

M. QUENTEL

**Sur le théorème d'Auslander - Buchsbaum**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1972, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 17, p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1972\\_\\_4\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__4_A17_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

M. QUENTEL

Introduction :

Nous voulons montrer dans cette note, en adaptant une méthode due à Mac Rae [I1], que le théorème de factorialité des anneaux réguliers peut s'étendre aux anneaux locaux cohérents pour lesquels tout idéal de type fini est de dimension homologique finie : ces anneaux sont intègres [2], et le groupe de leurs diviseurs principaux est réticulé. Nous montrons ensuite que cette classe d'anneaux se comporte bien par hensélisation.

Rappels et terminologie :

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires ; pour les principales propriétés des anneaux cohérents, nous renvoyons par exemple à [9] et [15] ; la notion d'idéal premier associé à un module est celle qui est définie dans [10], chapitre II, définition I.I (cf. également [12]). Si  $A$  est un anneau intègre, nous noterons  $G(A)$  le groupe des diviseurs principaux de  $A$ , noté additivement et ordonné par l'ordre usuel (cf. [5], § I). Nous dirons qu'un anneau local  $A$  est régulier si  $A$  est cohérent et si tout idéal de type fini de  $A$  est de dimension homologique finie, ce qui entraîne, par récurrence sur le nombre de générateurs, que tout  $A$ -module de présentation finie est de dimension homologique finie. Enfin, pour tout anneau cohérent  $A$ , nous noterons  $\delta(A)$  la borne supérieure des dimensions homologiques des  $A$ -modules de présentation finie et de dimension homologique finie. Dans [1], Bass a montré que  $\delta(A) = 0$ , si et seulement si le seul idéal fidèle de type de  $A$  est l'idéal unité ; c'est donc en particulier le cas des anneaux locaux de dimension de Krull nulle.

§ I - Un théorème de changement d'anneau

Proposition I.1 : Soit A un anneau local cohérent, k son corps résiduel, M un A-module de présentation finie non nul ; M est de dimension homologique n , si et seulement si  $\text{Tor}_n^A(k, M) \neq 0$  ,  $\text{Tor}_{n+1}^A(k, M) = 0$  ; il est de dimension homologique infinie, si et seulement si  $\text{Tor}_p^A(k, M) \neq 0$  pour tout p.

Pour la première assertion, le cas  $n = 0$  est bien connu (cf. [4], § 3, n° 2, corollaire 2), et le cas général se démontre par récurrence, en utilisant la suite exacte des Tor et le fait que, A étant cohérent, M est d'infinie présentation finie. La seconde assertion résulte immédiatement de la première.

Proposition I.2 : Si A est un anneau local cohérent, m son idéal maximal, a un idéal de type fini de A contenu dans m, on a l'inégalité :

$$\delta(A) \leq \delta(A/a) + \text{dh}_A(a) + 1.$$

Soit M un A-module de présentation finie et de dimension homologique finie

$$(S) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules où les  $L_i$  sont libres de type fini, et où  $n = \text{dh}_A(a)$ , supposé fini (sinon, il n'y aurait rien à démontrer). La suite exacte des Tor montre que  $\text{Tor}_p^A(N, A/a) = 0$  si  $p > 0$ , puisque  $\text{Tor}_p^A(M, A/a) = 0$  si  $p > n+1$ . La proposition VI, 4.I.I de [6] donne alors, pour tout  $q > 0$ , l'isomorphisme

$$\text{Tor}_q^A(N, A/m) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_q^{A/a}(N/aN, A/m).$$

Or  $A/a$  est un anneau local cohérent, puisque  $a$  est un idéal de type fini de A ; la formule précédente montre donc d'abord que  $\text{dh}_{A/a} N/aN$  est finie, donc inférieure à  $\delta(A/a)$  puisque  $\text{dh}_A N$  est finie, ensuite que

$\text{dh}_A N$  est également inférieure à  $\delta(A/a)$  ; la suite exacte (S) permet alors de conclure que  $\text{dh}_A(M) \leq \delta(A/a) + n+1$ .

Corollaire I.1 : Si A est un anneau local régulier tel que, dans  $\text{Spec } A$ , le complémentaire du point fermé est quasi-compact, la dimension faible de A est finie.

L'hypothèse entraîne en effet que A possède un idéal de type fini tel que  $A/a$  soit local de dimension de Krull nulle, donc tel que  $\delta(A/a) = 0$ . La proposition I.2 implique alors que tout A-module est de dimension faible inférieure à  $\text{dh}_A a + 1$ .

§ 2 - Une décomposition en intersection des anneaux intègres, application aux anneaux locaux réguliers.

Proposition 2.1 : Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions,  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathfrak{p}$  appartient à  $\text{Ass}_A K/A$
- ii) il existe un  $x \neq 0$  de A tel que  $\mathfrak{p}$  appartient à  $\text{Ass}_A A/xA$
- iii) il existe deux éléments non nuls x, y de A tels que  $\mathfrak{p}$  est minimal parmi les idéaux premiers de A contenant  $Ax : Ay$ .

La démonstration de cette proposition - qui est en fait bien connue - étant de pure routine, nous ne la donnerons pas. Pour tout anneau intègre A, nous noterons  $P_A$  l'ensemble des idéaux premiers de A satisfaisant aux conditions de la proposition 2.1 ( $P_A$  est vide si et seulement si A est un corps) ; d'autre part, nous dirons qu'un anneau local intègre A est irréductible si son idéal maximal appartient à  $P_A$ . Le comportement des idéaux associés par localisation montre que, pour tout anneau intègre A, un idéal

premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$  appartient à  $P_A$ , si et seulement si  $A_{\mathfrak{p}}$  est irréductible.

Proposition 2.2 : Pour tout anneau intègre  $A$  qui n'est pas un corps,

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P_A} A_{\mathfrak{p}}.$$

Soient en effet  $x, y$  deux éléments non nuls de  $A$  tels que  $\frac{x}{y}$  n'appartienne pas à  $A$  ; on a donc  $Ax : Ay \neq A$ , et il existe un élément  $\mathfrak{p}$  de  $P_A$  tel que  $\mathfrak{p} \supset Ax : Ay$ , donc tel que  $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \supset A_{\mathfrak{p}} x : A_{\mathfrak{p}} y$  : ceci implique que  $\frac{x}{y}$  n'est pas dans  $A_{\mathfrak{p}}$ .

Proposition 2.3 : Un anneau local régulier est irréductible si et seulement si c'est un anneau de valuation ayant un plus grand idéal premier non maximal.

Il est clair que la condition est suffisante, les anneaux de valuation étant cohérents de dimension faible un. - Réciproquement, soit  $A$  un anneau local régulier irréductible,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal ; il existe un idéal  $\mathfrak{a} = Ax : Ay$  de  $A$  tel que  $A/\mathfrak{a}$  soit de dimension de Krull nulle (proposition 2.1) ; la suite exacte

$$0 \longrightarrow Ax : Ay \longrightarrow Ax \oplus Ay \longrightarrow Ax + Ay \longrightarrow 0$$

et la cohérence de  $A$  montrent que  $\mathfrak{a}$  est de type fini :  $A$  est donc de dimension faible finie  $d$  (corollaire I.1). Or, la suite exacte précédente montre que  $\text{dh}_A < \sup(0, d-2)$  ce qui, compte tenu de l'inégalité de la proposition I.2, n'est possible que si  $d \leq 1$ . Comme  $A$  ne peut être un corps d'après nos définitions, c'est bien un anneau de valuation possédant un plus grand idéal premier non maximal.

Proposition 2.4 : Soit  $A$  un anneau local régulier qui n'est pas un corps ; il existe une partie  $P_A$  de  $\text{Spec } A$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$i) A = \bigcap_{p \in P_A} A_p$$

ii) A est un anneau de valuation pour tout p de  $P_A$ .

En particulier, A est intégralement clos.

La seule chose qui reste à démontrer est que, si A est un anneau local régulier, il en est de même de  $A_p$  pour tout idéal premier p de A.

- On sait que  $A_p$  est cohérent ; de plus, si a est un idéal de type fini de A, il existe un idéal de type fini a' de A tel que  $a = a'_p$  ; a' étant de dimension homologique finie, il en est de même de a.

### § 3 - Généralisation au cas cohérent de la construction de Mac Rae

Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau local régulier et  $\mathcal{C}_A$  la sous-catégorie pleine de Mod A dont les objets sont les A-modules de torsion et de présentation finie.

Nous ne referons pas la démonstration, donnée par Mac Rae dans le cas noethérien [II], de l'existence d'un homomorphisme  $\chi_A$  du groupe de Grothendieck de  $\mathcal{C}_A$  dans  $G(A)$  défini par la condition suivante :

$\chi_I$  : si  $dh_A M \leq I$ ,  $\chi_A(M)$  est le diviseur associ e au premier invariant de Fitting de M, qui est alors principal.

On notera que  $\chi_I$  entraîne que, si x est un élément non nul de A,  $\chi_A(A/xA) = \text{div } x$ . - L'homomorphisme  $\chi$  satisfait à la condition de changement d'anneau suivante :

$\chi_2$  : si p est un idéal premier de A et M un objet de  $\mathcal{C}_A$ ,  $\chi_{A_p}(M_p)$  est l'image canonique de  $\chi_A(M)$  dans  $G(A_p)$ .

Proposition 3.I :  $\chi_A(M)$  est un diviseur positif de A pour tout objet M de  $\mathcal{C}_A$ .

On vérifie immédiatement la proposition dans le cas où  $A$  est un anneau de valuation en utilisant  $(\chi_1)$  ; on se ramène ensuite à ce cas en employant  $(\chi_2)$  et la proposition 2.3.

Proposition 3.2 : Le groupe  $G(A)$  est réticulé.

Soient d'abord  $a$  et  $b$  deux idéaux de type fini entiers de  $A$  tels que  $a$  contienne  $b$  ; la suite exacte de  $A$

$$0 \longrightarrow \frac{a}{b} \longrightarrow \frac{A}{b} \longrightarrow \frac{A}{a} \longrightarrow 0$$

montre, compte tenu de la proposition précédente, que  $\chi_A(A/a) \leq \chi_A(A/b)$ .

Soient maintenant  $Ax$  et  $Ay$  deux idéaux principaux entiers de  $A$  ; la cohérence de  $A$  implique que  $Ax \cap Ay$  est un idéal de type fini  $a$  de  $A$ , et il résulte de ce qui précède que, si  $Az \subset a$ , on a :

$$\operatorname{div} z \geq \chi_A(A/a) \geq \operatorname{div} x$$

$$\operatorname{div} z \geq \chi_A(A/a) \geq \operatorname{div} y$$

Cela implique évidemment que  $G(A)$  est réticulé, la borne supérieure étant donnée, pour les éléments positifs, par la formule :

$$\sup(\operatorname{div} x, \operatorname{div} y) = \chi_A(A/Ax \cap Ay).$$

#### § 4 - Comportement par hensélisation des anneaux locaux réguliers

On sait que, pour tout anneau local  $A$ , le morphisme  $A \longrightarrow {}^hA$  est fidèlement plat et absolument plat au sens de [I3] (cf. [7]). Il en résulte que  $A$  et  ${}^hA$  sont simultanément cohérents et qu'ils ont même dimension faible. On voit de même facilement que, si  ${}^hA$  est régulier,  $A$  l'est également ; la réciproque est un peu plus délicate.

Lemme 4.1 : Si  $A$  est un anneau local régulier,  $B$  un anneau local et  $h : A \rightarrow B$  un morphisme essentiellement étale,  $B$  est régulier.

Un morphisme essentiellement étale étant absolument plat, on voit que  $B$  est cohérent. Soit maintenant  $b$  un idéal de type fini de  $B$  ; on peut supposer que  $B$  est un localisé d'une  $A$ -algèbre  $C$  qui soit, en tant que  $A$ -module, libre de type fini (cf. [14], chapitre VIII). Il existe alors un idéal de type fini  $\mathcal{C}$  de  $C$  tel que  $C \otimes_C B$  soit isomorphe à  $b$  ; de plus  $\mathcal{C}$  est un  $A$ -module de présentation finie sur  $A$ , donc est de dimension homologique finie sur  $A$ . Le  $A$ -module  $b$  est limite d'un système inductif filtrant de  $A$ -modules isomorphes à  $\mathcal{C}$  (cf. [8], 6.2.I) : il est donc de dimension faible finie sur  $A$ , donc sur  $B$  ;  $B$  étant cohérent et  $b$  de présentation finie sur  $B$ , on conclut que  $dh_B$  est fini.

Proposition 6.I : Un anneau local est régulier, si et seulement si son hensélisé est régulier.

Il reste à démontrer que, si  $A$  est régulier, tout idéal  $a$  de type fini de  ${}^hA$  est de dimension homologique finie. Considérons  ${}^hA$  comme limite inductive des  $A$ -algèbre strictement essentiellement étales ;  $a$  étant de présentation finie sur  ${}^hA$ , il existe une  $A$ -algèbre strictement essentiellement étale et un idéal de présentation finie  $b$  de  $B$  tel que  $a = {}^hA \otimes_B b$  (cf. [8], proposition 6.3.3) ; comme  $b$  est de dimension homologique finie sur  $B$  d'après le lemme 4.I, il en est de même de  $a$  sur  ${}^hA$ .





- REFERENCES -

- [1] BASS Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. A.M.S., t. 88 (1958), pp. 194-206.
- [2] BERTIN Anneaux cohérents réguliers, C.R. Ac. Sc. Paris, Série A, t. 273 (5 juillet 1971) pp. 1-3.
- [3] BOURBAKI Algèbre commutative, Hermann, Paris, ch. I
- [4] BOURBAKI Algèbre commutative, Hermann, Paris, ch. II
- [5] BOURBAKI Algèbre commutative, Hermann, Paris, ch. VII
- [6] CARTAN et EILENBERG Homological Algebra, Princeton Univ. Press.
- [7] FERRAND Epimorphismes d'anneaux et algèbres séparables, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 265 (9 octobre 1967), pp. 411-414.
- [8] GROTHENDIECK et DIEUDONNE Eléments de Géométrie Algébrique, I. Springer Verlag, Berlin.
- [9] HARRIS Some results on coherent rings, Proc. A.M.S., t. 17 (1966) pp. 474-479.
- [10] LAZARD Thèse, Bulletin Soc. Math. France, t; 97 (1969), pp. 81-128.
- [11] MAC RAE On an application of the Fitting invariants, Jour. of Alg., t. 2 (1965), pp. 152-159.
- [12] MERKER Idéaux faiblement associés, Bulletin Soc. Math. France, 2e série, t. 93 (1969), pp. 15-21.
- [13] OLIVIER Montée de quelques propriétés par morphismes absolument plats, C.R. Ac. Sc. Paris, Série A, t.271 (19 octobre 1970) pp. 759-760.
- [14] RAYNAUD Anneaux locaux henséliens, Springer Verlag, Berlin.
- [15] SOUBLIN Anneaux et modules cohérents, Jour. of Alg., t. 15 (1970) pp. 455-472.



Colloque d'ALGÈBRE de RENNES (FRANCE)  
du 19 au 22 Janvier 1971

Exposé n° 17      Y. QUENTEL  
26, bd Léon Blum  
29N - BREST

Reproduction interdite