R. RIVET

Fonctions pseudo-concaves et anneaux henséliens

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 2, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A2_0>

FONCTIONS PSEUDO-CONCAVES ET ANNEAUX HENSELIENS

R. RIVET

§ I - Fonctions pseudo-concaves

On désignera pas $\mathbb{Z}_\infty$ le monoïde commutatif totalement ordonné habituel : $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. [2]

Définition I.I : Une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_\infty$ est pseudo-concave, si elle vérifie, quels que soient les entiers p et q :

$$\varphi(p) + \varphi(q) \geq \varphi(p+q) + \varphi(o).$$

Remarquons que si φ est pseudo-concave et si $\varphi(o) = +\infty$ alors φ est la fonction infinie.

D'autre part, si $\varphi(k) = +\infty$ alors pour tout n vérifiant $o < n \leq k$, $\varphi(n) = +\infty$.

Exemples de fonctions pseudo-concaves.

La fonction ω_k définie par

$$\omega_k(n) = \begin{cases} +\infty & o < n \leq k \\ o & \text{sinon} \end{cases}$$

est pseudo-concave.

La fonction ω_∞ définie par

$$\omega_\infty(n) = +\infty \qquad n > o$$

$$\omega_\infty(o) = o$$

est pseudo-concave.

La fonction infinie est pseudo-concave.

Définition I.2 : Une fonction Θ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_\infty$ est concave, si elle vérifie, quel que soit $n > o$

$$2\Theta(n+I) \geqslant \Theta(n) + \Theta(n+2).$$

On peut remarquer que si $\Theta(k) = +\infty$, alors Θ est la fonction infinie

Proposition I.3 : Une fonction concave est pseudo-concave.

Puisque ϕ est concave, on peut supposer que ϕ est finie. Alors on peut écrire :

$$\phi(k+I) - \phi(k) \leqslant \phi(k) - \phi(k-I) \qquad k \geq I$$

d'où, en supposant $I \leq p \leq q$:

$$\sum_{k=p}^{q} [\phi(k+i) - \phi(k)] \leq \sum_{k=p}^{q} [\phi(k) - \phi(k-I)]$$

soit

$$\phi(q+I) - \phi(p) \leq \phi(q) - \phi(p-I)$$

ou

$$\phi(q+I) - \phi(q) \leq \phi(p) - \phi(p-I)$$

En particulier, pour tout $0 \leq i \leq p-I$

$$\phi(q+i+I) - \phi(q+i) \leq \phi(p-i) - \phi(p-i-I) \quad \text{car} \quad p-i \leq q+i$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{p-I} [\phi(q+i+I) - \phi(q+i)] \leq \sum_{i=o}^{p-I} [\phi(p-i) - \phi(p-i-I)]$$

soit

$$\phi(p+q) - \phi(q) \leq \phi(p) - \phi(0)$$

c.q.f.d.

Remarque I.4 : Les exemples précédents montrent qu'il existe des fonctions pseudo-concaves qui ne sont pas concaves. Ceci justifie la dénomination pseudo-concave.

Exemple : La fonction définie par :

$$\begin{cases} \phi(n) = 0 & n \text{ pair} \\ \phi(n) = I & n \text{ impair} \end{cases}$$

est pseudo-concave, mais n'est pas concave, et ne prend aucune valeur infinie.

Quelques inégalités et propriétés :

Proposition I.5 : Si ϕ est pseudo-concave, on a : pour $p \geq I$

$$\phi(n_I) + \ldots + \phi(n_p) \geq \phi(n_I + \ldots + n_p) + (p-I)\ \phi(0).$$

La propriété se montre facilement par récurrence.

Corollaire I.6 : Pour tous entiers positifs p et k, on a :

$$p\phi(k) \geq \phi(pk) + (p-I)\ \phi(0).$$

Proposition I.7 : Si $\phi_I, \ldots, \phi_p$ sont des fonctions pseudo-concaves et si $c_I, \ldots, c_p$ sont des entiers positifs, alors

$$\phi = \sum_{i=I}^{n} c_i \ \phi_i$$

est pseudo-concave.

Cela résulte aussitôt de la définition en multipliant les deux membres de l'inégalité relative à ϕ_i par c_i, et en ajoutent membre à membre.

Corollaire I.8 : Si ϕ est pseudo-concave non infinie, alors ϕ est majorée par une fonction affine pour $n \geq n_o$.

Soit n_o tel que pour $n \geq n_o$, on ait $\phi(n) < +\infty$

pour $n \geq n_o$, on a : $n = kn_o + h \qquad 0 \leq h < n_o \qquad k \geq I$

$$\phi(0) + \phi(n) \leqslant \phi(kn_o) + \phi(h)$$

$$\leqslant k\,\phi(n_o) - (k-I)\,\phi(0) + \phi(h)$$

$$\phi(n) \leqslant k\ \phi(n_o) - \phi(0) + \phi(h)$$

Si $\phi(n_o) < \phi(0)$, alors est majorée

Si $\phi(n_o) > \phi(0)$, alors $k \leq n$ et $\phi(h)$ majoré par a.

Soit pour tout n $\phi(n) \leqslant n\,[\phi(n_o) - \phi(0)] + a$.

Dans la suite, les fonctions pseudo-concaves qui nous intéressent seront celles qui prennent des valeurs négatives. Pour des propriétés générales des fonctions pseudo-concaves, on pourra consulter [5].

Puisque la fonction constante est concave, on pourra supposer que $\Psi(o) = o$.

§ 2 - Relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}_\infty^N$:

Dans ce paragraphe, ℓ désignera une fonction affine de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$: $n \longmapsto \lambda n + \mu$, λ et μ appartenant à $\mathbb{Z}$.

Soient ϕ et ψ deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_\infty$, alors la relation : il existe ℓ et ℓ' telles que

$$\psi + \ell \leq \phi \leq \psi + \ell'$$

est une relation d'équivalence. On notera $\overline{\phi}$ la classe de ϕ suivant cette relation d'équivalence notée (R).

<u>Proposition 2.I</u> : <u>L'ensemble quotient</u> $\mathbb{Z}_\infty^N/(R)$ <u>est un monoïde commutatif ordonné</u>.

Il est clair que $\overline{\phi + \psi}$ est indépendante des représentants de $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$, d'où $\overline{\phi + \psi} = \overline{\phi} + \overline{\psi}$. D'autre part, si 0 désigne la fonction nulle $\overline{\phi} + \overline{0} = \overline{\phi}$

la commutativité et l'associativité sont évidentes. De la même manière, on vérifie que la relation d'ordre passe au quotient.

Désignons par $P \subset \mathbb{Z}_{\infty}^{N}$ l'ensemble des fonctions pseudo-concaves. La restriction de la relation d'équivalence précédente à P sera notée (R) par abus de la langue.

Proposition 2.2 : L'ensemble P/(R) est un monoïde commutatif ordonné.

Ceci résulte de la proposition I, et du fait que P est stable pour l'addition et que $0 \in P$.

Proposition 2.3 : Soit une fonction pseudo-concave, alors

i) si $\theta(n) < +\infty$ pour tout n $\quad \overline{\theta} \geq \overline{0}$

ii) si $\theta(n) = +\infty \quad I \leq n \leq k \quad \overline{\theta} \geq \overline{\omega}_k$ (cf I$^{\text{ère}}$ partie)

Cela résulte du fait qu'une fonction pseudo-concave est majorée par une fonction affine.

§ 3 - Sous-anneaux de Cf(A)[[X]] associés à une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_{\infty}$.

Lemme 3.I : Soit θ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_{\infty}$. Les séries formelles S de Cf(A)[[X]] vérifiant $\phi_S \geq \theta$ forment un groupe.

Cela résulte de $\phi_{S-T} \geq \inf(\phi_S, \phi_T)$ et de $\phi_{-T} = \phi_T \geq \theta$

Proposition 3.2 : Si θ est une fonction pseudo-concave, vérifiant $\theta(0) \leq 0$, alors l'ensemble des séries formelles S vérifiant $\phi_S \geq \theta$ est un sous-anneau unitaire de Cf(A)[[X]].

Soient $S = \sum_{n \geq 0} s_n X^n$, $T = \sum_{n \geq 0} t_n X^n$ deux séries formelles vérifiant $\phi_S \geq \Theta$, $\phi_T \geq \Theta$ et soit $V = ST = \sum_{n \geq 0} v_n X^n$. On a :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} t_k \, s_{n-k}$$

il existe i tel que $v(v_n) \geq v(t_i \, s_{n-i}) = v(t_i) + v(s_{n-i}) \geq \Theta(i) + \Theta(n-i)$

$$v(v_n) \geq \Theta(n) + \Theta(0) \geq \Theta(n)$$

d'où $\phi_{ST} \geq \Theta$

Si D désigne la série formelle unité

$$\phi_D(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ +\infty & n \geq I \end{cases}$$

alors $\phi_D \geq \Theta$, d'où le résultat.

§ 4 - Sous-anneaux locaux henséliens dominés par Cf(A)[[X]].

Dans ce paragraphe, A désignera un anneau de valuation discrète. Cf(A) désignant son corps des fractions et v sa valuation.

A toute série formelle $S \in Cf(A)[[X]]$ $S = \sum_{n \geq o} u_n X^n$, on associe la fonction φ_S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_\infty$ définie par :

$$\varphi_S(n) = v(u_n).$$

<u>Lemme 4.I</u> : <u>Soient S une série formelle inversible de</u> Cf(A)[[X]] <u>et θ une fonction pseudo-concave. Si</u> $\phi_S \geq \Theta$ <u>alors</u> :

$\phi_{S-I}(n) \geq \Theta(n) - k\phi_S(0) + n\,[\Theta(0) - \phi_S(0)]$ <u>avec</u> $k = I$ <u>si</u> $\phi_S(0) < 0$ <u>et</u> $k = 0$ <u>pour</u> $\phi_S(0) \geq 0$.

Soit $S = u_o + u_I X + \ldots + u_n X^n + \ldots$

$$S^{-I} = v_o + v_I X + \ldots + v_n X^n + \ldots$$

$$u_o\ v_o = I \quad \text{d'où} \quad \phi_{S^{-I}}(0) = -\ \phi_S(0)$$

et $u_o\ v_n = u_I\ v_{n-I} + \ldots + u_n\ v_o$

d'où il existe i $0 \leq i \leq n-I$

$$\phi_{S^{-I}}(n) + \phi_S(0) \geq \phi_S(n-i) + \phi_{S^{-I}}(i)$$

Supposons $\phi_S(0) < 0$.

Montrons par récurrence que

$$\phi_{S^{-I}}(n) \geq \Theta(n) - \phi_S(0) + n\ [\Theta(0) - \phi_S(0)]$$

Puisque

$$\phi_{S^{-I}}(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Theta(0) - \phi_S(0) \leq 0$$

la propriété est vraie pour n = 0.

Supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre n - I

$$\phi_{S^{-I}}(n) + \phi_S(0) \geq \Theta(n-i) + \Theta(i) - \phi_S(0) + i\ [\Theta(0) - \phi_S(0)]$$

$$\phi_{S^{-I}}(n) \geq \Theta(n) - \phi_S(0) + [\Theta(0) - \phi_S(0)] \quad (i+I)$$

d'où $$\phi_{S^{-I}}(n) \geq \Theta(n) - \phi_S(0) + n\ [\Theta(0) - \phi_S(0)]$$

Puisque le crochet est négatif.

Si $\phi_S(0) \geq 0$, on a :

$$S = u_o T \quad \text{avec} \quad \phi_T(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_T = \phi_S - \phi_S(0)$$

$$\phi_T \geq \Theta - \phi_S(0) = \Theta_I,\ \Theta_I \text{ est pseudo-concave.}$$

Appliquons le résultat précédent à ϕ_T

$$\phi_{T^{-I}} \geq \Theta - \phi_S(0) + n\ [\Theta(0) - \phi_S(0)]$$

or $$\phi_{S^{-I}} = \phi_{T^{-I}} - \phi_S(0)$$

d'où $\phi_{S^{-I}}(n) \geq \theta(n) - 2\,\phi_S(0) + n\,[\theta(0) - \phi_S(0)]$.

Définition 4.2 : Soit Θ une fonction pseudo-concave. On notera $H_{\overline{\Theta}}$ le sous-ensemble de $Cf(A)[[X]]$ formé des séries formelles S vérifiant $\overline{\phi_S} \geq \overline{\Theta}$.

Théorème 4.3 : Pour toute fonction pseudo-concave Θ, $H_{\overline{\Theta}}$ vérifie les conditions suivantes :

I) $H_{\overline{\Theta}}$ est un anneau local dominé par $Cf(A)[[X]]$

2) Si $\overline{\phi} \leq \overline{\psi}$ alors $H_{\overline{\phi}}$ domine $H_{\overline{\psi}}$

3) $H_{\overline{\Theta}}$ est hensélien

4) $H_{\overline{\Theta}}$ est séparé.

Le fait que $H_{\overline{\Theta}}$ est un anneau unitaire résulte du paragraphe précédent et que si $S \neq 0$, alors $\phi_I \geq \phi_S$. On note I la série formelle unitée.

D'après le lemme précédent, si $\phi_S(0) \neq 0$, alors S est inversible dans $H_{\overline{\Theta}}$, car si $\phi_S \geq 0$, alors $\phi_{S^{-I}} \geq \Theta + \ell$ soit $\overline{\phi_S} \geq \overline{\Theta}$ implique $\overline{\phi}_{S^{-I}} \geq 0$, ce qui montre le I).

Si $\overline{\phi} \leq \overline{\psi}$ alors $H_{\overline{\psi}} \subset H_{\overline{\phi}}$. Désignons par $\underline{m}(\overline{\Theta})$ l'idéal maximal de $H_{\overline{\Theta}}$. Remarquons que $\underline{m}(\overline{\psi}) \subset \underline{m}(\overline{\phi})$, ce qui montre 2) [2] (Chapitre 6, § I, proposition I).

Remarquons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underline{m}(\overline{\phi})^n = 0$ d'où le 4), mais l'idéal $\underline{m}(\overline{\phi})$ n'est pas principal en général. Pour cela, prenons $\phi(n) = -n^3$ et la série formelle

$$S = \sum_{n=I}^{\infty} \pi^{-n^3} X^n, \quad S \in \underline{m}(\overline{-n^3}),$$

on peut écrire $S = XT$ avec $T = \sum_{n \geq 0} \pi^{-(n+I)^3} X^n$

$$\phi_T(n) = -n^3 - 3n^2 - 3n - I \quad \text{et} \quad \overline{\phi}_T < \overline{\phi}_S$$

Pour montrer 3), considérons un polynôme unitaire f de $H_{\overline{\Theta}}[Y]$

$$f(Y) = Y^p + S_I(D)\, Y^{p-I} + \ldots + S_i(X)\, Y^{p-i} + \ldots + S_p(Y)$$

Nous pourrons supposer $\Theta(0) \leq 0$ et $S_i(X) = \sum_{k\geq 0} a_{ik} X^k \quad \phi_{S_i} \geq \Theta$ sans rien changer à la généralité.

Supposons que $\overline{f}(Y) = Y^p + S_I(0)\, Y^{p-I} + \ldots + S_i(0)\, Y^{p-i} + \ldots + S_p(0)$ admette une racine simple u_o. Alors d'après le lemme de Hensel [6], il existe une série formelle

$$Y(X) = u_o + u_I X + \ldots + u_n X^n + \ldots$$

appartenant à $Cf(A)[[X]]$ telle que $f(Y(X)) = 0$

Montrons que $Y(X) \in H_{\overline{\Theta}}$, on en déduira alors 3) [4].

Nous suivrons les calculs classiques de la démonstration du lemme de Hensel.

Posons $Y_n = u_o + \ldots + u_n X^n$

On a donc $Y_{n+I} = Y_n + u_{n+I} X^{n+I}$

$f(Y_{n+I}) = f(Y_n) + u_{n+I} X^{n+I} f'(Y_n) + \ldots$ d'après la formule de Mac-Laurin.

Soit : $f(Y_{n+I}) \equiv f(Y_n) + u_{n+I} X^{n+I} f'(Y_n) \mod (X^{n+2})$

or $X^{n+I} f'(Y_n) \equiv X^{n+I} \overline{f}'(u_o) \mod (X^{n+2})$

et $f(Y_{n+I}) \equiv 0 \mod (X^{n+2})$

finalement $f(Y_n) \equiv - u_{n+I} X^{n+I} \overline{f}'(u_o) \mod (X^{n+2})$

d'où $f(Y_n) = X^{n+I} (\alpha_n + \alpha_{n+I} X + \ldots)$

avec IV-4-3 $\alpha_n = - u_{n+I} \overline{f}'(u_o)$

Remarquons que $\overline{f}'(u_o) \neq 0$ car u_o est racine simple de f.

<u>Lemme 4.4</u> : <u>On a</u> $v(f'(u_o)) \geq (p-I) \quad (0)$.

En effet $\overline{f}'(u_o) = p\, u_o^{p-I} + (p-I)\, S_I(0)\, u_o^{p-2} + \ldots + S_I(0)$

et $v[(p-i)\, S_i(0)\, u_o^{p-i-I}] = v(S_i(0) + (p-i-I)\, v(u_o)$ avec $I \leq i \leq p-I$

$$\geq \theta(0) + (p-i-I)\, \theta(0)$$

Puisque $\theta(0) \leq 0$

$v(\overline{f}'(u_o)) \geq (p-I)\, \theta(0)$ d'où le résultat

Dans la suite, nous poserons $\ell = v(\overline{f}'(u_o))$.

<u>Lemme 4.5</u> : <u>La valuation du terme constant</u> u_o <u>vérifie</u> :

$$v(u_o) \geq \theta(0).$$

Posons $\theta(0) = -k$, $k \geq 0$.

En multipliant par π^{pk}, on en déduit (π uniformisante locale).

$$\pi^{pk}\, u_o^p + \pi^{pk}\, [S_I(0)\, u_o^{p-I} + \ldots + S_p(0)] = 0$$

$$(\pi^k\, u_o)^p + \pi^k\, S_I(0)\, (\pi^k\, u_o)^{p-I} + \ldots + \pi^{ki}\, S_i(0) (\pi^k\, u_o)^{p-i} + \ldots + \pi^{pk}\, S_p(0) = 0$$

or $v[\pi^{ki}\, S_i(0)] \geq ki + v(S_i(0))$ $\quad I \leq i \leq p$

$$\geq ki - k = k(i-I) \geq 0$$

Puisque A est intégralement clos et que $\pi^k\, u_o \in Cf(A)$ alors $\pi^k\, u_o \in A$

d'où $v(u_o) + k \geq 0$

c'est-à-dire $v(u_o) \geq -k = \theta(0)$ d'où le résultat.

<u>Proposition 4.6</u> : <u>Le coefficient</u> u_n <u>de</u> X^n <u>dans Y(X) satisfait à</u> :

$$v(u_n) \geq \theta(n) + (2n-I)\, [(p-I)\, \theta(0) - \ell] \quad \underline{\text{pour}} \quad n \geq I.$$

Remarquons que cette intégalité n'est pas vraie pour $n = 0$.

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n.

Cas n = I : D'après IV-4-3, il faut calculer α_o, c'est-à-dire le coefficient de X dans

$$u_o^p + S_I(X)\, u_o^{p-I} + \ldots + S_i(X)\, u_o^{p-i} + \ldots + S_p(X)$$

c'est-à-dire

$$\alpha_o = a_{II}\, u_o^{p-I} + a_{2I}\, u_o^{p-2} + \ldots + a_{p_I}$$

Il existe i tel que $v(\alpha_o) \geq v(a_{iI}\, u_o^{p-i})$

$$\geq \Theta(I) + (p-I)\, \Theta(0)$$

finalement $\quad v(u_I) \geq \Theta(I) + (p-I)\, \Theta(0) - \ell$

Calcul de α_n : Rappelons que α_n est le coefficient de X^{n+I} dans $f(Y_n)$

$$f(Y_n) = (u_o + u_I X + \ldots + u_n X^n)^p + \ldots + S_i(X)\, (u_o + u_I X + \ldots + u_n X^n)^{p-i} + \ldots + S_p(X)$$

Nous emploierons la notation des muti-indices en posant

$$|i| = i_I + \ldots + i_p.$$

Lemme 4.7 : La valuation du coefficient de X^{n+I} dans $(u_o + u_I X + \ldots + u_n X^n)^p$ est minorée par $\Theta(n+I) + (2n+I)\, [(p-I)\Theta(0) - \ell]$.

En effet, le coefficient de X^{n+I} est égal à :

$$\sum_{|i|=n+I} u_{i_I} \ldots u_{i_p} \qquad 0 \leq i_j \leq n.$$

D'après la remarque suivant la proposition IV-4-6, nous devons isoler u_o ; chaque terme de la somme s'écrit alors $u_o^k\, u_{i_I} \ldots u_{i_{p-k}}$.

On en déduit, en posant $r = (p-I)\, \Theta(0) - \ell\, (r \leq 0)$ et en remarquant que $0 \leq k \leq n-2$:

$$v(u_o^k\, u_{i_I} \ldots u_{i_{p-k}}) \geq k\, \Theta(0) + \sum_{j=I}^{p-k} [\Theta(i_j) + (2i_j - I) r]$$

$$\geq k\,\theta(0) + \sum_{j=I}^{p-I} \theta(i_j) + (2n+2(p-k))\, r$$

Puisque θ est pseudo-concave, et d'après le paragraphe I

$$\geq k\,\theta(0) + \theta(n+I) + (p-k-I)\,\theta(0) + [2n+2-(p-k)]\, r$$

$$\geq \theta(n+I) + (p-I)\,\theta(0) + [2n+I+(k+I-p)]\, r$$

soit

$$v(u_o^k\, u_{i_I} \ldots u_{i_{p-k}}) - \ell \geq \theta\,(n+I) + (2n+I\, r + (k+2-p)\, r$$

Or $r \leq 0$ et $k+2-p \leq 0$.

Donc le second membre est supérieur à $\theta(n+I) + (2n+I)\, r$.

D'où le résultat (d'après les propriétés élémentaires des valuations).

Lemme 4.8 : La valuation du coefficient de X^{n+I} dans

$$S_k(X)\,(u_o + u_I\, X + \ldots + u_n\, X^n)^{p-k}$$

est minorée par

$$\theta(n+I) + (2n+I)\,[(p-I)\,\theta(0) - \ell]\ .$$

En effet, le coefficient de X^{n+I} s'écrit

$$\sum_{|i| = n+I} a_{ki_I}\, u_{i_2} \ldots u_{i_{p-k}}\,.$$

Comme précédemment, on met u_o en évidence et chaque terme s'écrit

$$a_{ki_I}\, u_{i_2} \ldots u_{i_{p-k-n-I}}\, u_o^m$$

avec $i_I + i_2 + \ldots + i_{p-k-m-I} = n + I$

$$0 \leq i_I \leq n+I$$

$$I \leq i_j \leq n \quad \text{pour} \quad j \geq 2$$

On en déduit :

si $i_I = 0$ alors $p-k-m-I \geq 3$

si $i_I \geq I$ alors $p-k-m-I \geq 2$

Posons $\lambda = a_{ki_I}\, u_{i_2} \ldots u_{i_{p-k-m-I}}\, u_o^m$

d'où $v(\lambda) = v(a_{ki_I}) + v(u_{i_2}) + \ldots + v(u_{i_{p-k-m-I}}) + m\, v(u_o)$

et cet entier est supérieur à :

$\Theta(i_I) + \Theta(i_2) + (2i_2 - I)r + \ldots + \Theta(i_{p-k-m-I}) + (2i_{p-k-m-I} - I)r + m\Theta(0)$

et puisque Θ est pseudo-concave, ce dernier est plus grand que :

$$\geq \Theta(n+I) + (p-k-m-2)\,\Theta(0) + m\,(0) + 2(n-i_I+I)r - (p-k-m-2)r$$

$$\geq \Theta(n+I) + (p-I)\,\Theta(0) - (k+I)\,\Theta(0) + (2n+I)r - (p-k-m-3+2i_I)r$$

Puisque $\Theta(0) \leq 0$

$$v(\lambda) \geq \Theta(n+I) + (2n+I)\,r + (p-I)\,\Theta(0) - (p-k-m-3+2i_I)r$$

finalement

$$v(\lambda) - \ell \geq \Theta(n+I) + (2n+I)r - (p-k-m-3+2i_I-I)r$$

Or, le coefficient de r est positif d'après les inégalités vérifiées par les indices (cf ci-dessus).

Finalement, d'après les lemmes précédents et IV-4-3

$$v(u_{n+I}) \geq \Theta(n+I) + (2n+I)r$$

Soit $\overline{\phi}_Y \geq \overline{\Theta}$ d'où le résultat.

Remarque 4.9 : Le fait que le polynôme est séparable est essentiel. Par exemple, en caractéristique 2 le polynôme en Y

$$Y^2 + I + X^2 \quad \text{n'est pas séparable.}$$

Les coefficients $S_I(X)$ et $S_2(X)$ vérifient $\phi_{S_i} \geq \Theta$

$$\text{avec } \Theta(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ +\infty & n = I \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{qui est pseudo-concave}$$

La solution est ici $Y = I + X$

$$\phi_Y(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0 & n = I \\ +\infty & n \geq 2 \end{cases}$$

Il n'existe pas de fonction linéaire ℓ vérifiant

$$\phi_Y \geq \Theta + \ell$$

ce qui impliquerait $\phi_Y(I) = +\infty$.

Cet anneau n'est pas algébriquement fermé dans $Cf(A)[[X]]$.

<u>Remarque 4.I0</u> : En particulier, les séries formelles dont la fonction associée est minorée par une fonction linéaire forment un anneau hensélien (il suffit de prendre $\Theta = 0$).

<u>Remarque 4.II</u> : Considérons la fonction pseudo-concave Θ définie par

$$\Theta(n) = +\infty \qquad I \leq n \leq k$$

$$\Theta(n) = 0 \qquad \text{sinon}$$

Alors $H_{\overline{\Theta}}$ est formé des séries formelles minorées par une fonction linéaire, dont les coefficients u_n sont nuls pour $I \leq n \leq k$. Cet anneau est hensélien.

<u>Remarque 4.I2</u> : On a vu précédemment que si $S \in A[[X]]_{(X)}$, alors ϕ_S est minorée par une fonction linéaire, d'où $A[[X]]_{(X)} \subset H_{\overline{0}}$, et en particulier l'henselisé $(A[[X]]_{(X)})^h$ de $A[[X]]_{(X)}$ est inclus dans $H_{\overline{0}}$ $(A[[X]]_{(X)})^h \subset H_{\overline{0}}$.

<u>Définition 4.I3</u> : <u>On dit qu'une fonction pseudo-concave ϕ est stable par translations, si la fonction ψ définie par</u> $\psi(n) = \phi(n+I)$ <u>vérifie</u>

$$\overline{\psi} \geq \overline{\phi}$$

On montre facilement par récurrence que $\psi_k(n) = \phi(n+k)$ vérifie

$$\overline{\psi}_k \geq \overline{\phi}$$

Remarque 4.I4 : Il est clair que seules les fonctions pseudo-concaves finies peuvent être stables par translations.

Exemples : La fonction nulle (donc les affines)

Les fonctions $n \longmapsto -an^2$ (a entier, $a < 0$) sont des fonction pseudo-concaves stables par translations.

Proposition 4.I5 : Soit Θ une fonction pseudo-concave stable par translations, alors $H_{\overline{\Theta}}$ vérifie les conditions suivantes :

I) $H_{\overline{\Theta}}$ est un anneau de valuation discrète. C'est l'anneau de la valuation induite sur son corps des fractions par la valuation (X)-adique.

2) Son complété est égal à $Cf(A)[[X]]$.

Nous avons vu que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (m(\overline{\Theta}))^n = \{0\}$; il reste à montrer que l'idéal maximal est principal.

Soit $S = \sum_{n=I}^{\infty} u_n X^n \in \underline{m}(\overline{\Theta})$, alors $S = XT$

avec $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n X^n$ et $r_n = u_{n+I}$

$\phi_T(n) = \phi_S(n+I)$ d'où le résultat

donc $H_{\overline{\Theta}}$ est un anneau de valuation discrète [2]. La valuation d'une série formelle étant son ordre. Pour montrer le 2), remarquons que

$$Cf(A)[X]_{(X)} = A[X]_{(X)} \subset H_{\overline{\Theta}} \subset Cf(A)[[X]].$$

Puisque la fonction valuation d'une série formelle de $A[[X]]_{(X)}$ est minorée par une fonction affine et que $\overline{\Theta} \leq \overline{O}$ car $\Theta(n) < +\infty$.

De plus, soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de $A[X]_{(X)}$ qui est égal à (X), il est clair que $\underline{m}(\overline{\Theta}) = \underline{m}\, H_{\overline{\Theta}}$ d'où le résultat ([I] § 3 n° 5, proposition II) puisque H est local noethérien et que le complété de $A[X]_{(X)}$ est $Cf(A)[[X]]$.

Soit $\Phi = (\overline{\phi}_i)_{i \in I}$ un ensemble de classes de fonctions pseudo-concaves, ordonné par l'ordre induit, et filtrant à gauche, les injections canoniques étant des morphismes locaux. Dans ces conditions, la limite inductive des $H_{\overline{\phi}_i}$ existe.

<u>Lemme 4.I6</u> : <u>Posons</u> $H_\phi = \varinjlim (H_{\overline{\phi}_i})$, <u>alors</u>

I) H <u>est un anneau local hensélien</u>

2) <u>Pour tout</u> $i \in I$; H_Φ <u>domine</u> H_{ϕ_i}.

Cela résulte du fait qu'une limite inductive d'anneaux locaux hen-séliens est hensélien (les morphismes de transitions étant locaux) ([3]), et que les morphismes de $H_{\overline{\phi}_i}$ dans $H_{\overline{\Phi}}$ sont locaux. (Ici H_Φ domine $H_{\overline{\phi}_i}$).

<u>Remarque 4.I7</u> : Soit ϕ une fonction pseudo-concave finie : la fonction ψ définie par $\psi(n) = \phi(n+I)$ n'est pas pseudo-concave en général. Lorsque ϕ est concave, alors ψ est concave, donc pseudo-concave.

Soit donc ϕ une fonction concave et posons

$$\psi_k(n) = \phi(n+k) \qquad k \in \mathbb{N}$$

on en déduit pour tout n

$$\psi_k(n) \leq \phi(n) + \phi(k) - \phi(0)$$

et si $k \geq h$, alors pour tout n, on a :

$$\psi_k(n) = \phi(n+k) = \phi(n+k-h+h)$$

$$\leq \phi(n+h) + \phi(k-h) - \phi(0)$$

d'où

$$\overline{\psi}_k \leq \overline{\psi}_h$$

Prenons $\Phi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposition 4.I8 : *Alors dans ces conditions, l'anneau hensélien H_Φ est un anneau de valuation discrète.*

Puisque l'idéal maximal de H_Φ est formé des séries formelles nulles à l'origine. Il nous reste à vérifier que cet idéal maximal est principal. Soit $S(X) = XT(X) \in H_\Phi$, alors il existe ψ_i telle que $XT(X) \in H_{\overline{\psi}_i}$, soit $T(X) \in H_{\overline{\psi}_{i+I}}$. Donc $T(X) \in H_\psi$, d'où le résultat.

Exemples :

I) Prenons $\phi(n) = -an^k$ a entier > 0

$$S \quad H_\Phi \iff \overline{\phi}_S \geq - a\overline{P}_k$$ où P_k est un polynôme unitaire de degré k.

2) Soit a un entier ≥ 2, et prenons $\phi(n) = - a^{-n}$

$$S \quad H_\Phi \iff \quad k : \overline{\phi}_S \geq - \overline{a^k} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[I] N. BOURBAKI Algèbre commutative Ch. III Localisation Hermann

[2] N. BOURBAKI Algèbre commutative Ch. VI Valuations Hermann

[3] J.DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK Eléments de Géométrie Algébrique
Public. de l'I.H.E.S. n°32.

[4] M. RAYNAUD Anneaux locaux henséliens Lectures Notes n°I69
Springer-Verlag.

[5] R. RIVET Thèses Université de Rennes I97I.

[6] O.ZARISKI P. SAMUEL Commutative Algebra T.2. Van Nostrand Princeton N.J.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 2 R. RIVET
Maître de Conférences
de Mathématiques
Institut National des Sciences Appliquées
CEDEX 35 03I RENNES