat{J} \subset \overline{I}_{\nu_o}$. En effet, des inclusions précédentes, on déduit les égalités : $J_k(\hat{J}) = J_k(\overline{I})$ et $\overline{I}_{\nu_o} = \hat{J}_{\nu_o}$; ainsi, $\mathbb{R}[[x]]/\overline{I}_{\nu_o}$ est la complétée d'une algèbre analytique.

(ii) Les théorèmes 2.4 et 2.7 sont bien connus lorsque l'idéal $\overline{I}$ est une intersection complète. Dans ce cas, on a des résultats plus précis [6].

(iii) Pour terminer, signalons le problème suivant. Soient I, I' deux idéaux fermés de type fini de $\mathcal{E}\{x\}$ tels que $\hat{I} = \hat{I}'$ et $\mathcal{R}_k(\hat{I})$ est elliptique. Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres différentiables $\tau^* : \mathcal{E}(x)/I \longrightarrow \mathcal{E}(x)/I'$, tel que $\hat{\tau}^*$ soit l'application identique ? Cela est vrai lorsque $\hat{I}$ est une intersection complète.

3. APPROXIMATION DES ALGEBRES FORMELLES PAR DES ALGEBRES ANALYTIQUES.

Soit $\overline{M}$ un module de type fini sur $\mathbb{R}[[x]]$; d'après le théorème des sisygies, $\overline{M}$ admet une résolution de longueur $\leq n$, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{C}(\overline{M})$:

$$\ldots \longrightarrow o \longrightarrow \hat{L}_n \xrightarrow{\overline{\lambda}_n} \ldots \quad \ldots \longrightarrow \hat{L}_1 \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \hat{L}_o$$

où les L_i sont des modules libres de type fini sur $R\{x\}$; les $\overline{\lambda}_i$ des homomorphismes de $\mathbb{R}[[x]]$-modules et coker $\overline{\lambda}_1 = \overline{M}$.

Par la suite, nous considérerons des O-suites de $\mathbb{R}\{x\}$-modules :

$$\ldots \longrightarrow o \longrightarrow L_n \xrightarrow{\lambda_n} \ldots \quad \ldots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\lambda_1} L_o$$

Elles seront notées $\mathcal{C}(M)$, avec coker $\lambda_1 = M$; et nous écrirons : $\mathcal{C}(M) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{M})$, si pour tout $i=1,\ldots,n$: $\overline{\lambda}_i \overset{\nu}{\simeq} \lambda_i$ $(\nu \in \mathbb{N})$. D'après le théorème d'Artin, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, il existe $\mathcal{C}(M)$ telle que $\mathcal{C}(M) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{M})$. En fait, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 3.1.

Soit $\overline{M}$ un module de type fini sur $\mathbb{R}[[x]]$ et soit $\mathcal{C}(\overline{M})$ une résolution de longueur $\leq n$ de $\overline{M}$. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, il existe une suite exacte $\mathcal{C}(M)$ telle que $\mathcal{C}(M) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{M})$ (donc $\mathcal{C}(M)$ est une résolution de longueur $\leq n$ de M).

Avant d'aborder la démonstration du théorème, signalons deux cas particuliers :

(3.1.1) Supposons que $\overline{M} = \mathbb{R}[[x]]/(\overline{\varphi})$, où $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_1,\ldots,\overline{\varphi}_k) \in \mathbb{R}[[x]]^k$ et $ht(\overline{\varphi}) = k$ (cas d'une intersection complète). Le complexe de l'algèbre extérieure $\Lambda(\overline{\varphi})$ (cf. [7], ch. IV), associé canoniquement à la suite $\overline{\varphi}$, est une résolution de $\overline{M}$. Visiblement, si ν est assez grand, la condition $\varphi \in \mathbb{R}\{x\}^k$ et $\varphi \overset{\nu}{\simeq} \overline{\varphi}$ entraîne $ht\ (\varphi) = k$, et donc $\Lambda(\varphi)$ est une résolution de $M = \mathbb{R}\{x\}/(\varphi)$, vérifiant $\Lambda(\varphi) \overset{\nu}{\simeq} \Lambda(\overline{\varphi})$. Dans ce cas particulier, le théorème est donc évident.

(3.1.2) Si $\overline{M}$ est un module libre (ou zéro), toute résolution de $\overline{M}$ se scinde et donc , toute o-suite $\mathcal{C}(M)$ telle que $\mathcal{C}(M) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{M})$ $(\nu \in \mathbb{N})$ est exacte (vérification immédiate) ; en outre $\hat{M} = \overline{M}$.

(3.1.3) Enfin, si $\mathcal{C}'(\overline{M})$ et $\mathcal{C}(\overline{M})$ sont deux résolutions de $\overline{M}$, il existe une troisième résolution $\mathcal{C}''(\overline{M})$ et des suites exactes de complexes :

$$o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}''(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{o}) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}''(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{o}) \longrightarrow o$$

($\mathcal{C}'(\overline{o})$ et $\mathcal{C}(\overline{o})$ sont deux résolutions de zéro).

<u>Preuve de 3.1</u>. Associons tout d'abord au couple $(\overline{M}, \mathcal{C}(\overline{M}))$ une famille finie de modules sur $\mathbb{R}[[x]]$ (famille notée $\overline{M}_i$) ; des résolutions $\mathcal{C}(\overline{M}_i)$ de longueur $\leq n$ de ces modules ; enfin, des suites exactes de complexes liant ces différentes résolutions (l'ensemble de ces suites exactes sera noté $\mathcal{L}(\overline{M}, \mathcal{C}(\overline{M}))$).

Soit $o = \overline{N}_0 \subset \overline{N}_1 \subset \ldots\ldots \subset \overline{N}_{s+1} = \overline{M}$ une suite croissante de sous-modules de $\overline{M}$ telle que $\overline{P}_i = \overline{N}_{i+1}/\overline{N}_i \simeq \mathbb{R}[[x]]/\overline{\mathcal{P}}_i$ où $\overline{\mathcal{P}}_i$ est un idéal premier (cf. [3], chap. I). Pour tout $i = o,\ldots,s$, soit $(\overline{\varphi}^i)$ une intersection complète telle qu'on ait une suite exacte (cf. [3], chap. I) :

$$o \longrightarrow \overline{P}_i \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]/(\overline{\varphi}^i) = \overline{Q}_i \longrightarrow \overline{M}_i \longrightarrow o$$

Soient $\mathcal{C}(\overline{M}_i)$, $\mathcal{C}(\overline{P}_i)$ des résolutions de longueur $\leq$ n de $\overline{M}_i$ et $\overline{P}_i$ respectivement. Alors, on peut construire une résolution $\mathcal{C}(\overline{Q}_i)$ de $\overline{Q}_i$ et par récurrence sur $i=2,\ldots,s+1$, une résolution $\mathcal{C}'(\overline{N}_i)$ de $\overline{N}_i$, telles qu'on ait des suites exactes de complexes :

$$o \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{P}_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{Q}_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{M}_i) \longrightarrow o \qquad (3.1.4)$$

$$o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{N}_i) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{N}_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{P}_i) \longrightarrow o \qquad (3.1.5)$$

D'après (3.1.3), il existe une résolution $\mathcal{C}''(\overline{M})$ de $\overline{M}$ et des suites exactes :

$$o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}''(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{o}) \longrightarrow o \qquad (3.1.6)$$

$$o \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}''(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{o}) \longrightarrow o \qquad (3.1.7)$$

De même, d'après (3.1.1) et (3.1.3), il existe une résolution $\mathscr{C}'(\overline{Q}_i)$ de $\overline{Q}_i$ et des suites exactes :

$$o \longrightarrow \Lambda(\overline{\varphi}^{\,i}) \longrightarrow \mathscr{C}'(\overline{Q}_i) \longrightarrow \mathscr{C}''(\overline{o}) \longrightarrow o \qquad (3.1.8)$$

$$o \longrightarrow \mathscr{C}(\overline{Q}_i) \longrightarrow \mathscr{C}'(\overline{Q}_i) \longrightarrow \mathscr{C}'''(\overline{o}) \longrightarrow o \qquad (3.1.9)$$

Notons $\mathscr{L}(\overline{M}, \mathscr{C}(\overline{M}))$ l'ensemble des suites exactes de complexes (3.1.4),... ..., (3.1.9).

Répétant avec le couple $(\overline{M}_{i_1}, \mathscr{C}(\overline{M}_{i_1}))$ ce que l'on a fait avec $(\overline{M}, \mathscr{C}(\overline{M}))$, on associe à $\overline{M}_{i_1}$ des modules $\overline{M}_{i_1 i_2}$; des résolutions $\mathscr{C}(\overline{M}_{i_1 i_2})$ de ces modules ; et des familles de suites exactes de complexes $\mathscr{L}(\overline{M}_{i_1}, \mathscr{C}(\overline{M}_{i_1}))$. En itérant, on construit par récurrence sur ℓ, des modules $\overline{M}_{i_1 \dots i_\ell}$; des résolutions $\mathscr{C}(\overline{M}_{i_1 \dots i_\ell})$, et des systèmes de suites exactes de complexes $\mathscr{L}(\overline{M}_{i_1 \dots i_{\ell-1}}, \mathscr{C}(\overline{M}_{i_1 \dots i_{\ell-1}}))$.

Soit $\nu \in \mathbb{N}$; d'après le théorème d'Artin, on peut approcher analytiquement à l'ordre ν, le système $\mathscr{L}(\overline{M}, \mathscr{C}(\overline{M}))$, et donc il existe des o-suites $\mathscr{C}(P_i)$, $\mathscr{C}(Q_i)$, etc... telles que $\mathscr{C}(P_i) \overset{\nu}{\simeq} \mathscr{C}(\overline{P}_i)$; $\mathscr{C}(Q_i) \overset{\nu}{\simeq} \mathscr{C}(\overline{Q}_i)$, etc..., et des suites exactes de complexes de $\mathbb{R}\{x\}$-modules :

$$o \longrightarrow \mathscr{C}(P_i) \longrightarrow \mathscr{C}(Q_i) \longrightarrow \mathscr{C}(M_i) \longrightarrow o \qquad (3.1.10)$$

$$o \longrightarrow \mathscr{C}'(N_i) \longrightarrow \mathscr{C}'(N_{i+1}) \longrightarrow \mathscr{C}(P_i) \longrightarrow o \qquad (3.1.11)$$

$$o \longrightarrow \mathscr{C}'(M) \longrightarrow \mathscr{C}''(M) \longrightarrow \mathscr{C}'(o) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \mathscr{C}(M) \longrightarrow \mathscr{C}''(M) \longrightarrow \mathscr{C}(o) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \Lambda(\varphi^i) \longrightarrow \mathscr{C}'(Q_i) \longrightarrow \mathscr{C}''(o) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \mathscr{C}(Q_i) \longrightarrow \mathscr{C}'(Q_i) \longrightarrow \mathscr{C}'''(o) \longrightarrow o$$

Si ν est assez grand, d'après (3.1.1) et (3.1.3), les complexes $\Lambda(\varphi^i)$ et $\mathscr{C}'(o)$, $\mathscr{C}(o)$, $\mathscr{C}''(o)$, $\mathscr{C}'''(o)$ sont exactes ; il en résulte (considérer les quatre dernières suites exactes) que pour tout $j \geq 1$, $H_j(\mathscr{C}'(Q_i)) = H_j(\mathscr{C}(Q_i)) = o$; $H_j(\mathscr{C}'(M)) = H_j(\mathscr{C}''(M)) = H_j(\mathscr{C}(M))$.

Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Supposons que pour tout $i = o,\dots,s$, et tout $j \geq q$: $H_j(\mathcal{C}(M_i)) = o$. En considérant les deux suites exactes (3.1.10) et (3.1.11), modulo les égalités précédentes : $H_j(\mathcal{C}(P_i)) = o$ et donc $H_j(\mathcal{C}'(N_i)) = o$, pour tout $j \geq q-1$. En particulier, $H_j(\mathcal{C}(M)) = o$, si $j \geq q-1$.

En fait, on peut approcher analytiquement à l'ordre ν les systèmes $\mathcal{L}(\overline{M}, \mathcal{C}(\overline{M}))$, $\mathcal{L}(\overline{M}_{i_1}, \mathcal{C}(\overline{M}_{i_1}))$, $\mathcal{L}(\overline{M}_{i_1i_2}, \mathcal{C}(\overline{M}_{i_1i_2}))$, ..., $\mathcal{L}(\overline{M}_{i_1i_2\dots i_n}, \mathcal{C}(\overline{M}_{i_1i_2\dots i_n}))$ par des systèmes $\mathcal{L}(M, \mathcal{C}(M))$, $\mathcal{L}(M_{i_1}, \mathcal{C}(M_{i_1}))$, $\mathcal{L}(M_{i_1i_2}, \mathcal{C}(M_{i_1i_2}))$, ..., $\mathcal{L}(M_{i_1i_2\dots i_n}, \mathcal{C}(M_{i_1i_2\dots i_n}))$. Puisque $H_j(\mathcal{C}(M_{i_1i_2\dots i_n})) = o$ si $j \geq n+1$ (les complexes considérés sont de longueur $\leq n$), on aura d'après la remarque précédente (pourvu que ν soit assez grand) : $H_j(\mathcal{C}(M_{i_1i_2\dots i_{n-1}})) = o$ si $j \geq n$; $H_j(\mathcal{C}(M_{i_1i_2\dots i_{n-2}})) = o$ si $j \geq n-1$; ... ; $H_j(\mathcal{C}(M_{i_1})) = o$ si $j \geq 2$; et enfin $H_j(\mathcal{C}(M)) = o$ si $j \geq 1$, c.q.f.d. /

Soit M (resp. $\overline{M}$) un module sur $\mathbb{R}\{x\}$ (resp. $\mathbb{R}[[x]]$). Si $\nu \in \mathbb{N}$, nous écrirons que $M \overset{\nu}{\simeq} \overline{M}$ si $M/\underline{m}^{\nu+1}.M$ et $\overline{M}/\hat{\underline{m}}^{\nu+1}.\overline{M}$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{R}\{x\}$-modules ($\underline{m}$: idéal maximal de $\mathbb{R}\{x\}$; $\hat{\underline{m}}$: idéal maximal de $\mathbb{R}[[x]]$).

Théorème 3.2.

Soit $\overline{A} = \mathbb{R}[[x]]/\overline{I}$ *une algèbre formelle, réduite et équidimensionnelle de dimension* $n-k$. *Alors, pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, *il existe une algèbre analytique* $A = \mathbb{R}\{x\}/I$, *réduite et équidimensionnelle de dimension* $n-k$, *telle que* $A \overset{\nu}{\simeq} \overline{A}$.

Preuve : Supposons tout d'abord que $\overline{I}$ est un idéal premier de hauteur k. Soit $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_k) \in \mathbb{R}[[x]]^k$ tel que l'idéal $(\overline{\varphi})$ soit de hauteur k et tel que $\overline{I}$ soit un idéal premier associé à $\overline{B} = \mathbb{R}[[x]]/(\overline{\varphi})$. On a une suite exacte de $R[[x]]$-modules :

$$0 \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0 .$$

Il existe des complexes $\mathcal{C}(\overline{A})$, $\mathcal{C}(\overline{B})$, $\mathcal{C}(\overline{M})$, résolutions de longueur $\leq n$ de $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{M}$ respectivement, et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{B}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{M}) \longrightarrow 0.$$

On peut supposer, si $\overline{I}$ est engendré par q éléments, que $\mathcal{C}(\overline{A})$ est un complexe de la forme :

$$\dots \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]^p \xrightarrow{\overline{\lambda}_2} \mathbb{R}[[x]]^q \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \mathbb{R}[[x]] .$$

Enfin, d'après (3.1.3), il existe une résolution $\mathcal{C}'(\overline{B})$ de $\overline{B}$ et des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{B}) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{B}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{0}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Lambda(\overline{\varphi}) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{B}) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{0}) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{C}(\overline{0})$ et $\mathcal{C}'(\overline{0})$ sont des résolutions de zéro. D'après le théorème d'Artin, il existe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathbb{R}\{x\}^k$ et des complexes de $\mathbb{R}\{x\}$-modules $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(B)$, $\mathcal{C}(M)$ etc... tels que $\varphi \overset{\nu}{\simeq} \overline{\varphi}$, $\mathcal{C}(A) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{A})$, $\mathcal{C}(B) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{B})$, $\mathcal{C}(M) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{M})$ etc.. et des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{C}(M) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{C}'(B) \longrightarrow \mathcal{C}(0) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \Lambda(\varphi) \longrightarrow \mathcal{C}'(B) \longrightarrow \mathcal{C}'(0) \longrightarrow 0$$

D'après le théorème 3.1, on peut supposer que tous ces complexes sont exacts. On en déduit une injection :

$$0 \longrightarrow A = \mathbb{R}\{x\}/I \longrightarrow B = \mathbb{R}\{x\}/(\varphi).$$

Ainsi, tout idéal premier associé à A est associé à B, donc de hauteur $\leq k$, car (φ) est une intersection complète si ν est assez grand. En outre, $\mathcal{C}(A)$ est de la forme :

$$\dots\dots \longrightarrow \mathbb{R}\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_2} \mathbb{R}\{x\}^q \xrightarrow{\lambda_1} \mathbb{R}\{x\} .$$

Soit $\sigma'_k(I)$ (resp. $\sigma'_k(\overline{I})$) l'idéal engendré par les mineurs d'ordre q-k de la matrice λ_2 (resp. $\overline{\lambda}_2$). Si ν est assez grand, ht $\sigma'_k(I) \geq$ ht $\sigma'_k(\overline{I})$; de même, on aura ht $J_k(I) \geq$ ht $J_k(\overline{I})$.

D'après [3] (proposition 3.6, chap. II), on a ht $\mathcal{R}_k(\overline{I})$ = ht $\sigma'_k(\overline{I}) \cap J_k(\overline{I}) > k$; d'où ht $\mathcal{R}_k(I)$ = ht $\sigma'_k(I) \cap J_k(I) > k$; puisque tous les idéaux premiers associés à $A = \mathbb{R}\{x\}/I$ sont de hauteur k, il existe donc $\delta \in \mathcal{R}_k(I)$ non diviseur de zéro dans A.

D'après la proposition 3.6, chap. II de [3], A est réduite et équidimensionnelle de dimension n-k ; en outre, $A \overset{\nu}{\simeq} \bar{A}$, c.q.f.d.

Posons $\bar{I} = \bar{\mathfrak{P}}_1 \cap \dots \cap \bar{\mathfrak{P}}_s$ où les $\bar{\mathfrak{P}}_i$ sont premiers de hauteur k. Démontrons le théorème par récurrence sur s . Si s = 1, cela résulte de ce qui précède. Supposons le théorème démontré jusqu'à l'ordre s -1, et démontrons le pour $\bar{I}$. Posons $\bar{I} = \bar{\mathfrak{P}}_1 \cap \bar{\mathfrak{Q}}$, où $\bar{\mathfrak{Q}} = \bar{\mathfrak{P}}_2 \cap \dots \cap \bar{\mathfrak{P}}_s$; $\bar{A}_1 = \mathbb{R}[[x]]/\bar{\mathfrak{P}}_1$; $\bar{A}_2 = \mathbb{R}[[x]]/\bar{\mathfrak{Q}}$.
On a un diagramme commutatif où les lignes et colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{\mathfrak{P}}_1 \cap \bar{\mathfrak{Q}} & \longrightarrow & \bar{\mathfrak{P}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{Q}} & \longrightarrow & \bar{\mathfrak{P}}_1 + \bar{\mathfrak{Q}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[[x]] & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathbb{R}[[x]] \oplus \mathbb{R}[[x]] & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathbb{R}[[x]] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{A} & \longrightarrow & \bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2 & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les flèches verticales sont évidentes ; $\bar{\delta}$ est l'application diagonale : $\xi \longrightarrow (\xi,\xi)$; $\bar{p}$ la projection : $(\xi_1 , \xi_2) \longrightarrow \xi_1 - \xi_2$. Il existe donc des résolutions de longueur $\leq n$: $\mathcal{C}(\bar{A})$, $\mathcal{C}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2)$, $\mathcal{C}(\bar{B})$ de $\bar{A}$, $\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2$, $\bar{B}$ respectivement telles qu'on ait une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\bar{A}) \xrightarrow{\bar{\Delta}} \mathcal{C}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2) \xrightarrow{\bar{P}} \mathcal{C}(\bar{B}) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{C}(\bar{A})_0 = \mathbb{R}[[x]]$; $\mathcal{C}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2)_0 = \mathbb{R}[[x]] \oplus \mathbb{R}[[x]]$; $\mathcal{C}(\bar{B})_0 = R[[x]]$ et $\bar{\Delta}_0 = \bar{\delta}$; $\bar{P}_0 = \bar{p}$.

D'après le théorème d'Artin et le théorème 3.1, il existe des complexes exacts analytiques $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(D)$, $\mathcal{C}(B)$ tels que $\mathcal{C}(A) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\bar{A})$, $\mathcal{C}(D) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)$, $\mathcal{C}(B) \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{C}(\bar{B})$ et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}(D) \xrightarrow{P} \mathcal{C}(B) \longrightarrow 0$$

telle que $\Delta_o = \delta : \mathbb{R}\{x\} \ni \xi \longrightarrow (\xi,\xi) \in \mathbb{R}\{x\} \oplus \mathbb{R}\{x\}$ et $P_o = p$: $\mathbb{R}\{x\} \oplus \mathbb{R}\{x\} \ni (\xi_1 , \xi_2) \longrightarrow \xi_1 - \xi_2 \in \mathbb{R}\{x\}$. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

où l'injection de $A = \mathbb{R}\{x\}/I \longrightarrow D = (\mathbb{R}\{x\} \oplus \mathbb{R}\{x\})/J$ est induite par l'application diagonale.

Soient $\mathcal{C}(\overline{A}_1)$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{A}_2)$) une résolution de $\overline{A}_1$ (resp. $\overline{A}_2$) obtenue à partir d'une résolution de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$). Puisque $\mathcal{C}(\overline{A}_1) \oplus \mathcal{C}(\overline{A}_2)$ est une résolution de $\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2$, il existe d'après (3.1.3) une résolution $\mathcal{C}'(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)$ de $\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2$ telle qu'on ait des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{A}_1) \oplus \mathcal{C}(\overline{A}_2) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{0}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2) \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{0}) \longrightarrow 0$$

les flèches $\mathcal{C}(\overline{A}_1) \oplus \mathcal{C}(\overline{A}_2)\ o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{A}_1 \oplus A_2)\ o$ et $\mathcal{C}(\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2)\ o \longrightarrow \mathcal{C}'(\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2)\ o$ étant des isomorphismes, car tous ces modules sont identifiés à $\mathbb{R}[[x]] \oplus \mathbb{R}[[x]]$.

D'après le théorème d'Artin, il existe des complexes analytiques $\mathcal{C}(D')$, $\mathcal{C}(A_1)$, $\mathcal{C}(A_2)$ résolutions de longueur $\leq n$ de D', A_1 A_2 respectivement tels qu'on ait des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A_1) \oplus \mathcal{C}(A_2) \longrightarrow \mathcal{C}(D') \longrightarrow \mathcal{C}(0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(D) \longrightarrow \mathcal{C}(D') \longrightarrow \mathcal{C}'(0) \longrightarrow 0$$

et $\mathcal{C}(A_1) \overset{\vee}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{A}_1)$; $\mathcal{C}(A_2) \overset{\vee}{\simeq} \mathcal{C}(\overline{A}_2)$. D'après les deux suites exactes précédentes : $D' \sim A_1 \oplus A_2 \sim D$. En outre, d'après la première partie de cette démonstration et l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que A_1 et A_2 sont réduites et équidimensionnelles de dimension n-k. Modulo l'isomorphisme : $D \sim A_1 \oplus A_2$, on a donc une injection : $0 \longrightarrow A \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ déduite de l'application diagonale $\mathbb{R}\{x\} \longrightarrow \mathbb{R}\{x\} \oplus \mathbb{R}\{x\}$, ce qui implique que A est réduite et équidimensionnelle de dimension n-k, c.q.f.d. /

Dans cet ordre d'idées, on peut aussi démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.

Soit $\overline{A} = \mathbb{R}[[x]]/\overline{I}$ *une algèbre formelle, normale de dimension* n-k *(resp. intègre de dimension* n-k*). Alors, pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$ *, il existe une algèbre analytique* $A = \mathbb{R}\{x\}/I$ *normale de dimension* n-k *(resp. intègre de dimension* n-k*), telle que :* $A \overset{\nu}{\simeq} \overline{A}$.

Preuve : La méthode de démonstration est analogue à la précédente. Pour le cas normal, on utilise le théorème 3.1 et le critère de normalité pour les algèbres analytiques et formelles (théorème 3.7, chap. II, [3]). Pour le cas intègre, on plonge $\overline{A}$ dans sa normalisée $\overset{\approx}{A}$, on approche analytiquement l'injection $\overline{A} \longrightarrow \overset{\approx}{A}$ par une injection d'algèbres analytiques $A \longrightarrow \tilde{A}$, où (d'après le cas normal), on peut supposer que $\tilde{A}$ est normale, et donc A intègre. /

On peut étendre dans plusieurs directions les résultats précédents. D'abord, avec les notations du début de ce paragraphe 3, supposons que les éléments $\overline{\lambda}_i^{\alpha\beta}$ des matrices $\overline{\lambda}_i$ vérifient certaines relations analytiques en nombre fini $F_j(\overline{\lambda}_i^{\alpha\beta}) = o$; alors, dans l'énoncé du théorème 3.1, on peut supposer que les éléments $\lambda_i^{\alpha\beta}$ des matrices λ_i vérifient les mêmes relations, i.e. $F_j(\lambda_i^{\alpha\beta}) = o$.

Par exemple, supposons que $\overline{M} = \mathbb{R}[[x]]^q/\overline{N}$ et $\hat{N}_1 \subset \overline{N} \subset \hat{N}_2$, où N_1 et N_2 sont deux sous-modules de $\mathbb{R}\{x\}^q$, le premier engendré sur $\mathbb{R}\{x\}$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$; le second, par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s$; supposons enfin que $\overline{N}$ est engendré sur $R[[x]]$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \sum_{j=1}^{s} \overline{n}_{r+1,j}\, \varphi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{s} \overline{n}_{p,j}\, \varphi_j$ où les $\overline{n}_{i,j}$ appartiennent à $\mathbb{R}[[x]]$. Les inclusions : $\hat{N}_1 \subset \overline{N} \subset \hat{N}_2$ se traduisent de la manière suivante : $\overline{M}$ est le conoyau de la matrice $\mathbb{R}[[x]]^p \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \mathbb{R}[[x]]^q$ où les colonnes de $\overline{\lambda}_1$ sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \sum_{j=1}^{s} \overline{n}_{r+1,j}\, \varphi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{s} \overline{n}_{p,j}\, \varphi_j$. Soit $\mathcal{C}(\overline{M})$: $\ldots \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]^p \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \mathbb{R}[[x]]^q$, une résolution de longueur $\leq$ n de $\overline{M}$. On peut

supposer que le complexe $\mathcal{C}(M) : \ldots \longrightarrow \mathbb{R}\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_1} \mathbb{R}\{x\}^q$ donné par le théorème 3.1 vérifie la condition : les colonnes de λ_1 sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, $\sum_{j=1}^{s} n_{r+1,j}\varphi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{s} n_{p,j}\varphi_j$, où $n_{i,j} \in \mathbb{R}\{x\}$ et $n_{i,j} \overset{\nu}{\simeq} \bar{n}_{i,j}$.
Ainsi, $M = \mathbb{R}\{x\}^q/N$ avec $N_1 \subset N \subset N_2$.

En particulier, on peut compléter comme suit les théorèmes 3.2 et 3.3 :

3.4 : *Supposons, en plus des hypothèses de 3.2 (ou 3.3), qu'il existe des algèbres analytiques* $A_1 = \mathbb{R}\{x\}/I_1$ *et* $A_2 = \mathbb{R}\{x\}/I_2$ *telles que* $\bar{A}$ *soit un quotient de* $\hat{A}_1$ *et* $\hat{A}_2$ *un quotient de* $\bar{A}$. *Alors, dans la conclusion, on peut supposer que* A *est un quotient de* A_1 *et* A_2 *un quotient de* A.

Un deuxième exemple est le suivant. Posons $x' = (x_1, \ldots, x_{n-k})$; $x'' = (x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$. Soit $\mathbb{R}\{x'\}[x'']$ (resp. $\mathbb{R}[[x']][x'']$), l'anneau des polynômes en x'' à coefficients dans $\mathbb{R}\{x'\}$ (resp. $\mathbb{R}[[x']]$) et soit $\mathbb{R}\{x'/x''\}$ (resp. $\mathbb{R}[[x'/x'']]$) le localisé de $\mathbb{R}\{x'\}[x'']$ (resp. $\mathbb{R}[[x']][x'']$) par rapport à l'idéal maximal engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Les deux lemmes suivants sont des conséquences faciles du théorème de préparation :

Lemme 3.5.

(i) *L'anneau* $\mathbb{R}\{x\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x]]$*) est fidèlement plat sur* $\mathbb{R}\{x'/x''\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x'/x'']]$*).*

(ii) *Soit* M *un module sur* $\mathbb{R}\{x'/x''\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x'/x'']]$*), de type fini sur* $\mathbb{R}\{x'\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x']]$*). Alors, l'application canonique* $M \ni m \longrightarrow m \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{R}\{x'/x''\}} \mathbb{R}\{x\}$ *(resp.* $M \ni m \longrightarrow m \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{R}[[x'/x'']]} \mathbb{R}[[x]]$*) est un isomorphisme.*

Preuve : Nous le démontrons dans le cas analytique. Les anneaux locaux noethériens $\mathbb{R}\{x'/x''\}$ et $\mathbb{R}\{x\}$ ont même complété $\mathbb{R}[[x]]$, ce qui entraîne (i). D'après (i), l'application $m \longrightarrow m \otimes 1$ est injective ; montrons qu'elle est surjective.

Par hypothèse, $M/(x').M$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe donc un entier q tel que : $(x_{n-k+1})^q.\ M \subset (x').M, \ldots, (x_n)^q.\ M \subset (x').M$; d'après le lemme de Nakayama, il existe un entier p et $P_{n-k+1} = (x_{n-k+1})^p + Q_{n-k+1} \in \mathrm{Ann}\ M, \ldots, P_n = (x_n)^p + Q_n \in \mathrm{Ann}\ M$ tels que $Q_{n-k+1}, \ldots, Q_n$ appartiennent à l'idéal engendré par (x') dans $\mathbb{R}\{x'/x''\}$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}\{x\}$; d'après le théorème de préparation analytique :

$$\varphi = \sum_{i=n-k+1}^{n} P_i \cdot \varphi_i + P$$

où $\varphi_i \in \mathbb{R}\{x\}$ et $P \in \mathbb{R}\{x'\}[x'']$. Donc, si $m \in M$:

$$m \otimes \varphi = \sum_{i=n-k+1}^{n} P_i.m \otimes \varphi_i + P.m \otimes 1 = P.m \otimes 1, \quad \text{c.q.f.d.} /$$

Lemme 3.6.

Soient $M_1, \ldots, M_s$ *des modules de type fini sur* $\mathbb{R}\{x\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x]]$*), de dimensions* $\leq n-k$. *Alors, modulo un certain changement linéaire de coordonnées, les* M_i *sont des modules de type fini sur* $\mathbb{R}\{x'\}$ *(resp.* $\mathbb{R}[[x']]$*).*

Preuve : Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème de préparation./

Revenons aux notations et hypothèses de 3.1 et supposons que $\dim \overline{M} \leq n-k$.

Après un éventuel changement linéaire de coordonnées (d'après 3.5 et 3.6), le module $\overline{M}$ admet une résolution $\mathcal{C}(\overline{M})$ de longueur $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}[[x']]\ [x'']$. Avec ce choix de $\mathcal{C}(\overline{M})$, on peut alors supposer que tous les complexes et tous les morphismes de complexes qui interviennent dans la preuve de 3.1 et qui sont à coefficients dans $\mathbb{R}[[x]]$, sont en fait à coefficients dans $\mathbb{R}[[x']]\ [x'']$. D'après le théorème d'Artin, on peut approcher ces complexes par des complexes à coefficients dans $\mathbb{R}\{x'\}\ [x'']$; on obtient le résultat suivant :

3.7. *Soit* $\overline{M}$ *un module de type fini sur* $\mathbb{R}[[x]]$ *tel que* $\dim \overline{M} \leq n-k$. *Alors :*

(i) Après un éventuel changement linéaire de coordonnées, le module $\overline{M}$ *admet une résolution de longueur* $\leq n$, $\mathcal{C}(\overline{M})$:

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \hat{L}_n \xrightarrow{\overline{\lambda}_n} \ldots \longrightarrow \hat{L}_1 \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \hat{L}_0$$

à coefficients $\overline{\lambda}_i^{\alpha\beta} = \sum_j \overline{\lambda}_{i\,j}^{\alpha\beta}\,(x')\,x''^{j} \in \mathbb{R}[[x']]\,[x'']$

(ii) Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, *il existe un module* M *sur* $\mathbb{R}\{x\}$ *et une résolution* $\mathcal{C}(M)$:

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\lambda_n} \qquad \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\lambda_1} L_o$$

à coefficients $\lambda_i^{\alpha\beta} = \sum_j \lambda_{i\,j}^{\alpha\beta}\,(x')\,x''^{j} \in \mathbb{R}\{x'\}\,[x'']$, *vérifiant pour tous* i,j,α,β :

$$\lambda_{i\,j}^{\alpha\beta}\,(x') \overset{\nu}{\simeq} \overline{\lambda}_{i\,j}^{\alpha\beta}\,(x').$$

Une deuxième variante du théorème 3.1 est la suivante. Au lieu d'utiliser le théorème d'Artin, on peut utiliser le théorème 1.2 (plus complet), ou du moins la partie de ce théorème affirmant que toute solution formelle d'un système d'équations analytiques, se relève en une solution C^∞.

Pour cela, précisons tout d'abord quelques notations. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, posons $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \prod_{a \in U} \tilde{\mathcal{F}}_a$, où $\tilde{\mathcal{F}}_a = \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$. Si $\mathcal{E}(U)$ est l'anneau des fonctions numériques de classe C^∞ dans U, on a une injection $\mathcal{E}(U) \ni f \longrightarrow (\hat{f}_a)_{a\in U} \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$, où $\hat{f}_a$ est la série de Taylor de f en a. Soit $\tilde{\mathcal{F}}(x)$ la limite inductive des $\tilde{\mathcal{F}}(U)$, U décrivant l'ensemble des voisinages ouverts de l'origine de $\mathbb{R}^n$: $\tilde{\mathcal{F}}(x)$ est "l'anneau des germes de champs de séries formelles à l'origine de $\mathbb{R}^n$". On a évidemment, par passage à la limite inductive sur les injections : $\mathcal{E}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U)$, une injection $\mathcal{E}(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(x)$. Nous dirons qu'une suite $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ de modules de type fini sur $\mathcal{E}(x)$ est <u>formellement exacte</u> si la suite $M' \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x) \xrightarrow{u\otimes 1} M \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x) \xrightarrow{v\otimes 1} M'' \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x)$ est exacte.

Reprenant la démonstration du théorème 3.1, on démontre aisément le résultat suivant :

<u>3.8</u>. *Soit* $\overline{M}$ *un module de type fini sur* $\mathbb{R}[[x]]$ *et soit* $\mathcal{C}(\overline{M})$:

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \hat{L}_n \xrightarrow{\overline{\lambda}_n} \;\cdots\cdots\; \longrightarrow \hat{L}_1 \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \hat{L}_o$$

une résolution de $\overline{M}$, *où* $L_i = \mathcal{E}(x)^{n_i}$ *et* $\hat{L}_i = \mathbb{R}[[x]]^{n_i}$.

Alors, il existe un complexe $\mathcal{C}(M)$ *à coefficients dans* $\mathcal{E}(x)$, *formellement exact (i.e.* $\mathcal{C}(M) \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x)$ *est exact) :*

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\lambda_n} \ \ldots\ldots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\lambda_1} L_o$$

tel que, pour tout $i=1,\ldots,n$: $\hat{\lambda}_i = \overline{\lambda}_i$.

En outre, si $\overline{\lambda}_i^{\alpha\beta} = \sum_j \overline{\lambda}_{i\,j}^{\alpha\beta}(x')\, x''^j \in \mathbb{R}[[x']]\,[x'']$ *pour tous* i,α,β , *on peut supposer que* $\lambda_i^{\alpha\beta} = \sum_j \lambda_{i\,j}^{\alpha\beta}(x')\, x''^j \in \mathcal{E}(x')\,[x'']$, *avec pour tous* i,j,α,β : $\hat{\lambda}_{i\,j}^{\alpha\beta}(x') = \overline{\lambda}_{i\,j}^{\alpha\beta}(x')$.

4. RELEVEMENT DES IDEAUX DE $\mathbb{R}[[x]]$ EN IDEAUX FERMES DE $\mathcal{E}(x)$.

Rappelons tout d'abord quelques définitions et résultats (cf. [3], chap. V). Soit $\mathcal{E}(U)$ l'anneau des fonctions numériques de classe C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$; munissons $\mathcal{E}(U)^q$ de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact de U. Un module M(U) sur $\mathcal{E}(U)$ est un <u>module de Fréchet</u> si M(U) est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme : $\mathcal{E}(U)^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{E}(U)^q$, l'image de λ étant fermée dans $\mathcal{E}(U)^q$. Un idéal I(U) de $\mathcal{E}(U)$, engendré par des fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ sur $\mathcal{E}(U)$, est un <u>idéal de Łojasiewicz</u>, si pour tout compact K de U, il existe des constantes $C>0$ et $\alpha \geq 0$ telles que, $\forall x \in K$: $\sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| \geq C\, d\,(x, V\,(I(U))\,)^{\alpha}$. Tout idéal fermé de type fini de $\mathcal{E}(U)$ est un idéal de Łojasiewicz (cf. [3], chap. V, corollaire 4.4).

Un module M sur $\mathcal{E}(x)$ <u>est un module de Fréchet</u> s'il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et un module de Fréchet M(U), tels que

$M \simeq M(U) \otimes_{\mathcal{E}(U)} \mathcal{E}(x)$. Un module M, de présentation finie sur $\mathcal{E}(x)$, est un module de Fréchet, si et seulement si l'application canonique :
$M \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x)$ est injective (cf. [3], chap. V, proposition 3.4.).
Un idéal I de $\mathcal{E}(x)$ est <u>fermé</u> (resp. <u>de Łojasiewicz</u>), s'il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et un idéal fermé de type fini (resp. un idéal de Łojasiewicz) I(U) de $\mathcal{E}(U)$, tel que I(U) induise I à l'origine. Tout idéal fermé de $\mathcal{E}(x)$ est donc un idéal de Łojasiewicz.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant :

<u>Théorème 4.1.</u>

Soit $\overline{M}$ *un module de type fini sur* $\mathbb{R}[[x]]$ *; alors, il existe un module de Fréchet* M *sur* $\mathcal{E}(x)$ *tel que* $\overline{M} \simeq M \otimes_{\mathcal{E}(x)} \mathbb{R}[[x]]$.

Un idéal I de $\mathcal{E}(x)$ est fermé si et seulement si $\mathcal{E}(x)/I$ est un module de Fréchet ; donc :

<u>Corollaire 4.2.</u>

Soit $\overline{I}$ *un idéal de* $\mathbb{R}[[x]]$ *; alors, il existe un idéal fermé (donc de Łojasiewicz)* I *de* $\mathcal{E}(x)$ *tel que* $\hat{I} = \overline{I}$. (*)

<u>4.3.</u> Ce dernier corollaire va nous permettre de préciser la notion de <u>variété formelle</u> (J. Merrien, [8]). Soit $\mathcal{G}_n$ la famille des germes d'ensembles à l'origine de $\mathbb{R}^n$, contenant l'origine. Si $X \in \mathcal{G}_n$, notons $\underset{\sim}{X}$ un sous-ensemble borné de

---

(*) En fait, on a un résultat beaucoup plus précis : l'idéal I est non seulement fermé, mais aussi stratifiable (cf. [3], chap. VII, § 2). En outre, toute courbe formelle $\overline{\xi}(t)$ contenue dans $V(\overline{I})$ se relève en une courbe C^∞ $\xi(t)$ contenue dans V(I) (i.e. si $\overline{\xi}(t) \in \mathbb{R}[[t]]^n$, avec $\overline{\xi}(o) = o$ et $\overline{f}(\overline{\xi}(t)) = o$ pour tout $\overline{f} \in \overline{I}$, il existe $\xi(t) \in \mathcal{E}(t)^n$, avec $\hat{\xi}(t) = \overline{\xi}(t)$ et $f(\xi(t)) = o$ pour tout $f \in I$).

$\mathbb{R}^n$ induisant X à l'origine. On définit une relation de pré-ordre sur $\mathcal{G}_n$: $X \leq Y$, si à tout $p \in \mathbb{N}$, on peut associer une constante $C_p > o$ telle que, $\forall\, x \in \underset{\sim}{X}$: $d(x, \underset{\sim}{Y}) \leq C_p \|x\|^p$ (visiblement, cette définition est indépendante des représentants bornés $\underset{\sim}{X}$ et $\underset{\sim}{Y}$ choisis). Soit $\hat{\mathcal{G}}_n$ le quotient de $\mathcal{G}_n$ par la relation d'équivalence : $X \sim Y \Longleftrightarrow X \leq Y$ et $Y \leq X$, et soit $\hat{X}$ la classe de X. La relation de préordre sur $\mathcal{G}_n$ induit une relation d'ordre sur $\hat{\mathcal{G}}_n$: $\hat{X} \leq \hat{Y}$ si et seulement si $X \leq Y$.

Si $\varphi \in \mathbb{R}[[x]]$, on note $\underset{\sim}{\varphi}$ une fonction numérique C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telle que la série de Taylor de $\underset{\sim}{\varphi}$ à l'origine soit φ. Si $\hat{X} \in \hat{\mathcal{G}}_n$, nous dirons que $\underline{\varphi = o}$ $\underline{\text{sur } \hat{X}}$ si à tout $p \in \mathbb{N}$, on peut associer une constante $A_p > o$ telle que $\forall\, x \in \underset{\sim}{X}$, $|\underset{\sim}{\varphi}(x)| \leq A_p \|x\|^p$ (cette définition est indépendante des représentants : X de la classe $\hat{X}$; $\underset{\sim}{\varphi}$ de φ). Un idéal $\bar{I}$ de $\mathbb{R}[[x]]$ s'annule sur $\hat{X}$ si $\varphi = o$ sur $\hat{X}$ pour tout $\varphi \in \bar{I}$.

Revenons aux notations du corollaire 4.2. Considérons l'ensemble $\mathcal{V}(\bar{I})$ des $\hat{X} \in \hat{\mathcal{G}}_n$ tels que $\bar{I}$ s'annule sur $\hat{X}$. Visiblement, $\widehat{V(I)} \in \mathcal{V}(\bar{I})$; en outre, $\widehat{V(I)}$ est maximum dans $\mathcal{V}(\bar{I})$ (donc $\widehat{V(I)}$ ne dépend que de $\bar{I}$; nous le noterons $V(\bar{I})$ et nous dirons que $\underline{V(\bar{I}) \text{ est la variété formelle associée à } \bar{I}}$). En effet, soit $\hat{X} \in \hat{\mathcal{G}}$ tel que $\bar{I}$ s'annule sur $\hat{X}$. Par hypothèse, si I est engendré par $\underset{\sim}{\varphi}_1, \ldots, \underset{\sim}{\varphi}_s$, fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes $A_p > o$ telles que, $\forall\, x \in \underset{\sim}{X}$: $\sum_{i=1}^{s} |\underset{\sim}{\varphi}_i(x)| \leq A_p \|x\|^p$; d'autre part, l'idéal engendré par les $\underset{\sim}{\varphi}_i$ étant de Łojasiewicz au voisinage de l'origine : $\sum_{i=1}^{s} |\underset{\sim}{\varphi}_i(x)| \geq C\, d(x, \underset{\sim}{V}(I))^\alpha$ pour $|x|$ assez petit. Ainsi, pour $x \in \underset{\sim}{X}$ assez voisin de l'origine :

$$C\, d\,(x, V(I))^\alpha \leq A_p \|x\|^p \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N} ;$$

ce qui entraîne $\hat{X} \leq \widehat{V(I)}$. Si $\bar{J}$ est un second idéal de $\mathbb{R}[[x]]$, on vérifie les formules : $V(\bar{I} + \bar{J}) = V(\bar{I}) \cap V(\bar{J})$; $V(\bar{I} \cap \bar{J}) = V(\bar{I}) \cup V(\bar{J})$. Si $\bar{I}$ est engendré sur $\mathbb{R}[[x]]$ par un idéal I de $\mathbb{R}\{x\}$, on vérifie que $V(\bar{I}) = \widehat{V(I)}$ (en effet, l'idéal

I. $\mathcal{E}(x)$ engendré par des germes de fonctions analytiques est fermé, [3], chap. VI, corollaire 1.2). Soit J un second idéal de $\mathbb{R}\{x\}$; l'égalité $\widehat{V(I)} = \widehat{V(J)}$ implique $V(I) = V(J)$ (en effet, l'idéal des séries formelles nulles sur $V(I)$ s'identifie à l'idéal $\widehat{\mathcal{J}(V(I))}$ complété de l'idéal des germes analytiques nuls sur $V(I)$ (cf. B. Malgrange, [9]) ; donc $\widehat{\mathcal{J}(V(I))} = \widehat{\mathcal{J}(V(J))}$, i.e. $\mathcal{J}(V(I)) = \mathcal{J}(V(J))$, i.e. $V(I) = V(J)$). Ainsi, *tout germe d'ensemble analytique* $V(I)$ *peut être identifié sans ambiguité avec la variété formelle associée* $\widehat{V(I)}$.

Soit $\mathcal{H}(n)$ le groupe des germes à l'origine de $\mathbb{R}^n$ d'homéomorphismes $\underset{\sim}{h}$ d'un voisinage U de O sur un voisinage V de O tels que $\underset{\sim}{h}(o) = o$ et, $\forall\ x, x' \in U$:

$$|x-x'|^{\rho_2} \geq |\underset{\sim}{h}(x) - \underset{\sim}{h}(x')| \geq |x-x'|^{\rho_1}$$

(ρ_1, ρ_2 réels > o dépendant de $\underset{\sim}{h}$).

Visiblement, si X et $Y \in \mathcal{G}_n$ et $h \in \mathcal{H}(n)$, l'inégalité $X \leq Y$ implique $h(X) \leq h(Y)$. Donc, $\mathcal{H}(n)$ opère sur $\hat{\mathcal{G}}_n$. Visiblement, $\mathcal{H}(n)$ contient le groupe Diff (n,ν) des difféomorphismes locaux de classe C^ν, $\nu \geq 1$, à l'origine de $\mathbb{R}^n$ (on pose Diff (n,∞) = Diff (n)). Le théorème 2.4 et le corollaire 2.8 entraînent le résultat suivant :

<u>4.4</u>. *Soit* $\bar{I}$ *un idéal de* $R[[x]]$ *tel que* $\mathcal{R}_k(\bar{I})$ *soit elliptique (resp. contient une puissance de* $\underline{\hat{m}}$*) ; alors, pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, *il existe* $h \in$ Diff (n,ν) *(resp. il existe* $h \in$ Diff (n)) *tel que* $h\,(V(\bar{I})) = \widehat{V(I)}$, *où* $V(I)$ *est un germe d'ensemble analytique*.

<u>Problèmes</u> : Soit $V(\bar{I})$ une variété formelle ; existe-t-il $h \in \mathcal{H}(n)$ tel que $h(V(\bar{I})) = \widehat{V(I)}$, où $V(I)$ est un germe d'ensemble analytique ? Existe-t-il un idéal fermé I de $\mathcal{E}(x)$ et $h \in \mathcal{H}(n)$ tels que $\hat{I} = \bar{I}$ et $h\,(V(I))$ soit un germe d'ensemble analytique ? Il est clair qu'une réponse au second problème fournit une réponse au premier (une démonstration utiliserait le théorème 1.2 dans son intégralité et le théorème d'isotopie de Thom).

Soient V(I) et V(J) deux germes d'ensembles analytiques à l'origine de $\mathbb{R}^n$; si $h\,(\widehat{V(I)}) = \widehat{V(J)}$, avec $h \in \mathrm{Diff}\,(n)$ (on dira que V(I) et V(J) sont formellement isomorphes), les germes V(I) et V(J) sont analytiquement isomorphes (évident d'après le théorème d'Artin). Si $h\,(\widehat{V(I)}) = \widehat{V(J)}$, avec $h \in \mathcal{H}(n)$, existe-t-il $h^* \in \mathcal{H}(n)$ tel que $h^*\,(V(I)) = V(J)$?

<u>Preuve de 4.1.</u> Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

<u>Lemme 4.5.</u>

Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite de modules de présentation finie sur* $\mathcal{E}(x)$*, exacte à droite et formellement exacte. Si* M' *et* M'' *sont des modules de Fréchet, la suite est exacte et* M *est un module de Fréchet.*

<u>Preuve</u> : On a un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "j''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x) \arrow[r] & M \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x) \arrow[r] & M'' \otimes_{\mathcal{E}(x)} \tilde{\mathcal{F}}(x) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque j' est injective, i est injective ; puisque j' et j" sont injectives, j est injective./

Le résultat suivant est classique :

<u>Lemme 4.6.</u>

Soit $\overline{\mathfrak{p}}$ *un idéal premier de* $\mathbb{R}[[x]]$ *de hauteur* k*. Alors, après un changement linéaire de coordonnées (on pose* $x' = (x_1,\dots,x_{n-k})$; $x'' = x_{n-k+1},\dots,x_n)$*) il existe un polynôme* $\overline{P}_{n-k+1} \in \mathbb{R}[[x']]\,[x_{n-k+1}]$; *pour* $2 \le j \le k$, *des polynômes* $\overline{Q}_{n-k+1} \in \mathbb{R}[[x']]\,[x_{n-k+1}]$; *enfin, pour* $1 \le \ell \le s$ *des polynômes* $\overline{R}_\ell \in \mathbb{R}[[x']]\,[x'']$ *tels que :*

(i) L'idéal $\overline{\mathfrak{p}}$ *est engendré par les* $\overline{R}_\ell$, $1 \le \ell \le s$.

(ii) Le polynôme $\overline{P}_{n-k+1}$ *appartient à* $\overline{\mathfrak{p}}$ *; il est distingué et son discriminant* $\overline{\delta}(x') \notin \overline{\mathfrak{p}}$.

(iii) Pour tout $2 \leq j \leq k$, $\overline{P}_{n-k+j} = \overline{\delta}.\, x_{n-k+j} - \overline{Q}_{n-k+j} \in \overline{\mathfrak{P}}$.

(iiii) Il existe un entier $q \geq o$ *tel que pour tout* $\ell = 1, \dots, s$, $\overline{\delta}^{q}.\overline{R}_{\ell}$. *soit combinaison linéaire dans* $\mathbb{R}[[x']]\ [x'']$ *des* $\overline{P}_{n-k+j}$, $1 \leq j \leq k$.

Soit $\overline{M}$ un module de type fini sur $\mathbb{R}[[x]]$, de dimension $\leq n-k$. Il existe une suite croissante $o = \overline{N}_0 \subset N_1 \subset \dots \subset \overline{N}_{s+1} = \overline{M}$ de sous-modules de $\overline{M}$, telle que $\overline{P}_i = \overline{N}_{i+1}/\overline{N}_i \simeq \mathbb{R}[[x]]/\overline{\mathfrak{P}}_i$ où $\mathfrak{P}_i$ est un idéal premier de hauteur $\geq k$. Après un éventuel changement linéaire de coordonnées, les $\overline{P}_i$ admettent des résolutions $\mathcal{C}(\overline{P}_i)$ de longueur $\leq n$, à coefficients dans $\mathbb{R}[[x']]\ [x'']$:

$$\dots \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]^{p_i} \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \mathbb{R}[[x]].$$

Il existe des résolutions $\mathcal{C}(\overline{N}_i)$ de $\overline{N}_i$ à coefficients dans $\mathbb{R}[[x']]\ [x'']$ et des suites exactes : $o \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{N}_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{N}_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{P}_i) \longrightarrow 0$ pour $i=1,\dots,s$. D'après 1.2, il existe des complexes $\mathcal{E}(N_i)$, $\mathcal{E}(P_i)$ de longueur $\leq n$, à coefficients dans $\mathcal{E}(x')\ [x'']$, qui relèvent $\mathcal{C}(\overline{N}_i)$ et $\mathcal{C}(\overline{P}_i)$ respectivement, et des suites exactes : $0 \longrightarrow \mathcal{E}(N_i) \longrightarrow \mathcal{E}(N_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{E}(P_i) \longrightarrow 0$.

En outre, d'après 3.8, on peut supposer que ces complexes sont formellement exacts. Si N_i désigne comme d'habitude le conoyau de la première flèche de $\mathcal{E}(N_i)$ (même chose pour P_i), on a donc pour $i=1,\dots,s$, une suite :

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow P_i \longrightarrow 0$$

exacte à droite et formellement exacte. D'après le lemme 4.5, si tous les $P_i = \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i$ sont des modules de Fréchet, on en déduira que tous les N_i et donc $M = N_{s+1}$, sont des modules de Fréchet ; d'où le résultat, puisque $\hat{M} = \overline{M}$.

Nous devons donc traduire que chaque $\mathfrak{P}_i$ est un idéal fermé de $\mathcal{E}(x)$. Supposons d'abord que ht $\overline{\mathfrak{P}}_i = k$ et posons $\overline{\mathfrak{P}}_i = \overline{\mathfrak{P}}$, afin d'utiliser les notations du lemme 4.6. On peut supposer que $\overline{\lambda}_1$ (première flèche de $\mathcal{C}(\overline{P}_i)$) a pour composantes $\overline{R}_1, \dots, \overline{R}_s$, $\overline{P}_{n-k+1}, \dots, \overline{P}_n$; alors, d'après 1.2, on peut supposer que λ_1 (première flèche de $\mathcal{E}(P_i)$) a pour composantes $R_1, \dots, R_s$, $P_{n-k+1}, \dots, P_n$

où $R_\ell \in \mathcal{E}(x')\,[x'']$ relève $\overline{R}_\ell$; $P_{n-k+1} \in \mathcal{E}(x')\,[x_{n-k+1}]$ est un polynôme distingué qui relève $\overline{P}_{n-k+1}$; pour $j \geq 2$, $P_{n-k+j} = \delta_i . x_{n-k+j} - Q_{n-k+j}$, où δ_i est le discriminant de P_{n-k+1} (donc $\hat{\delta}_i = \overline{\delta}_i$, discriminant de $\overline{P}_{n-k+1}$) et $Q_{n-k+j} \in \mathcal{E}(x')\,[x_{n-k+1}]$ relève $\overline{Q}_{n-k+j}$; enfin, $\delta_i^q . R_\ell$ est combinaison linéaire dans $\mathcal{E}(x')\,[x'']$ des P_{n-k+j} , $1 \leq j \leq k$.

Puisque $\mathfrak{P}_i$ est engendré sur $\mathcal{E}(x)$ par $R_1 , \ldots , R_s$, $P_{n-k+1} , \ldots , P_n$, on voit que $\delta_i^q \in \sigma_k(\mathfrak{P}_i)$; $\delta_i^k \in J_k(\mathfrak{P}_i)$; donc, si $q \geq k$, ce que l'on peut toujours supposer, on voit que $\delta_i^q \in R_k(\mathfrak{P}_i) = \sigma_k(\mathfrak{P}_i) \cap J_k(\mathfrak{P}_i)$. Enfin, en appliquant 1.2 et 3.8 comme plus haut, à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]/\overline{\mathfrak{P}}_i \xrightarrow{\overline{\delta}_i} \mathbb{R}[[x]]/\overline{\mathfrak{P}}_i \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]/\overline{\mathfrak{P}}_i + (\overline{\delta}_i) \longrightarrow 0$$

($\overline{\delta}_i$ désigne la multiplication par $\overline{\delta}_i$) on peut supposer que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i \xrightarrow{\delta_i} \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i \longrightarrow \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i + (\delta_i) \longrightarrow 0$$

est formellement exacte. Les hypothèses du théorème 5.6, chap. V, [3], sont donc vérifiées par $I' = \mathfrak{P}_i + (\delta_i)$ et $I = \mathfrak{P}_i$: *si* $\mathfrak{P}_i + (\delta_i)$ *est un idéal fermé de* $\mathcal{E}(x)$, *il en sera de même de* $\mathfrak{P}_i$.

Posons, pour $i=1,\ldots,s$, $M_i = \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i + (\delta_i)$ si ht $\overline{\mathfrak{P}}_i = k$; $M_i = \mathcal{E}(x)/\mathfrak{P}_i = P_i$ si ht $\overline{\mathfrak{P}}_i > k$; $\overline{M}_i = \hat{M}_i$; on a toujours dim $\overline{M}_i < n-k$. Nous pouvons alors résumer comme suit ce qui précède :

<u>4.7</u>. *On peut associer au module* $\overline{M}$ (dim $\overline{M} \leq n-k$) *des modules* $\overline{M}_i$ *sur* $\mathbb{R}[[x]]$, $1 \leq i \leq s$, *avec* dim $\overline{M}_i \leq n-k-1$; *un système d'équations analytiques* $f(x_1,\ldots,x_{n-k} ; y) = 0$ *et une solution formelle* $\overline{y}(x_1,\ldots,x_{n-k})$ *de ce système ; tels qu'en relevant, d'après le théorème 1.2, cette solution formelle en une solution* C^∞ $y(x_1,\ldots,x_{n-k})$, *nous obtenions (entre autres !) des modules* M *et* M_i *de présentation finie sur* $\mathcal{E}(x)$ *avec* $\hat{M} = \overline{M}$; $\hat{M}_i = \overline{M}_i$; *en outre,* M *est un module de Fréchet si chaque module* M_i , $1 \leq i \leq s$, *est un module de Fréchet.*

Répétant avec $\overline{M}_{i_1}$ ce que l'on a fait avec $\overline{M}$, on peut associer à $\overline{M}_{i_1}$ des modules $\overline{M}_{i_1 i_2}$ sur $\mathbb{R}[[x]]$ (dim $\overline{M}_{i_1 i_2} \leq n-k-2$) et un système d'équations analytiques $f^{i_1}(x_1,\ldots,x_{n-k-1} ; y^{i_1}) = o$ (on adapte à chaque fois le système de coordonnées). Puis, par récurrence sur $\ell \leq n-k$, on définit des $\overline{M}_{i_1\ldots i_\ell}$ (dim $\overline{M}_{i_1\ldots i_\ell} \leq n-k-\ell$) et des systèmes d'équations analytiques $f^{i_1\ldots i_{\ell-1}}(x_1,\ldots, x_{n-k-\ell+1} ; y^{i_1\ldots i_{\ell-1}}) = 0$. En outre, on connait une solution formelle $\overline{y}^{i_1\ldots i_{\ell-1}}(x_1,\ldots, x_{n-k-\ell+1})$ de ce système ; en relevant cette solution formelle en une solution C^∞, $y^{i_1\ldots i_{\ell-1}}(x_1,\ldots, x_{n-k-\ell+1})$, on construit des modules de présentation finie sur $\mathcal{E}(x)$: $M^*_{i_1\ldots i_{\ell-1}}$ et $M_{i_1\ldots i_\ell}$ tels que $\hat{M}^*_{i_1\ldots i_{\ell-1}} = \overline{M}_{i_1\ldots i_{\ell-1}}$ et $\hat{M}_{i_1\ldots i_\ell} = \overline{M}_{i_1\ldots i_\ell}$; enfin, si les $M_{i_1\ldots i_\ell}$ sont des modules de Fréchet, $M^*_{i_1\ldots i_{\ell-1}}$ est un module de Fréchet. Remarquons que les $M_{i_1\ldots i_k}$ sont toujours des modules de Fréchet, car ils sont de présentation finie sur $\mathcal{E}(x)$ et dim $\hat{M}_{i_1\ldots i_k} =$ dim $\overline{M}_{i_1\ldots i_k} \leq o$; ce sont donc des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (cf. [3], chap. V, exemple 3.9). En conséquence, si pour tout $2 \leq \ell \leq n-k$, $M^*_{i_1\ldots i_{\ell-1}} = M_{i_1\ldots i_{\ell-1}}$, on en déduira que les $M_{i_1\ldots i_{\ell-1}}$ et M sont des modules de Fréchet.

On est donc amené à introduire certaines relations entre les variables $y^{i_1\ldots i_{\ell-1}}$ et $y^{i_1\ldots i_{\ell-2}}$, relations vérifiées par nos solutions formelles. Pour trouver des solutions C^∞ qui vérifient ces mêmes relations, on utilise avec quelques petites modifications, la méthode du théorème 1.2, (théorème qui n'est pas directement applicable). Nous donnerons ultérieurement les détails de cette démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN M. : "On the solutions of analytic equations". Invent. Math. 5, p. 277-291 - (1968).

[2] TOUGERON J.C. : "Idéaux de fonctions différentiables, I ". Ann. Inst. Fourier 18, p. 177-240 - (1968).

[3] TOUGERON J.C. : "Idéaux de fonctions différentiables". Ergebnisse Der Mathematik, Band 71 - (1972).

[4] WHITNEY H. : "Local properties of analytic varieties". Notes de Princeton.

[5] HIRONAKA H. : "Analytic equivalence of singularities". Notes de l'Université de Göttingen - (1965).

[6] TOUGERON J.C. : " $\mathcal{G}$-stabilité des germes d'applications différentiables". Séminaire d'Analyse de Rennes (1971).

[7] SERRE J.P. : "Algèbre locale, multiplicités". Lecture notes in Mathematics, 11, (1965).

[8] MERRIEN J. : "Idéaux de l'anneau des séries formelles à coefficients réels et variétés associées". J. Math. pures et Appl., 50, p. 169-187, (1971).

[9] MALGRANGE B. : "Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques". Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), p. 113-127.