PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. GOBLOT

Exemple d'ouvert non agréable d'un spectre d'anneaux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A5_0>

EXEMPLE D'OUVERT NON AGREABLE
D'UN SPECTRE D'ANNEAUX

M. GOBLOT

On utilise librement le langage de [2] .

I - Les données : On donne

- un anneau A commutatif unitaire,

- un ouvert $U = D(\mathcal{L})$ de Spec A, ensemble des idéaux premiers de A ne contenant pas un certain idéal $\mathcal{L}$ de A,

- C la sous-catégorie localisante de mod A des A-modules M tels que $\tilde{M}/U = 0$, donc on a

$$C = \{M | \forall\, p \in U \quad M_p = 0\} = \{M | \forall\, f \in \mathcal{L} \quad M_f = o\},$$

- mod A/C la catégorie quotient de mod A par C, j^* : mod A $\longrightarrow$ mod A/C et j_* : mod A/C $\longrightarrow$ mod A les foncteurs canoniques,

-mod $\tilde{A}/U$ la catégorie des $\tilde{A}/U$-modules quasi-cohérents et k^* le foncteur

$$k^* : M \text{ dans mod } A \longrightarrow \tilde{M}/U \text{ dans mod } \tilde{A}/U.$$

Dans ces conditions, on voit que

$$\ker k^* = \{M | k^*M = \tilde{M}/U = o\} = C$$

donc il existe un foncteur fidèle unique

$$i : \text{mod } A/C \longrightarrow \text{mod } \tilde{A}/U$$

tel que $k^* = i\, j^*$.

Définition : On dira que U est un ouvert agréable (resp. très agréable), si i est pleinement fidèle (resp. est une équivalence) (I).

En vertu d'un théorème de A. Grothendieck ((5) Théorème I.4.I) tout ouvert quasi-compact de Spec A est très agréable.

Le foncteur $j_* j^*$: mod A $\longrightarrow$ mod A est idempotent et, pour tout module M, $j_* j^*$ M est le <u>C-fermé</u> de M.

On note Γ le foncteur

dans mod $\tilde{A}/U$ $\longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F})$ dans mod A.

Alors Γ est <u>adjoint à droite de k^*</u> et prend ses valeurs dans la catégorie des A-modules C-fermés. De même, <u>i a pour adjoint à droite le foncteur j^*</u>Γ.

<u>Pour que U soit agréable</u>, i.e pour que i soit pleinement fidèle, <u>il faut et il suffit que</u> $j^* \Gamma$ i soit l'identité de mod A/C, i.e <u>pour tout A-module</u> M, $j_* j^* M = \Gamma(U,\tilde{M})$.

<u>Pour que U soit très agréable</u>, <u>il faut et il suffit que</u> $ij^*\Gamma$ soit l'identité de mod $\tilde{A}/U$, i.e. <u>que pour tout $\tilde{A}/U$-module $\mathcal{F}$ quasi-cohérent on ait</u> $\Gamma(U,\mathcal{F})^{\sim}/U = \mathcal{F}$.

2 - <u>Autres exemples d'ouverts très agréables</u>.

<u>Catégories modulaires</u>. Soient A un anneau (commutatif) et $\mathcal{L}$ un idéal idempotent. Alors (6) l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathcal{L}$ est topologisant idempotent, la sous-catégorie localisante associée C' étant

$$C' = \text{mod } A/\mathcal{L} = \{M \mid \mathcal{L}M = 0\}.$$

La catégorie quotient mod$(A,\mathcal{L})$ = mod A/C' a des propriétés très proches des catégories de modules. On caractérise les catégories de cette forme par les axiomes AB 4^* et AB 6 (Roos (6)).

<u>Problème</u> : Soient A un anneau commutatif, $\mathcal{L}$ un idéal idempotent,

$$C' = \text{mod } A/\mathcal{L} \quad , \quad U = D(\mathcal{L}).$$

On introduit alors pour U les notations et notions données dans le n° I.

Alors $C' \subset C$ et on a un foncteur canonique $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\tilde{A}/U$.

Pour exprimer que ce foncteur est fidèle, on exprime que $C = C'$ et on obtient pour $\mathcal{L}$ la propriété caractéristique suivante :

Il existe un système générateur $(e_i)_{i \in H}$ de $\mathcal{L}$ tel que, pour toute application $h : H \longrightarrow \mathbb{N}$, $(e_i^{h(i)})_{i \in H}$ soit encore un système générateur de $\mathcal{L}$.

On prouve aussi que tout système générateur de $\mathcal{L}$ possède cette propriété.

Cela étant, peut-on caractériser les idéaux idempotents $\mathcal{L}$ tel que la foncteur

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \tilde{A}/U$$

soit pleinement fidèle (ou soit une équivalence) ?

Théorème. Si $\mathcal{L}$ vérifie la condition (S) suivante :

(S) pour tout idéal de type fini $I \subset \mathcal{L}$, il existe J de type fini $J \subset \mathcal{L}$ tel que $I \subset \bigcap_n J^n$, alors le foncteur

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \tilde{A}/U$$

est une équivalence.

Comme tout idéal $\mathcal{L}$ vérifiant (S) est union filtrante d'idéaux de type dénombrable vérifiant (S), on montre que l'on peut se ramener au cas où $\mathcal{L}$ est de type dénombrable, engendré par $(e_I,\dots,e_n,\dots)$.

Alors (S) signifie qu'il existe une suite croissante d'entiers (p_n) telle que, pour tout n, l'idéal I_n engendré par $(e_I,\dots,e_{p_n})$ soit contenu dans l'intersection des idéaux $I_{n+I,h}$ engendrés par $(e_I^h,\dots,e_{p_{n+I}}^h)$, où h décrit $\mathbb{N}$.

On pose $U_n = D(I_n)$ et on adopte pour U_n les mêmes notations que celles du n° I pour $U \subset \mathrm{Spec}\ A$, mais affectées de l'indice n.

$$C_n = \{M \mid \tilde{M}/U_n = o\}$$

$$C_n = \{M \mid \forall\, x \in M \quad \exists h \quad I_{n,h}\cdot x = o\}$$

Soit $\mathcal{F}$ dans mod $A^{\sim}/U$. D'après le théorème de Grothendieck (U_n très agréable)

$$\mathcal{F}/U_n = (\Gamma(U_n,\mathcal{F}))^{\sim}/U_n$$

i.e., pour tout $m \geq n$, $\Gamma(U_n,\mathcal{F})$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U_m,\mathcal{F})$.

On doit montrer que $\Gamma(U_n,\mathcal{F})$ est aussi le C_n-fermé de $\Gamma(U,\mathcal{F}) = \varprojlim_m \Gamma(U_m,\mathcal{F})$.

Soit g_n l'application canonique

$$g_n : \Gamma(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_n,\mathcal{F})$$

On doit donc prouver que Ker g_n et Coker g_n sont dans C_n.

I) <u>Noyau de</u> g_n. Soit $y = (y_m)_m \in \operatorname{Ker} g_n$, i.e. $y_n = o$. On peut de proche en proche trouver une suite d'entiers h_j telle que

$$e_{i_j}^{h_j} \dots e_{i_o}^{h_o}\ y_{n+I+j} = o$$

pour tout i_α compris entre I et $p_{n+\alpha}$ $(\alpha \geq o)$.
Par (S), e_{i_o} s'exprime en combinaison linéaire des $e_{i_j}^{h_j} \dots e_{i_I}^{h_I}$, donc en en déduit

$$e_{i_o}^{h_{o+I}} \quad y = o$$

et ker g_n est dans C_n.

2) <u>Image de</u> g_n <u>ou conoyau de</u> g_n

Soit $z \in \Gamma(U_n,\mathcal{F})$. On note f_m l'application canonique

$$f_m : \Gamma(U_{m+I},\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_m,\mathcal{F})$$

Il existe une suite d'entiers h_j et, i_j étant compris entre I et p_{n+j}, des $z_{i_o},\dots,i_j \in \Gamma(U_{n+j+I},\mathcal{F})$ tels que

$$\begin{cases} f_{n+j}\ (z_{i_o},\dots,i_j) = e_{i_j}^{h_j}\ z_{i_o}\dots i_{j-I} \\ f_n(z_{i_o}) = e_{i_o}^{h_o}\ z \end{cases}$$

Par (S), on a des scalaires $a_{i_j,i_{j+1}}$ tels que

$$e_{i_j} = \sum_{i_{j+1}} a_{i_j,i_{j+1}} e_{i_{j+1}}^{h_{j+1}+1}$$

On pose alors

$$y_{i_o,n+j+1} = \sum a_{i_o,i_1} \cdots a_{i_j,i_{j+1}} e_{i_{j+1}}^{h_{j+1}+1} z_{i_o,\dots,i_j}$$

On voit alors que

$$y_{i_o} = (y_{i_o,m})_m \in \varprojlim_m \Gamma(U_m,\mathcal{F}) = \Gamma(U,\mathcal{F})$$

et que l'on a

$$g_n(y_{i_o}) = e_{i_o}^{h_o+1} z$$

donc Coker $g_n = \Gamma(U_n,\mathcal{F})/I_m g_m$ est dans C_n.

Exemples :

1) Tout idéal pur $\mathcal{L}$ de A (i.e. $A/\mathcal{L}$ est plat) vérifie la condition (S). On a dans ce cas une situation encore plus agréable, car le prolongement par zéro en dehors de U à Spec A tout entier a une interprétation simple (3), (1), (4).

2) Si A est un anneau dont l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion (par exemple un anneau de valuation), alors tout ouvert de Spec A est soit affine, soit associé à un idéal idempotent de A vérifiant (S).

3) Soient X un espace topologique compact et $A = C(X,\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions numériques continues. L'idéal des fonctions nulles en $x \in X$ est maximal idempotent vérifiant (S).

3 - Exemple d'ouvert non agréable - Réciproque au théorème précédent

On considère un idéal (non nécessairement idempotent) $\mathcal{L}$ de type dénombrable, engendré par

$$e_I, \ldots, e_n, \ldots \text{ et } U = D(\mathcal{L}).$$

On note I_n l'idéal engendré par $e_I, \ldots, e_n$ et $I_{n,h}$ l'idéal engendré par $e_I^h, \ldots, e_n^h$ et $U_n = D(I_n)$. On emploie pour U (resp. U_n) les mêmes notations qu'au n° I (resp. affectées de l'indice n).

On suppose que U est agréable, i.e. que pour tout A-module M,

$$j_* j^* M = \Gamma(U, M^\sim)$$

On note U_n le morphisme

$$U_n : M \longrightarrow \Gamma(U_n, M^\sim) = j_{n*} j_n^* M$$

et $N_n = \ker U_n$.

Fixons n. Pour tout p, on choisit $x_{n+p} \in N_{n+p}$.

Alors $U_{n+p}(x_n + \ldots + x_{n+p}) \in \Gamma(U_{n+p}, M^\sim)$ et

$$(U_{n+p}(x_n + \ldots + x_{n+p}))_p \in \varprojlim_p \Gamma(U_{n+p}, M^\sim) = \Gamma(U, M^\sim).$$

Cet élément est même dans le noyau de l'application canonique

$$\Gamma(U, M^\sim) \longrightarrow \Gamma(U_n, M^\sim).$$

Comme U est agréable, $\Gamma(U_n, M^\sim)$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U, M^\sim)$ et ce noyau est dans C_n. Donc, il existe un entier h_n tel que, pour tout i entre I et n, pour tout p

$$e_i^{h_n} \; U_{n+p}(x_n + \ldots + x_{n+p}) = o$$

$$e_i^{h_n}(x_n + \ldots + x_{n+p}) \in N_{n+p}$$

Comme N_{n+p} est dans C_{n+p}, on a le résultat : pour tout n, il existe h_n tel que pour tout p, il existe $k_{n,p}$ tel que pour tout i entre I et n, tout j entre I et n+p, on ait

$$e_i^{h_n} \; e_j^{k_{n,p}} (x_n + \ldots + x_{n+p}) = o.$$

On choisit alors une suite d'entiers g_m. L'idéal I_{m,g_m} est engendré par $e_I^{g_m},\ldots,e_m^{g_m}$.

On pose $M = \coprod_m A/I_{m,g_m}$. On sait alors que $A/I_{m,g_m}$ est dans C_m. Pour tout m, on note x_m l'image de I par l'application :

$$A \twoheadrightarrow A/I_{m,g_m} \hookrightarrow M = \coprod_\alpha A/I_{\alpha,g_\alpha}$$

Si on applique le résultat précédent, on obtient ce qui suit :

<u>Pour toute suite d'entiers</u> (g_m), <u>il existe une suite d'entiers</u> (h_n) <u>et une double suite</u> $(k_{n,p})$ <u>telles que, pour tout i entre I et n et tout j entre I et n+p, on ait</u> :

$$e_j^{k_{n,p}}\ e_i^{h_n} \in \bigcap_{o\leqslant q\leqslant p} I_{n+q,g_{n+q}}.$$

<u>Exemple</u> : On prend $A = K[X_I,\ldots,X_n,\ldots]$ et $\mathcal{L}$ l'idéal engendré par $X_I,\ldots,X_n,\ldots$. Alors $U = D(\mathcal{L})$ n'est pas agréable (K anneau quelconque).

Soit (g_m) une suite d'entiers, si U était agréable, on aurait des suites h_n et $k_{n,p}$ telles que, n étant fixé, pour tout p et tout $q \leqslant p$, on ait des relations de la forme

$$X_{n+p}^{k_{n,p}}\ X_n^{h_n} = A_{n,q}\ X_n^{g_{n+q}}$$

une telle relation implique $g_{n+q} \leqslant h_n$. Si on choisit la suite (g_m) de limite infinie, on arrive à une impossibilité.

On suppose maintenant (cf. n° 2) que $\mathcal{L}$ est idempotent et que le foncteur

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \tilde{A}/U$$

est <u>pleinement fidèle</u>. Pour cela, il faut que, pour toute suite d'entiers U_n, les $e_n^{u_n}$ engendrent l'idéal $\mathcal{L}$.

D'après ce qui précède, il faut aussi que : pour toute suite d'entiers (g_m), il existe des suite (h_n) et $(k_{n,p})$ telles que, pour tout p et tout j entre I et n+p

$$I_{n,h_n} \, e_j^{k_{n,p}} \subset \bigcap_{0 \leq q \leq p} I_{n+q,g_{n+q}}$$

On fixe n et q. Alors pour $p \geqslant q$, les $e_j^{k_{n,p}}$ forment un système générateur de $\mathcal{L}$, donc

$$I_{n,h_n+I} \subset \mathcal{L} \, I_{n,h_n} \subset I_{n+q,g_{n+q}}$$

Si on change h_n^{+I} en h_n, on obtient le résultat suivant :

pour toute suite d'entiers (g_m), il existe une suite d'entiers h_n telle que

$$I_{n,h_n} \subset \bigcap_{q \geqslant 0} I_{n+q,g_{n+q}}$$

Si la condition (S) n'est pas satisfaite, on peut trouver $f \in \mathcal{L}$ et une suite (g_m) telle que, pour tout m, $f \notin I_{m,g_m}$.

Mais les $e_n^{h_n}$ engendrent $\mathcal{L}$. On a donc

$$f = \sum_{I}^{r} a_n \, e_n^{h_n}$$

On aurait alors $f \in I_{m,g_m}$ pour $m \geqslant r$, ce qui donne une contradiction.

D'où une réciproque à la condition (S) quand $\mathcal{L}$ est de type dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BKOUCHE Parties agréables d'un spectre d'anneau, géométrie pure et molesse, à paraître.

[2] P. GABRIEL Des catégories abéliennes - Thèse - Bull. Soc. Math. Fr., 90, fasc. 3, p. 323-448.

[3] J. GIRAUD et J.L. VERDIER Séminaire M. Artin - A. Grothendieck I.H.E.S., 1963-64.

[4] R. GOBLOT Sur deux classes de catégories de Grothendieck - Thèse.

[5] A. GROTHENDIECK Eléments de géométrie algébrique Chapitre I I.H.E.S. 1960.

[6] J.E. ROOS Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par des sous-catégories bilocalisantes, C.R. Acad. Sc., t. 261, 1965, p. 4954.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° 5

GOBLOT
Rés. du Buisson
3G, rue du Buisson
59 - LILLE